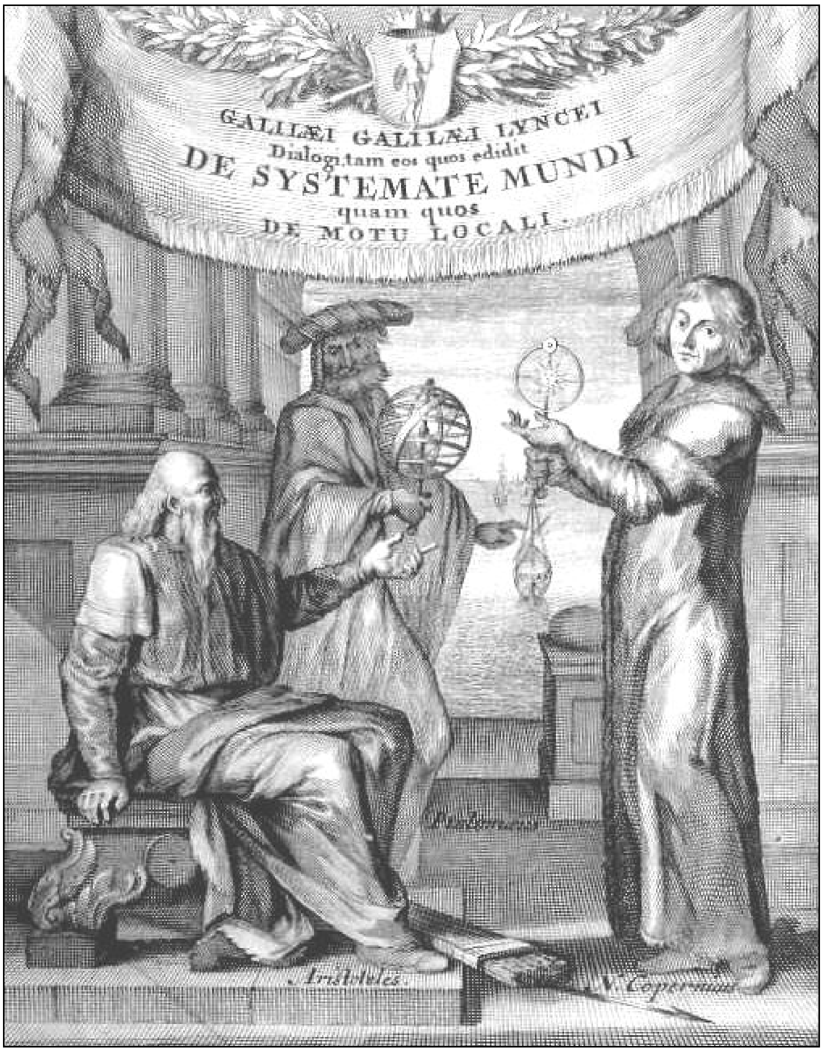
Unterrichtsmaterialien zum Physik-Kurs

Prinzipien der Mechanik

Teil I: Kinematik



Aristoteles Ptolemäus Kopernikus

Titelbild der lateinischen Ausgabe von Galileis »Dialog über die zwei hauptsächlichsten Weltsysteme« von 1635

Erarbeitet und zusammengestellt
für den Physikunterricht
in der Klasse 12 der Fachoberschule

designed by
sic Ars didactica
Verstehen lehren

Jochen Sicars
Trautheim bei Darmstadt
jochensicars@gmail.de

Jochen Sicars • Trautheim bei Darmstadt 2015
www.sicars-didactica.de • jochensicars@gmail.de

Fachoberschule – Physik

Prinzipien der Mechanik – Jahrgangsstufe 12

Zur didaktischen Konzeption des Kurses

Schülerinnen und Schüler der Fachoberschule kommen mit unterschiedlichen physikalische Voraussetzungen in die Klasse 12. Während die Schüler der zweijährigen Form A bereits in der Klasse 11 der Fachoberschule 1 Wochenstunde Physikunterricht hatten und in diesem Rahmen eine kinematische Grundbildung vermittelt bekommen, bringen die Fachoberschüler der einjährigen Form B aus ihrer Berufsausbildung allenfalls eine sehr anwendungsbezogene Form physikalischer Vorbildung mit. Gemeinsam ist beiden Schülergruppen, dass sie in ihrer Realschulausbildung in der Mittelstufe drei Schuljahre Physikunterricht mit jeweils 2 Wochenstunden und 3 Wochenstunden (in der Klasse 10) hatten.

Auf diesen Voraussetzungen baut das sowohl für die Form A als auch die Form B der Fachoberschule entwickelte Unterrichtskonzept des Kurses »Prinzipien der Mechanik« auf. Durch teilweise intensive Wiederholungen einzelner Themen und ergänzende Vertiefungen sollen Unterschiede in den Voraussetzungen weitgehend kompensiert werden. Das Konzept kann bei Bedarf hinsichtlich der zeitlichen Schwerpunktsetzungen einzelner Themensequenzen als auch im Hinblick auf die thematische Abfolge flexibel variiert werden.

Didaktische Vorbemerkung

Unter dem Aspekt der Verbindung von allgemeiner und beruflicher Bildung handelt es sich um ein integriertes Konzept, das in beiden Organisationsformen der Fachoberschule mehrere Jahre erprobt und aufbauend auf den so gewonnen Unterrichtserfahrungen in fachlicher und didaktisch-methodischer Hinsicht weiterentwickelt wurde. Insofern ist es seiner didaktischen Intention nach schulformunabhängig, kann also immer dort Anwendung finden, wo es um die Vermittlung der **Grundlagen der Mechanik** geht.

Das Konzept ist zugleich auch **wissenschaftsorientiert**, denn es ist in seiner systematischen Strukturierung durch die Prinzipien der Theorie der Mechanik von Galilei und Newton bestimmt. Für die Fachoberschule ist es im Hinblick auf die angestrebte Studierfähigkeit zugleich auch insoweit propädeutisch, als es sich von den Themengebieten her an dem orientiert, was im Grundstudium des Studienganges »Elektrotechnik« an der Fachhochschule vermittelt wird. Soweit es für das Verständnis insbesondere so zentraler Grundbegriffe wie »Bewegung«, »Kraft«, »Trägheit« etc. von Bedeutung ist, greift das folgende Konzept auch auf Elemente einer **historisch-genetischen** Physik-Didaktik zurück. Es wird erwartet, dass durch die Verknüpfung von systematischen und historisch-genetischen Vermittlungsformen die physikalische Begriffsbildung und damit das Verstehen der Physik gefördert wird.

Insofern ist dieses Konzept zugleich auch prinzipiell **fachübergreifend** angelegt. So erfordert beispielsweise ein umfassendes Verständnis der Entwicklung der Mechanik und ihrer Begriffssystematik seit den ersten systematischen Bemühungen von Aristoteles im antiken Griechenland neben solidem Grundlagenwissen in der Mathematik sowohl Kenntnisse über die philosophischen Grundlagen etwa der antiken und mittelalterlichen Philosophie als auch über die gesellschaftlich-politischen und ökonomischen Veränderungen in der Epoche des Übergangs von mittelalterlichen Feudalgesellschaft zur bürgerlich-kapitalistischen Gesellschaft. Exemplarisch werden dabei relevante Aspekte etwa der Renaissance, der Aufklärung und der Industrialisierung in die Darstellung einbezogenen. Dazu soll vor allen Dingen die im Rahmen dieses Kurses vorgesehene einwöchige **Studienfahrt** »Auf den Spuren Galileo Galileis« nach Pisa, Florenz und Siena beitragen.

Unter fachübergreifenden Gesichtspunkten sind auch die **mathematischen Exkurse** zur Einführung in die Differential- und Integralrechnung zu betrachten. Am Beispiel der Newtonschen Überlegungen zur Anwendung grundlegender Begriffe der Analysis auf die beschleunigte Bewegung soll ein erster Zugang zur »höheren«

Mathematik ermöglicht werden. Formal liegt diesen Exkursen eine Vereinbarung der zuständigen Fachoberschulkonferenz zugrunde, derzufolge die Wochenstundenzahl des Physikunterrichts von 2 auf 3 Wochenstunden unter der Maßgabe erhöht wurde, einen Teil dieser Mehrstunden zur Unterstützung des Mathematikunterrichts zu verwenden. Dies wurde im Hinblick darauf, daß die meisten Absolventen unserer Fachoberschule an der Fachhochschule ein technisches Studium aufnehmen, als notwendig erachtet. In den technisch-naturwissenschaftlichen Studiengängen nimmt die Mathematik im Grundstudium nach wie vor einen zentralen Stellenwert ein. Aus Gesprächen mit ehemaligen Schülern und der Kooperation mit den ET-Fachbereichen der Hochschule Darmstadt wissen wir, dass die Mathematik für unsere Absolventen in der Regel die schwierigste Hürde im Grundstudium ist.

I. Einführung und Kinematik

A. Einführung

1. Gegenstand und Teilgebiete der Mechanik (Arbeitsblatt Nr. **1**)
2. Bewegung als Erscheinung in Raum und Zeit (Arbeitsblatt Nr. **2**)
   - Erste Annäherung an den Begriff der Bewegung
   - Erkenntnistheoretische Aspekte von Raum und Zeit
3. Quellen der Erkenntnis – Wie eine physikalische Theorie entstehen kann (Arbeitsblatt Nr. **3**)
   - Wahrnehmung und das Modell des Empirismus
   - Denken und das Modell des Idealismus
   - EJASE-Modell von A.Einstein
   - Verhältnis von Wahrnehmung und Denken im Erkenntnisprozeß
   - Zusatz: Optische Sinnestäuschung (Arbeitsblatt Nr. **3 a**)

B. Erste Grundbegriffe der Mechanik: Weg und Zeit

1. Zum Begriff des Weges (Arbeitsblatt Nr. **4**)
   - Zum physikalischen Begriff des Weges
   - Bestimmung des Erdumfanges nach Eratosthenes
   - Festlegungen zur Längenmaßeinheit »1 Meter«
2. Zur Objektivierung des Begriffs der Zeit (Arbeitsblatt Nr. **5**)
   - Zwei periodische Vorgänge zur Wahrnehmung der Zeit
   - Bestimmung des Tages als Zeitdauer einer Tag-Nacht-Periode (Sonnentag)
   - Bestimmung des Jahres als Zeitdauer einer Sommer-Winter-Periode (Sonnenjahr)
   - Definitionen der Zeit-Maßeinheit »1 Sekunde«
   - Zusatz: Zur Entstehung der warmen und kalten Jahreszeiten (Arbeitsblatt Nr. **5 a**)
   - Exkurs: Proportionalität und Geradengleichung (Arbeitsblatt Nr. **5 b**)

C. Gleichförmige Bewegung und Geschwindigkeit

1. Ungleichförmige und gleichförmige Bewegung (Arbeitsblatt Nr. **6**)
   - Die ungleichförmige Bewegung als allgemeine Form
   - Gleichförmige Bewegung als Sonderfall
2. Zum Begriff der Geschwindigkeit (Arbeitsblatt Nr. **6**)
   - Darstellung im Weg-Zeit-Diagramm
   - Definition der Geschwindigkeit
3. Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung
   - Begründung des Gesetzes (Arbeitsblatt Nr. **6**)
   - Übungsaufgaben zur gleichförmigen Bewegung (Arbeitsblatt Nr. **7**)

D. Gleichförmige Geschwindigkeitsänderung und Beschleunigung

1. Ungleichförmige und gleichförmige Beschleunigung (Arbeitsblatt Nr. **8**)
   - Die ungleichförmige Beschleunigung als allgemeine Form
   - Gleichförmige Beschleunigung als Sonderfall
2. Zum Begriff der Beschleunigung (Arbeitsblatt Nr. **8**)

- Darstellung im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm
- Definition der Beschleunigung

3. Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung
   - Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz (Arbeitsblatt Nr. **8** / Seite 1)
   - Weg-Zeit-Gesetz (Arbeitsblatt Nr. **8** / Seite 1)
   - Zusammenfassung: Gesetze und Zeitdiagramme (Arbeitsblatt Nr. **8** / Seite 2)
   - Gleichmäßige Geschwindigkeitsänderung mit Anfangsgeschwindigkeit (Arbeitsblatt Nr. **8 a**)
   - Übungsaufgaben zur gleichförmigen Beschleunigung (Arbeitsblatt Nr. **9**)

E. Erweiterung und Verallgemeinerung des Bewegungsbegriffs

1. Mathematischer Exkurs I: Folgen und Grenzwerte (Arbeitsblatt »**Erster mathematischer Exkurs**«)
2. Zum Begriff der Momentangeschwindigkeit (Arbeitsblatt Nr. **10** / Seite 1)
3. Bestimmung der Geschwindigkeit als Grenzwert (Arbeitsblatt Nr. **10** / Seite 2)
4. Mathematischer Exkurs II: Differentialrechnung (Arbeitsblatt »**Zweiter mathematischer Exkurs**«)
   - Differenzieren von Potenzfunktionen
   - Weitere einfache Regeln der Differentialrechnung
5. Definition der Geschwindigkeit und Beschleunigung als Differentialquotienten (Arbeitsblatt Nr. **11**)
6. Übungsaufgaben zur ungleichförmigen Beschleunigung (Arbeitsblatt Nr. **12**)
7. Mathematischer Exkurs III: Integralrechnung (Arbeitsblatt »**Dritter mathematischer Exkurs**«)
   - Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung
   - Integralfunktion als Flächenfunktion
   - Einige einfache Regeln der Integralrechnung
8. Zeitintegrale in der Kinematik
   - Der Weg als Zeitintegral der Geschwindigkeit und Integrationsprinzip von Galilei (Arbeitsblatt Nr. **13** / Seite 1)
   - Die Geschwindigkeit als Zeitintegral der Beschleunigung (Arbeitsblatt Nr. **13** / Seite 2)
   - Formalisierung des Integrationsprinzips von Galilei: Das Zeitintegral der Geschwindigkeit als Grenzwert einer Summe (Arbeitsblatt Nr. **13** / Seite 3)
   - Aufgabenbeispiele zur Anwendung der Integralrechnung (Arbeitsblatt Nr. **13** / Seite 4)
9. Überlagerung von Bewegungen
   - Einführende Beispiele (Arbeitsblatt Nr. **14**)
   - Darstellung der Bewegungsgrößen als Vektoren (Arbeitsblatt Nr. **14 a**)
   - Aufgabenbeispiel zur Überlagerung von Bewegungen (Arbeitsblatt Nr. **14 b**)

D. Kinematik der Kreisbewegung

1. Die gleichförmige Kreisbewegung als beschleunigte Bewegung (Arbeitsblatt Nr. **15** / Seite 1)
2. Winkelgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit als Vektorgrößen (Arbeitsblatt Nr. **15** / Seite 2)
3. Zusatz: Ergänzende Hinweise zum Vektorprodukt (Arbeitsblatt ohne Nr.)
4. Übungsaufgaben zur gleichförmigen Kreisbewegung (Arbeitsblatt Nr. **15 a**)
5. Die gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung
   - Definition von Bahn- und Winkelbeschleunigung (Arbeitsblatt Nr. **16** / Seite 1)
   - Gesetze der gleichförmig beschleunigten Kreisbewegung(Arbeitsblatt Nr. **16** / Seite 2)
   - Analogien zwischen geradliniger Bewegung und Kreisbewegung(Arbeitsblatt Nr. **16** / Seite 2)

II. Dynamik

E. Die Mechanik des Aristoteles und des Mittelalters

1. Über Aristoteles und seine Mechanik (Arbeitsblatt Nr. **17** / Seite 1)
2. Einteilung der Bewegungen nach Aristoteles (Arbeitsblatt Nr. **17** / Seite 1)
3. Probleme in der Mechanik des Aristoteles (Arbeitsblatt Nr. **17** / Seite 2)

F. Die mechanische Theorie von Galilei und Newton

1. Das Trägheitsmodell von Galileo Galilei von 1638 (Arbeitsblatt Nr. **18** / Seite 1)
2. Ergänzungen zum Trägheitsmodell von Galilei (Arbeitsblatt Nr. **18** / Seite 1a)
3. Kraftbegriff und Trägheitsprinzip in der Mechanik von Newton (Arbeitsblatt Nr. **18** / Seite 2)
4. Bestimmung der Größe einer Kraft und dynamisches Grundgesetz (Arbeitsblatt Nr. **18** / Seite 3)
5. Wechselwirkungsprinzip von Newton (Arbeitsblatt Nr. **18** / Seite 4)
6. Zusammenfassung: Die Grundsätze (Axiome) der Newtonschen Theorie (Arbeitsblatt Nr. **18** / Seite 5)
7. Übungsaufgaben zum Dynamischen Grundgesetz (Arbeitsblatt Nr. **19**)

G. Überlagerung von Kräften und Gleichgewicht (Statik)

1. Kräfte-Parallelogramm nach Newton: Kraft als Vektor (Arbeitsblatt Nr. **20** / Seite 1)
2. Übungsaufgaben zur Überlagerung von Kräften mit Lösungen (Arbeitsblatt Nr. **20** / Seite 2)
   - Aufgabe **1**: Wandkonsole (Lösungsblatt **1**)
   - Aufgabe **2**: Freileitungsmast (Lösungsblatt **1**)
   - Aufgabe **3**: Lastkran (Lösungsblatt **2**)
   - Aufgabe **4**: Abgestützte Walze (Lösungsblatt **3**)
   - Aufgabe **5**: Halterung einer Seilrolle (Lösungsblatt **3**)

H. Dynamik der Kreisbewegung

1. Zentripetal- und Zentrifugalkraft (Arbeitsblatt Nr. **21** / Seite 1)
2. Beispiele zur Wirkung von Zentralkräften
   - Fliehkraftpendel (Arbeitsblatt Nr. **21** / Seite 2)
   - Steilwandfahrer (Arbeitsblatt Nr. **21** / Seite 2)
   - Kugelschwebe (Arbeitsblatt Nr. **21** / Seite 3)
   - Astronauten-Zentrifuge (Arbeitsblatt Nr. **21** / Seite 3)
   - Zentralkräfte infolge der Erdrotation (Arbeitsblatt Nr. **21** / Seite 4)
   - Foucault-Pendel zur Demonstration der Erdrotation (Arbeitsblatt Nr. **21 a**)

J. Fall- und Wurfbewegungen

1. Zur Einführung: Der waagerechte Wurf (Arbeitsblatt Nr. **22** / Seite 1)
2. Der schiefe Wurf als allgemeine Form der Wurfbewegung (Arbeitsblatt Nr. **22** / Seite 2)
3. Fallbewegung: Galileis Begründung des freien Falls (Arbeitsblatt Nr. **22** / Seite 3 und 4)

K. Entwicklung des Weltbildes

Vorbemerkung: Die Arbeitsblätter Nr. 23 bis 31 müssen noch digitalisiert werden.

1. Übersicht zur Entwicklung des Weltbildes (Arbeitsblatt Nr. **23**)
2. Erklärung der unterschiedlichen Jahreszeitenlängen im geozentrischen und heliozentrischen Weltbild (Arbeitsblatt Nr. **24**)
3. Erklärung der Planetenschleifen im geozentrischen und heliozentrischen Weltbild (Arbeitsblatt Nr. **25**)
4. Stationen der Ablösung des geozentrischen Weltbildes (Arbeitsblatt Nr. **26**)
5. Die Astronomie von Johannes Kepler
   - Die Keplerschen Gesetze (Arbeitsblatt Nr. **27** / Seite 1)
   - Das Keplersche Polyeder-Weltmodell von 1596 (Arbeitsblatt Nr. **27** / Seite 2)
6. Vergleich: Weltsysteme von Ptolemäus, Kopernikus, Brahe und Kepler/Newton (Arbeitsblatt Nr. **28**)
7. Das Gravitationsgesetz von Newton (Arbeitsblatt Nr. **28**)
   - Newtons Begründung der Wechselwirkung zwischen Zentralkörper und Planeten (Arbeitsblatt Nr. **29** / Seite 1)
   - Newtons Begründung der Zentripetalkraft-Richtung mit dem Flächensatz (Arbeitsblatt Nr. **29** / Seite 2)
   - Herleitung des Gravitationsgesetzes aus den Newton-Axiomen und den Kepler-Gesetzen
   - Übungen zu den Kepler-Gesetzen und zum Gravitationsgesetz (Arbeitsblatt Nr. **29** / Seite 4)

L. Mechanische Arbeit, Leistung und Energie

1. Mechanische Arbeit und Leistung
   - Definition von mechanischer Arbeit und Leistung (Arbeitsblatt Nr. **30** / Seite 1)
   - Übungsaufgaben zur mechanischen Arbeit und Leistung (Arbeitsblatt Nr. **30** / Seite 2)
2. Mechanische Arbeit und Energie
   - Hubarbeit und potentielle Energie (Arbeitsblatt Nr. **31** / Seite 1)
   - Bewegungsenergie (Arbeitsblatt Nr. **31** / Seite 2)

M. Spezielle Relativitätstheorie – Eine sehr kurze Einführung

1. Einsteins Postulate (Arbeitsblatt »**Relativität**« / Seite 1)
2. Zeitdehnung: Bewegte Uhren gehen langsamer (Arbeitsblatt »**Relativität**« / Seite 1 und 2)
3. Längenkontraktion: Bewegte Stäbe sind kürzer (Arbeitsblatt »**Relativität**« / Seite 3 und 4)
4. Massenzunahme: Die Masse bewegte Körper nimmt mit der Geschwindigkeit zu

Allgemeine Hinweise zum **Physik-Unterricht**

- **Arbeitsblätter, Mitschriften** usw. sollten sorgfältig in einem **Aktenordner** abgeheftet werden.
- **Formelsammlung** mit Formeln, Diagrammen, Graphiken, Texten usw. sollte ebenfalls mit großer Sorgfalt erstellt werden. Sie darf bei **Klausuren** verwendet werden.

  Einschränkung: Durchgerechnete **Beispiele** (auch nicht in allgemeiner Form) und **Arbeitsblätter** dürfen nicht enthalten sein.
- **Klausuren**: 1 – 2 pro Halbjahr. Bei **Versäumnis** einer Klausur wird diese mit **6** bewertet, es sei denn es wird ein **ärztliches Attest** vorgelegt. Nur dann kann die Klausur nachgeschrieben werden.

Zeugnisnoten – In die Ermittlung der Zeugnisnoten werden einbezogen

- die **schriftlichen Leistungen** (Klausuren, Hausarbeiten etc.)
- die **mündlichen Leistungen** bzw. die **Mitarbeit** im Unterricht – Dazu gehören u.a.:
  - Sachbeiträge im Unterrichtsgespräch in der Klasse
  - Beiträge in Einzelgesprächen z.B. bei Übungen und Hausafgaben-Besprechungen
  - Vorbereitung auf die Mitarbeit im Unterricht etwa in Form der Hausaufgaben
  - Besondere Einzelbeiträge z.B. bei der Lösung spezieller Sachprobleme

  Von Bedeutung für die Mitarbeitsnote ist selbstverständlich auch die **Anwesenheit** und **Pünklichkeit**.
- die **Leistungsentwicklung** im Verlauf des Schuljahres

- **Was ist Physik?**

Physik ist eine der folgenden **drei**

Naturwissenschaften

Physik

Chemie

Biologie

Geisteswissenschaften: Philosophie, Mathematik, etc.

- In welche **Teilgebiete** läßt sich die Physik einteilen?

Physik – Teilgebiete:

Astronomie
Weltall

Mechanik
Bewegungen

Akustik
Schall

Optik
Licht

Elektrik
Ladung

Kalorik
Wärme

Atomphysik
Elementarteilchen

Kurs: **PRINZIPIEN der MECHANIK**

Name :

Arbeitsblatt Nr. **1** : **Gegenstand** und **Teilgebiete** der **MECHANIK**

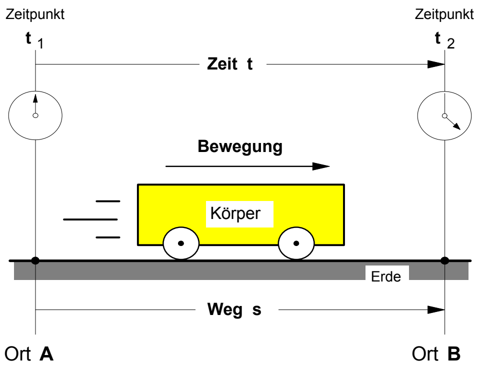
Was ist **M E C H A N I K** ? – **Mechanik** ist eine naturwissenschaftliche **Theorie** der **Bewegungen** und ihrer **Ursachen**.

(mechane [gr.]: kluger Einfall, List)

Dynamik: Lehre von dem Zusammenhang zwischen Bewegungen und Kräften
(dynamis [gr.]: Kraft)

KINEMATIK (kinesis [gr.]: Bewegung)

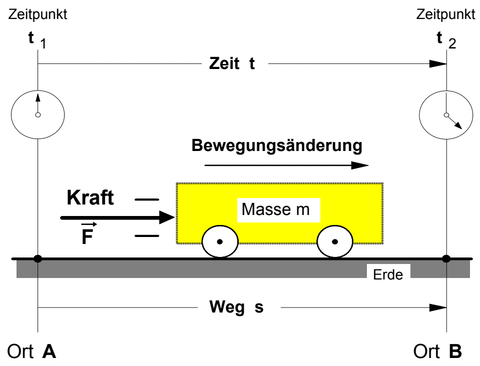
- Lehre von den **Bewegungen** von Körpern. Die Kinematik beschränkt sich auf die **Beschreibung** von Bewegungen, ohne nach deren Ursachen zu fragen.



- Bedeutsame Resultate (Beispiele):
  - ► Fallgesetze (Galilei):
    1. a = constant
    2. v = a · t
    3. s = 1/2 · a · t²
  - ► Keplersche Gesetze der Planetenbewegung

KINETIK (kinesis [gr.]: Bewegung)

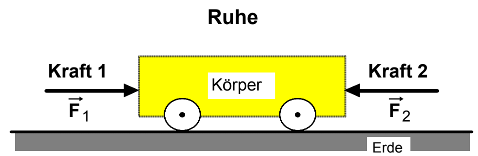
- Lehre von den **Bewegungsänderungen** durch **Kräfte**. Die Dynamik bzw. Kinetik beschäftigt sich mit den **Ursachen von Bewegungen** und versucht diese mit Prinzipien zu begründen.



- Bedeutsame Resultate (Beispiele):
  - ► Axiome (Grundsätze) der Mechanik (Newton):
    1. Trägheitsprinzip
    2. Kraftgesetz (F= m · a)
    3. Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio)
  - ► Gravitationsgesetz (Newton)
  - ► Energieerhaltungssatz (Mayer, Helmholtz)

STATIK (stare [lat.]: stehen)

- Lehre vom **Ruhezustand** von Körpern, auf die Kräfte einwirken. Sie wird auch als die Lehre vom "**Gleichgewicht** der Körper" bezeichnet.

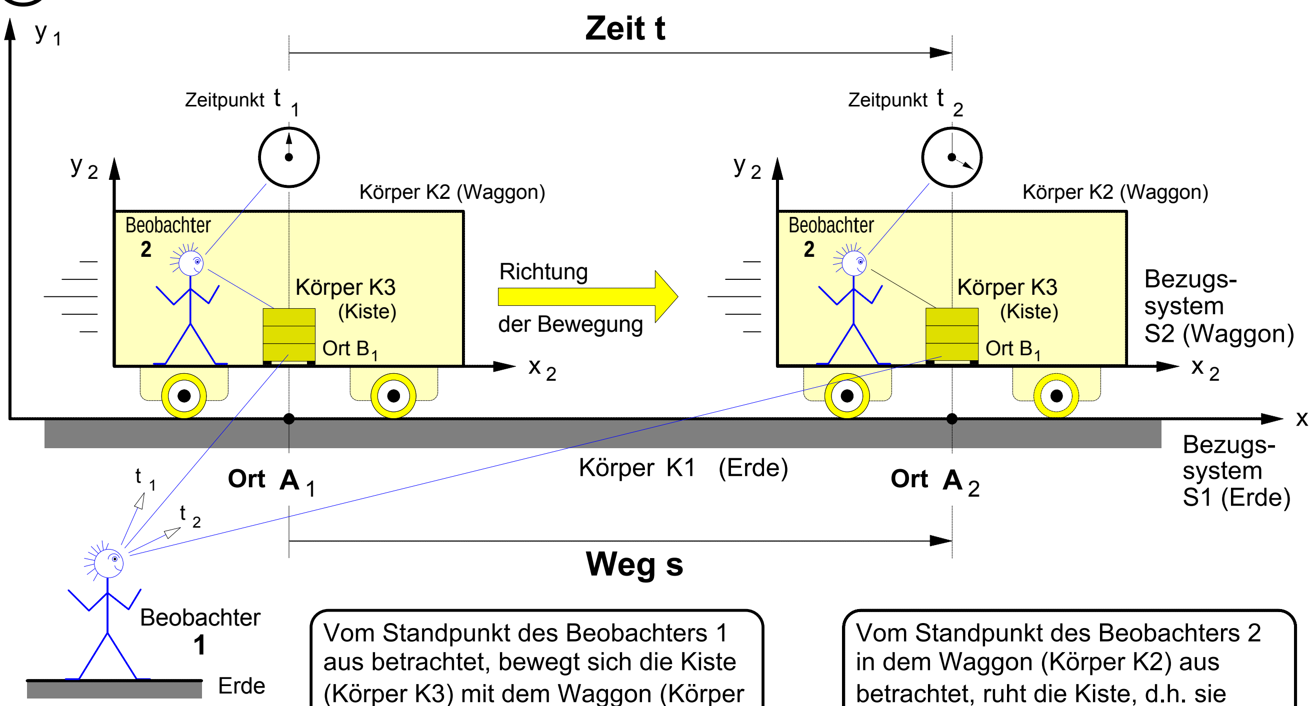


- Bedeutsame Resultate (Beispiele):
  - ► Hebelgesetz (Archimedes):
    $F_1 \cdot \ell_1 = F_2 \cdot \ell_2$

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK** | Name: | PHY-2-F.DOC - 29.03.03

Arbeitsblatt Nr. **2** : **Bewegung** als Erscheinung in **Raum** und **Zeit**

1. **Physikalische Bestimmung** des Begriffs der **Bewegung**



Vom Standpunkt des Beobachters 1 aus betrachtet, bewegt sich die Kiste (Körper K3) mit dem Waggon (Körper K2) vom Ort A1 zum Ort A2.

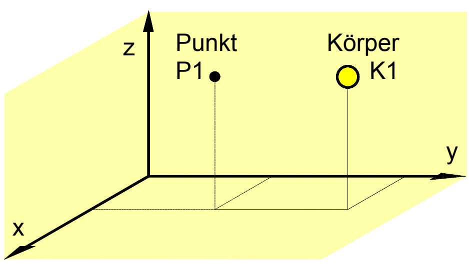
Vom Standpunkt des Beobachters 2 in dem Waggon (Körper K2) aus betrachtet, ruht die Kiste, d.h. sie bleibt in dem Waggon am Ort B1.

- Eine **Bewegung** ist die **Ortsveränderung** eines Körpers gegenüber einem anderen Körper. Dabei vergeht eine bestimmte **Zeit t** und der Körper legt einen **Weg s** zurück.
- Ob ein Körper sich bewegt oder ruht, läßt sich nur entscheiden, wenn man ihn in Bezug zu einem anderen Körper betrachtet. Oder allgemeiner: Bewegungen können nicht absolut, d.h. unabhängig von einem Bezugssystem, sondern nur **relativ** , d.h. nur im Verhältnis zu einem vorher festgelegten Bezugssystem bestimmt werden.

2. **Erkenntnistheoretische Aspekte** von **Raum** und **Zeit**

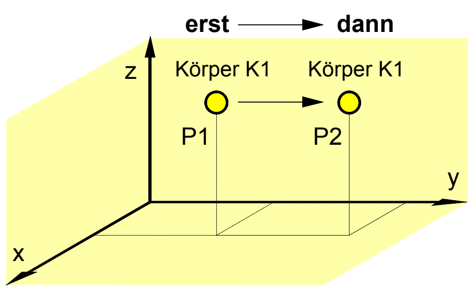
Bewegungen sind Erscheinungen in **Raum** und **Zeit**. Nach IMMANUEL KANT (1724–1804, Philosoph der Aufklärung) sind Raum und Zeit keine „Dinge an sich“, die der Wahrnehmung zugänglich sind. Raum und Zeit sind nach KANT „Formen der Anschauung“, die „im Gemüte a priori (von vorneherein) bereitliegen“ müssen, um Erscheinungen wie etwa einen bewegten Körper als Bewegung wahrnehmen zu können. Durch die Anschauung des bewegten Körpers in Raum und Zeit wird dem physikalischen Denken im Bereich der Mechanik ein Gegenstand gegeben.

„Der **Raum** ordnet alles Gegebene **nebeneinander**.“ (KANT)



Körper K1 liegt **neben** Punkt P1 im Raum.

„Die **Zeit** ordnet alles Gegebene **nacheinander**.“ (KANT)



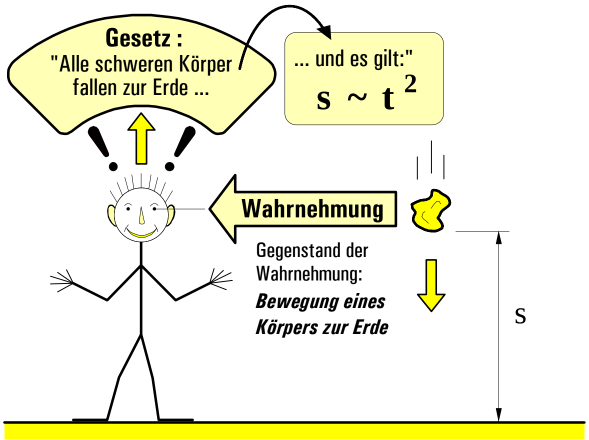
Körper K1 liegt **erst** am Ort P1, **dann** am Ort P2.

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name: PHY-3.DOC - 15.09.04

Arbeitsblatt Nr. **3** : **Wie entsteht eine physikalische Theorie?** – Modelle zum Erkenntnisprozeß

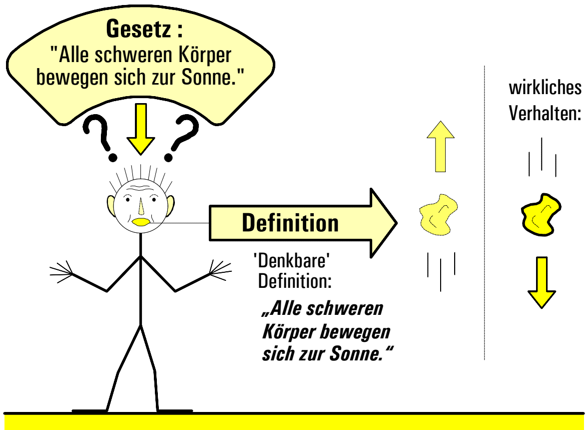
1. Können allgemeingültige physikalische Theorien und Gesetze aus **Wahrnehmungen** gewonnen werden?
(Erkenntnismodell des naiven *Empirismus*)

- **Problem**:
  Ein und derselbe Gegenstand kann von *verschiedenen* Menschen ganz *unterschiedlich* wahrgenommen werden (wie z.B. Zeiten, Längen, Bewegungen).
- **Folgerung**:
  Physikalische Gesetze können aus Wahrnehmungen allein nicht gewonnen werden. Denn: „**Wahrnehmungen ohne Begriffe sind blind.**“ (IMMANUEL KANT)



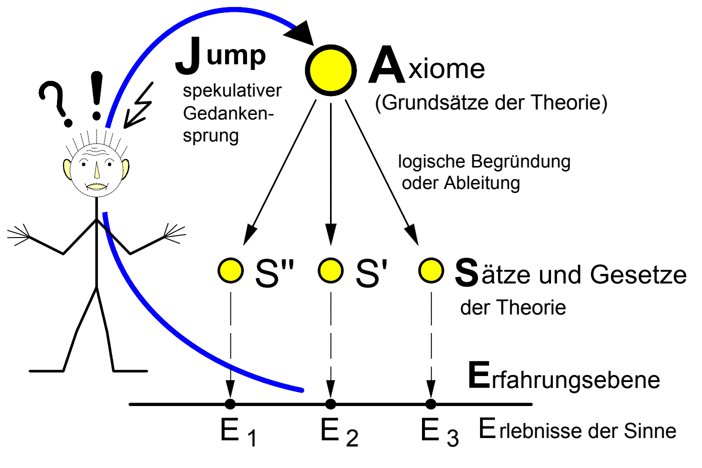
2. Können physikalische Theorien und Gesetze aus reiner **Verstandestätigkeit**, also etwa durch Definitionen wie in der Mathematik, gewonnen werden?
(Erkenntnismodell des naiven *Idealismus*)

- **Problem**: Definitionen können *willkürlich* sein und insofern etwas anderes angeben, als die Gegenstände sich *wirklich* verhalten (wie z.B. in der Abbildung rechts).
- **Folgerung**: Physikalische Gesetze können durch reine Verstandestätigkeit allein nicht gewonnen werden. Denn: „**Begriffe ohne Wahrnehmungen sind leer.**“ (IMMANUEL KANT)



3. Das **E–J–A–S–E**–Modell physikalischer Theorienbildung von **ALBERT EINSTEIN**

EINSTEIN erläutert sein Modell 1952 in einem Brief an seinen Freund Maurice Solovine: „**1.** Die **E** (Erlebnisse der Sinne) sind uns gegeben. ... **2. A** sind die **A**xiome (Grundsätze), aus denen wir Folgerungen ziehen. Psychologisch beruhen die **A** auf **E**. Es gibt aber *keinen* logischen Weg von den **E** zu **A**, sondern nur einen intuitiven Zusammenhang, der immer auf Widerruf ist.“ Dieser Weg zu den Axiomen ist für EINSTEIN ein "**Jump**", ein häufig „wildspekulativer“ Gedankensprung. „**3.** Aus **A** werden auf logischem Weg Einzel-Aussagen **S** abgeleitet, welche den Anspruch auf Richtigkeit erheben können. ... **4.** Die **S** werden mit den **E** in Beziehung gebracht (Prüfung an der Erfahrung). Diese Beziehungen sind nicht logischer Natur“.



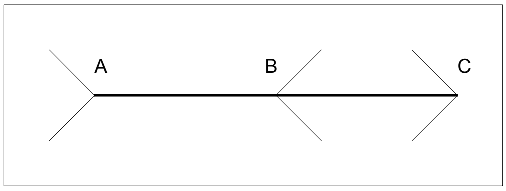
- **Fazit** zum Verhältnis von **Wahrnehmung** und **Denken** bei der **Entstehung** einer **physikalischen Theorie**

Die **Gegenstände** der physikalischen Theorien (wie z.B. die Körperbewegungen) werden den Menschen durch **Wahrnehmungen** vermittelt. Diese Gegenstände sind keine unmittelbaren Naturgegenstände, sondern werden nach einem bestimmten Plan, den sich die Menschen zuvor aus**denken**, systematisch im naturwissenschaftlichen **Experiment** "produziert" (z.B. die Fallrinne von Galilei). Über die so gewonnenen Gegenstände muß dann **nachgedacht** werden. In dieses Nach**denken** können die historisch jeweils vorhandenen, von den Menschen bis dahin schon angeeigneten Erkenntnisse als theoretische Voraussetzung eingehen. So setzt z.B. die Theorie der Elektrodynamik eine entwickelte mechanische Theorie voraus. Das Ergebnis dieses Nachdenkens sind die **allgemeingültigen Gesetze** der Physik. In diesen Gesetzen erscheinen die Wahrnehmungen einzelner Menschen als **objektiv**, d.h. als unabhängig von den einzelnen Subjekten. Damit sind sie für alle Menschen gleichermaßen gültig. Nach IMMANUEL KANT gehören „zur **Erkenntnis** zwei Stücke: erstlich der **Begriff**, dadurch überhaupt ein Gegenstand gedacht wird, und zweitens die **Anschauung**, dadurch er gegeben wird.“ Weiter heißt es bei KANT: „Alle unsere Erkenntnis hebt von den **Sinnen** an, geht von da zum **Verstande** und endigt bei der **Vernunft**.“ Und: „**Vernunft** ist das Vermögen, von dem Allgemeinen das Besondere abzuleiten und dieses letztere also nach Prinzipien und als notwendig vorzustellen.“

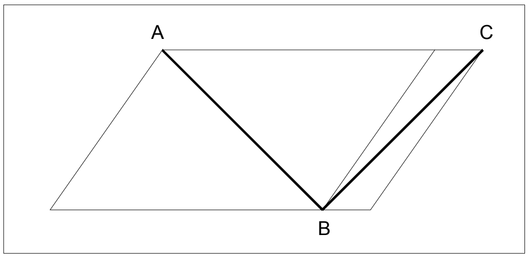
Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name: PHY-3A.DOC - 02.09.01
Arbeitsblatt Nr. **3 a)** : **Optische Sinnestäuschungen**	

1. Braut oder Schwiegermutter? (nach E.G.Boring, 1930)

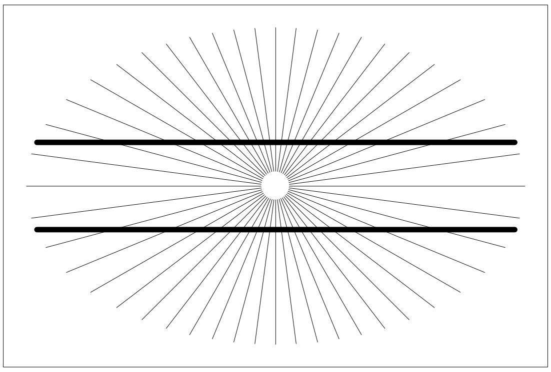
2. Pfeiltäuschung (nach Müller-Lyer)

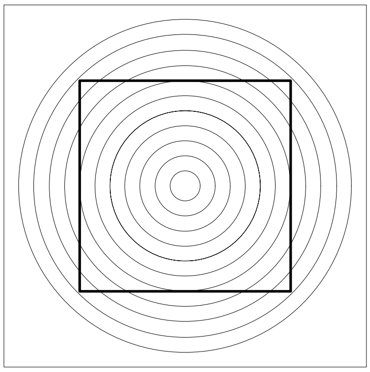


3. Parallelogrammtäuschung (nach Sander)

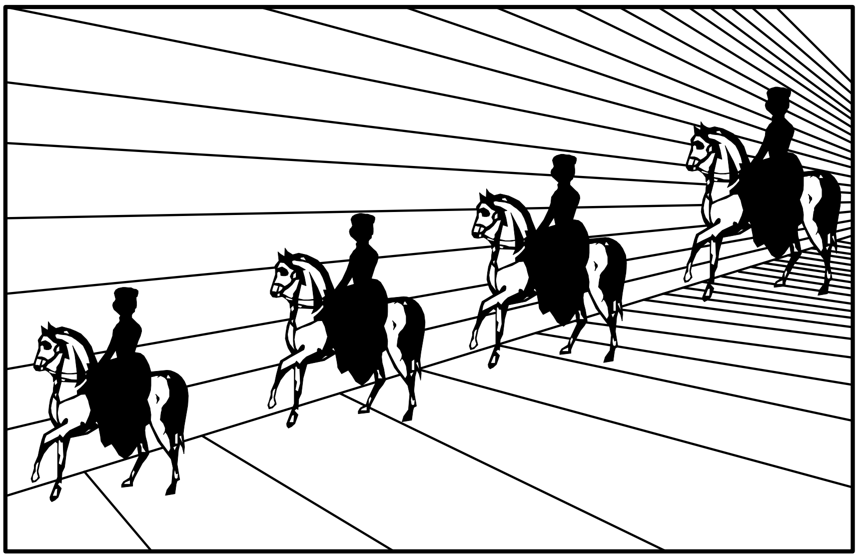


4. Paralleltäuschungen (nach Hering)





5. Welche der vier Reiterinnen ist die größte?



- Betrachter **A** behauptet:

  "Die **rechte** Reiterin ist die **größte** von allen !"

- Betrachter **B** behauptet:

  "Die **zweite** Reiterin von rechts ist die **größte** von allen !"

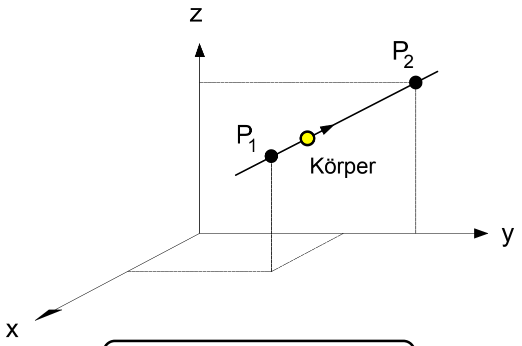
- Betrachter **C** behauptet:

  "Alle vier Reiterinnen sind **gleich groß** !"

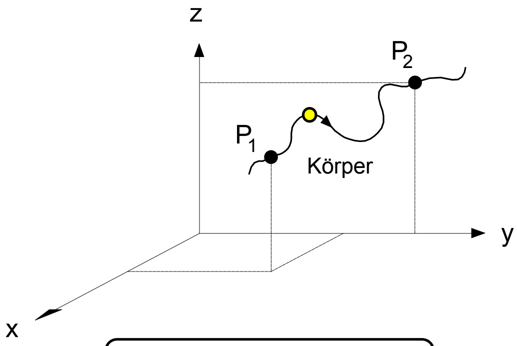
Aufgabe: Beantworten Sie schriftlich so präzise wie möglich die folgende Frage:
Unter welcher **Voraussetzung** läßt sich ein **objektives Urteil** darüber fällen, welche der Aussagen über die wahrgenommen Gegenstände **wahr** und welche **falsch** sind ?

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name:	PHY-4-1.DOC - 04.09.01
Arbeitsblatt Nr. **4** :	Zum **Begriff** des **Weges** in der Physik	Seite **1**

1. **Bewegung** als Ortsveränderung eines Körpers **entlang verschiedener Bahnen**



Geradlinige Bewegung
(Bahn: gerade Linie)



Krummlinige Bewegung
(Bahn: krumme Linie)

2. Was ist ein **Weg** ?

- Ein **Weg** ist die **Entfernung** zweier Raumpunkte **entlang der Bahnkurve**, auf der sich der Körper **bewegt**.

► Wege können sich unterscheiden durch ihre **Länge**. Zur Angabe des Weges muß daher seine **Länge** bestimmt werden.

► **Angabe** eines Weges (Beispiel) : **s** **= 3 m =** **3** · **1 m**

B B B

Formelzeichen (**s**patium, lat. : der Weg) **Maßzahl** **Maßeinheit**

Um eine solche Wegangabe machen zu können, muß seine Länge **gemessen** werden.

- Ein **Weg** wird **gemessen**, indem man **abzählt**, wie oft die bekannte Länge der **Maßeinheit** "**1 Meter**" in der (zunächst unbekannten) Länge des Weges enthalten ist.

► Oder allgemeiner : **Messen** bedeutet, eine unbekannte physikalische Größe mit einer bekannten, vorher festgelegten Maßeinheit zu vergleichen. Übrigens: Das Wort »*Meter*« kommt von ***metiri*** (lat.): messen.

3. Das **"Meter"** als Maßeinheit der Länge

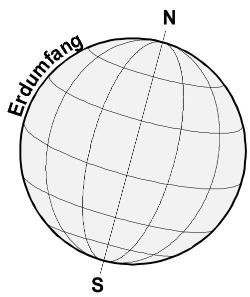
► **Forderungen** an ein **objektives Längenmaß**

Die **Länge** , die als **Maßeinheit** für Längenmessungen dienen soll, muß

a) **unabhängig** von einzelnen **Subjekten** sein ,

b) in der **Natur verankert** und **jederzeit verfügbar** sein, um sie jederzeit wieder reproduzieren zu können und schließlich sollte sie

c) möglichst **konstant** sein, d.h. sie sollte sich im Laufe der Zeit nicht verändern.



► Festlegung der Maßeinheit " **1 Meter** " aus dem Jahre 1795 :

- Die Länge der Maßeinheit **"1 Meter" ist der 40millionste Teil der Länge des Erdumfangs**.

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name:	PHY-4-2F.DOC - 27.11.05
Arbeitsblatt Nr. **4** :	**Zum Begriff des W e g e s in der Physik**	Seite **2**

1. Berechnung des Erdumfangs nach ERATOSTHENES (etwa 230 v.Chr.)

Von Pythagoras wird berichtet, er sei der Ansicht gewesen, in der Mitte der Welt schwebe die Erde, »die kugelförmige Gestalt habe und rundum bewohnt sei« . Einen exakten Beweis für die Kugelgestalt der Erde lieferte Aristoteles 200 Jahre später. Ihm war aufgefallen, daß der Schatten der Erde bei Mondfinsternissen immer kreisförmig ist, was nur möglich ist, wenn die Erde kugelförmige Gestalt hat. Die erste Messung des Erdumfangs gelang aber erst 150 Jahre später dem Griechen Eratosthenes. Seine Überlegung war denkbar einfach und hat –etwas abgewandelt– heute noch Gültigkeit (siehe **Bild 1**).

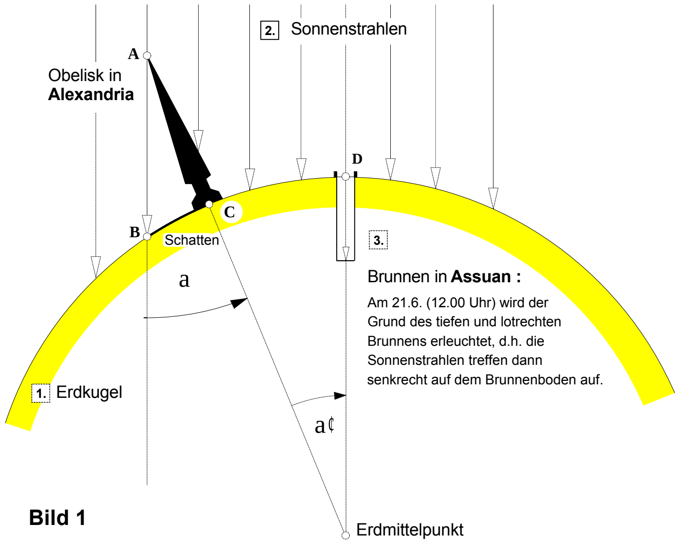


Bild 1

Eratosthenes wußte, daß die Sonne am 21. Juni mittags um 12.00 Uhr über Assuan genau im Zenit steht, da dort der Grund eines tiefen lotrechten Brunnenschachtes von den Sonnenstrahlen voll ausgeleuchtet wurde. Zur selben Zeit warf ein Obelisk im nördlich von Assuan gelegenen Alexandrien einen Schatten. Dessen Länge BC (nach heutigem Maß ca. 1,97 m) und die Höhe AC des Obelisken (ca. 15 m) hat Eratosthenes gemessen. Damit ließ sich zugleich auch der Winkel a bestimmen. Weil nun die Sonne sehr weit entfernt ist, können die Sonnenstrahlen als fast parallel angenommen werden. Daher müssen auch die Winkel a und a**'** gleich sein, denn Wechselwinkel an Parallelen sind bekanntlich gleich groß. Darüber hinaus war Eratosthenes die Entfernung zwischen Assuan und Alexandria (ca. 842 km) bekannt. Aus diesen Angaben konnte er den Erdumfang **U** wie folgt berechnen:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1{,}97\ \text{m}}{15\ \text{m}} = 0{,}1313 \quad\Rightarrow\quad \underline{\alpha = 7{,}48^\circ} \quad\Rightarrow\quad U = \overline{CD}\cdot\frac{360^\circ}{\alpha} = 842\ \text{km}\cdot\frac{360^\circ}{7{,}48^\circ} \Rightarrow \underline{\underline{U = 40524\ \text{km}}}$$

Vgl. Resnikoff/Wells: Mathematik im Wandel der Kulturen, Braunschweig 1983, S.81 f.

2. Festlegungen der Längenmaßeinheit "1 Meter"

a) Die Entwicklung zur **Erdmeridian-Definition** (1795) und **Meter-Prototyp-Definition** (=Urmeter, 1889)

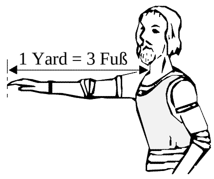


Bild 2

So wird berichtet, daß König Heinrich I. von *England* um das Jahr 1101 die Elle (yard) als die Länge seines eigenen Armes von der Körpermitte bis zur Spitze des Mittelfingers festgelegt hat (**Bild 2**). König David I. von *Schottland* ordnete um 1150 an, daß die Längeneinheit Zoll (inch) gleich der durchschnittlichen Daumendicke dreier Männer, und zwar eines großen eines mittelgroßen und eines kleinen Mannes, sein sollte und daß die Daumen an der Nagelwurzel zu messen seien. In anderen Ländern und zu anderen Zeiten wurden wieder andere Festlegungen getroffen; die Folge davon war, daß bis in die zweite Hälfte des vergangenen Jahrhunderts hinein auf dem Gebiet der Längenmessung eine chaotische Buntheit herrschte. So gab es neben anderen Längenmaßen in Deutschland über 100 verschiedene Längeneinheiten mit der Bezeichnung "Fuß". Mit dem im Laufe der Zeit sich ausweitenden Handel und Verkehr ergab sich die Notwendigkeit der Einführung einheitlicher Maße; gleichzeitig verlangte die aufkommende Naturforschung und Technik eine größere Genauigkeit bei der Festlegung der Längeneinheit, als dies z. B. durch die Länge des Armes eines Menschen oder die durchschnittliche Daumendicke dreier Menschen möglich ist. So einigten sich im Jahre 1875 in Paris 19 Staaten, als Längeneinheit das Meter einzuführen. Das **Meter war schon 1795 festgelegt worden und sollte der 40millionste Teil eines Erdmeridians** sein. Es war hierzu eine möglichst genaue Messung der Länge eines Erdmeridians vorgenommen worden; eine spätere Wiederholung der Messung ergab aber, daß die erste Bestimmung zu klein ausgefallen war, so daß das auf Grund der ersten Messung festgelegte Meter nicht genau der 40millionste Teil Erdmeridians ist. Man hat aber nach der ersten Messung einen Maßstab aus Platin-Iridium hergestellt, der die in **Bild 3** wiedergegebene Gestalt hat und als internationaler Meterprototyp oder kurz als **Urmeter** bezeichnet wird. Er wird in der Nähe von Paris aufbewahrt. Auf der Mittelfläche des Stabes sind an jedem Ende drei feine Striche eingraviert, wobei der Abstand der beiden mittleren Striche die Länge des Meters darstellt. Die so festgelegte Einheit ist die Grundlage der Längenmessung. Alle bedeutenden Kulturstaaten haben Nachbildungen des Meterprototyps erhalten und benutzen sie zur Eichung weiterer Kopien, bis man auf diese Weise schließlich die im Handel befindlichen Maßstäbe erhält.

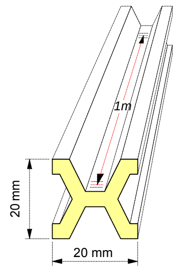


Bild 3: Urmeter

(aus: Höfling, Lehrbuch der Physik, Bonn1961, S.21. – Übrigens: Das Wort »*Meter*« kommt von ***metiri*** (lat.): messen.)

b) Die **Wellenlängen-Definition** (1960)

Die meßtechnische Entwicklung führte zu einer Änderung der Meterdefinition durch die 11. Generalkonferenz im Jahre 1960 mit der Formulierung:

»*Das **Meter** ist gleich der Länge von 1 650 763,73 Vakuum-Wellenlängen der Strahlung, die dem Übergang zwischen den Zuständen $2p_{10}$ und $5d_5$ des Atoms Krypton 86 entspricht*«. (Krypton 86 bedeutet ^{86}Kr.)

Die Energiezustände eines (ungestörten, ruhenden) Atoms sind unveränderliche Größen, ebenso Energie der Lichtquanten oder Frequenz und Wellenlänge der Welle, die dem Übergang zuzuordnen sind. Es handelt sich um individuelle Naturkonstanten.

c) Die **Lichtlaufzeit - Definition** (1983)

Wiederum den erweiterten meßtechnischen Möglichkeiten folgend erhielt die Längeneinheit Meter nach nur 23 Jahren im Oktober 1983 zum zweiten Mal eine neue Definition durch die 17. Generalkonferenz: *»Das **Meter** ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum* während der *Dauer* von *1 ▯ 299 792 458 Sekunden durchläuft«.*

Mit der neuen Definition des Meters wird zugleich der Wert der Lichtgeschwindigkeit auf 299 792 458 m/s festgelegt. Die Lichtgeschwindigkeit ist in der Physik als universelle Naturkonstante von großer Bedeutung. Sie kommt in Beziehungen allgemeiner Art vor und gilt als eine unveränderliche Größe.

Kurs: **PRINZIPIEN der MECHANIK**

Name :

Arbeitsblatt Nr. **5** : Zur **Objektivierung** des **Z e i t begriffs**

1. **Z w e i periodische Naturvorgänge**, an denen man »sehen« kann, wie »die Zeit vergeht«

Historischer Ausgangspunkt der Entwicklung eines objektiven Zeitbegriffs: **Die Kalendermacherei**

Beginn der Kalendermacherei:
In Babylon ca. 5000 v.Chr. und in Ägypten ca. 3100 v.Chr.
Vgl. Rauter, E.A., Vom Faustkeil zur Fabrik, S. 43 f.

Wahrnehmung

Wahrnehmung

Denken

1. Periodische *Erscheinung* in der Natur:
regelmäßige Wiederkehr von
Tag und Nacht

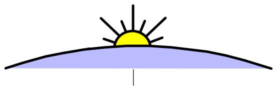
- angenommene periodische Bewegung:
Scheinbare (tägliche) Bewegung der Sonne um die Erde (Ursache aus heutiger Sicht: tägliche Drehung der Erde um ihre eigene Achse, die sog. "Rotation")

Vergleich
(Zählen)

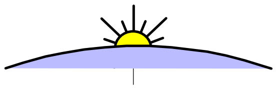
2. Periodische *Erscheinung* in der Natur:
regelmäßige Wiederkehr von
Sommer und Winter

- angenommene periodische Bewegung:
Scheinbare (jährliche) Bewegung der Sonne durch den Fixsternhimmel (Ursache aus heutiger Sicht: jährliche Drehung der Erde um die Sonne, die sog. "Revolution")

Denken



Sonnenaufgang (z.B. am Mittwoch, dem 1.5. ... 95)



nächster Sonnenaufgang (am Donnerstag, dem 1.6. ... 95)

t_1 — **Tag – Nacht – Periode** → t_2

- **Begriff des Jahres**:

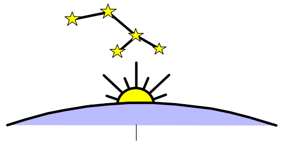
Das »Jahr« ist die Anzahl der Tag-Nacht-Perioden in einer Sommer-Winter-Periode

(Erst nach dieser Definition des Jahresbegriffs war es möglich, zur Messung der Zeit überzugehen.)

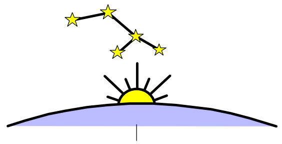
- **Messung** (Vergleich):

1 Jahr beinhaltet ca. 365 Tage

(So ging man z.B. bereits 3100 v.Chr. in Ägypten von einem 365-tägigen Sonnenjahr mit 12 Monaten aus.)



Sonnenuntergang im Sternbild z.B. des Wassermann im März ... 95



nächster Sonnenuntergang im Sternbild des Wassermann im März ... 96

t_1 — **Sommer – Winter – Periode** → t_2

Die Zeitdauer »**1 Tag**« ist die **Zeit bis zur Wiederkehr des nächsten Sonnenaufganges**.

(später hieß es: »1 Tag« ist die Zeit bis zur Wiederkehr des nächsten **Höchststandes der Sonne**.)

Die Zeitdauer »**1 Jahr**« ist die **Zeit bis zur Wiederkehr eines bestimmten Sternbildes über der Untergangsstelle der Sonne**.

2. Bestimmung der **Zeitdauer** einer **Tag-Nacht-Periode** als **Sonnentag**

Schon im frühen Altertum wurde die Zeitdauer einer **Tag-Nacht-Periode** definiert als **die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen** (Höchstständen) **der Sonne**. Zur Bestimmung der Kulminationspunkte und damit der zeitlichen Grenzen eines solchen "Sonnentages" dienten zunächst Schattenstäbe (siehe Abb. **1**) und später dann sog. Klinometer (siehe Abb. **2**). Die Verwendung der ebenfalls auf der Schattenbildung der Sonne beruhenden Sonnenuhren ermöglichte schließlich eine Unterteilung der Zeiteinheit "ein Sonnentag" in kleinere Zeiteinheiten in der Größenordnung von Stunden (siehe Abb. **3**). Diese Zeiteinteilung mit Hilfe von Sonnenuhren basiert bekanntlich auf den unterschiedlichen Stundenstellungen der Sonne auf ihren scheinbaren täglichen Bahnen ("Tagbögen") von Osten nach Westen durch das Himmelsgewölbe (siehe Abb. **4**).

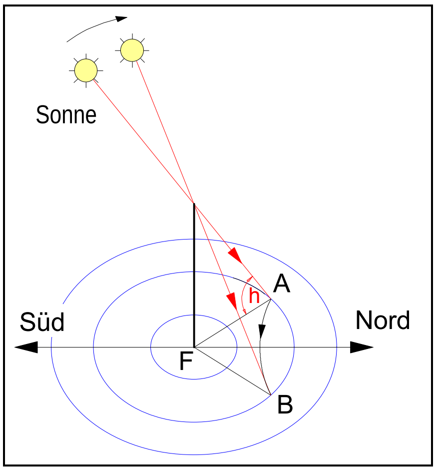


Abb. **1** : **Schattenstab**

Der **Schattenstab** (Abb. **1**) ist das älteste astronomische Instrument. Mit ihm läßt sich nicht nur der Höchsstand (Kulminationspunkt) der Sonne, sondern auch der Sonnenhöhenwinkel **h** und die Nord-Süd-Richtung bestimmen. Wenn die Sonne am Mittag ihren höchsten Stand erreicht hat, wirft der Stab den kürzesten Schatten und fällt genau nach Norden. Zur Ermittlung des Sonnenhöchststandes werden um den Fußpunkt (F) des Stabes mehrere Kreise gezogen. Man markiert die Punkte an denen das Schattenende am Vormittag (A) und am Nachmittag (B) die gleiche Kreislinie berührt. Die Halbierungslinie des Winkels AFB zeigt genau nach Norden und damit in Richtung des kürzesten Schattens. Die nächste Tag-Nacht-Periode beginnt danach immer dann, wenn der Schatten auf dieser Linie liegt. Der Sonnenhöhenwinkel **h**, der mittags seinen Höchstwert erreicht, kann entweder aus dem Verhältnis von Stablänge und Schattenlänge (tan **h** = Stablänge/Schattenlänge) bestimmt oder direkt mit einem Klinometer (Abb. **2**) gemessen werden.

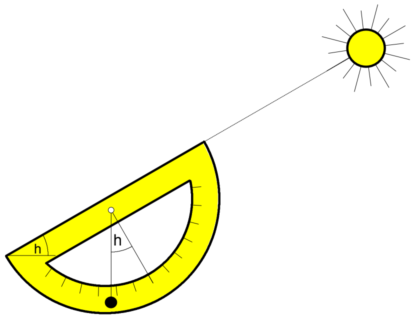
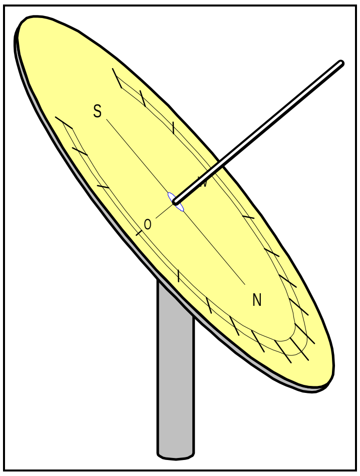
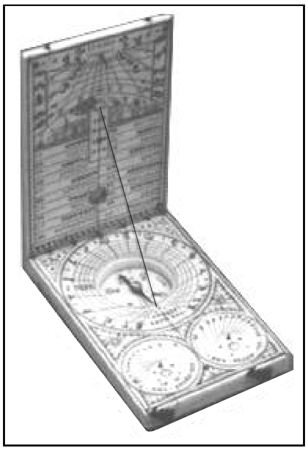


Abb. **2** : **Klinometer** zur Messung des Sonnenhöhenwinkels **h**



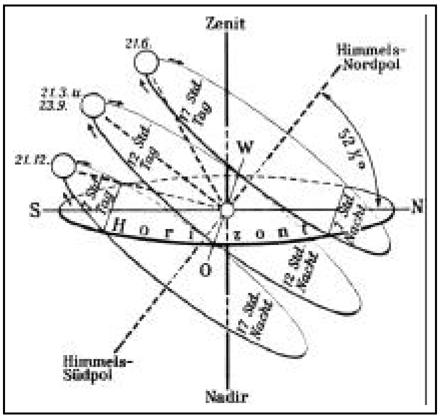
3 a): Sonnenuhr mit geneigtem Ziffernblatt



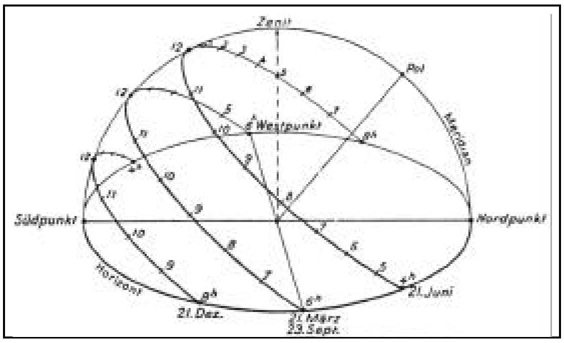
3 b): Zusammenklappbare Taschensonnenuhr

Abb. **3** : **Sonnenuhren**

Neigt man eine ebene Platte mit einem senkrecht auf ihr befestigten Stab so, daß der Stab zum Himmelsnordpol (Polarstern) weist, so hat sein Schatten an allen Tagen des Jahres zur gleichen Stunde dieselbe Richtung. Schreibt man an diese Richtungen die zugehörigen Stundenzahlen, so erhält man eine Sonnenuhr. Eine Sonnenuhr mit einem derart aufgestellten Ziffernblatt kann aber nur vom 21. März bis 23. September gebraucht werden, da sich nur in dieser Zeit die Sonne über dem Himmelsäquator befindet.



4 a) : Tag- und Nachtbögen der Sonne



4 b) : Tagbögen mit Stundenstellungen

Abb. **4** : **Scheinbare tägliche Sonnenbahnen in unseren Breiten**

③ Bestimmung des Jahres als Zeitdauer einer Sommer-Winter-Periode (Sonnenjahr)

a) Ältere Bestimmung mit Hilfe von Sternbildern

Bereits um 5000 v. Chr. hatte man im alten Babylon eine gewisse Übereinstimmung zwischen dem Wechsel der Jahreszeiten und der regelmäßigen Wiederkehr bestimmter Sternenbilder über der Untergangsstelle der Sonne festgestellt. Die Zeitdauer einer Sommer-Winter-Periode –also die Zeit, die wir als „Jahr" bezeichnen– ließ sich daher als Zeit zwischen dem Erscheinen bestimmter Sternenbilder definieren. So konnte z.B. festgelegt werden, daß die Zeit einer solchen Sommer-Winter-Periode beginnt, wenn die Sonne von der Erde aus betrachtet im Sternenbild des „Wassermannes" im Laufe eines Jahres untergeht, und endet, wenn sie das nächste Mal wieder in demselben Sternenbild, also wieder unter dem des „Wassermannes" untergeht (siehe Abb. 1). So ging man schon um 3100 v. Chr. in Ägypten von einem 365-tägiges Sonnenjahr mit 12 Monaten zu je 30 Tagen und 5 Zusatztagen aus.

Vgl. Hemenway, Priya: Der geheime Code, Köln 2008, S. 32

Vgl. Widmann, Walter: Astronomie leicht wie noch nie, Stuttgart 1951, S. 23

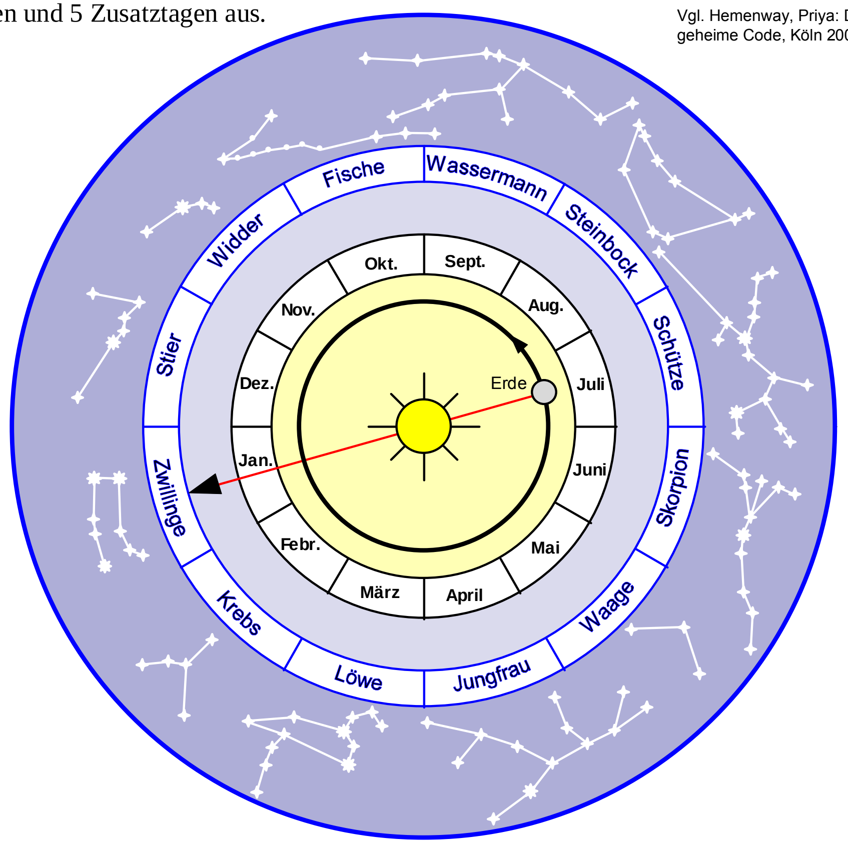


Abb. 1: Von der Erde aus gesehen steht die Sonne z.B. im Juli vor dem Sternbild der Zwillinge, sie steht wie man sagt „in den Zwillingen". In welchen Sternbildern sie in anderen Monaten steht, kann man leicht aus der Abbildung entnehmen, indem man für den jeweiligen Monat einen Sehstrahl einzeichnet.

b) Moderne Bestimmung mit Hilfe von Ekliptik und Himmelsäquator

Eine Sommer-Winter-Periode beginnt mit einem Durchgang der Sonne durch den „Frühlingspunkt" und endet mit dem darauffolgenden Sonnendurchgang durch den „Frühlingspunkt". Der Frühlingspunkt ist einer der beiden Schnittpunkte der Ekliptik (= scheinbare Sonnenbahn durch den Fixsternhimmel von der Erde aus betrachtet) mit dem Himmelsäquator (= Kreislinie, die sich ergibt, wenn man sich vorstellt, daß der Erdäquator unter Beibehaltung seiner räumlichen Lage so lange vergrößert wird, bis er die Himmelskugel, die wir uns unendlich groß denken können, schneidet). Die 12 Bogenabschnitte der Ekliptik (auch „Tierkreis" genannt) werden durch die sog. „Tierkreiszeichen" gekennzeichnet.

Vgl. Bauer, Ludwig u.a.: Erde und Mensch, München 1958, S.17 und Reidt-Wolf, Die Elemente der Mathematik, Band4 Oberstufe, Paderborn 1961, S. 258 ff.

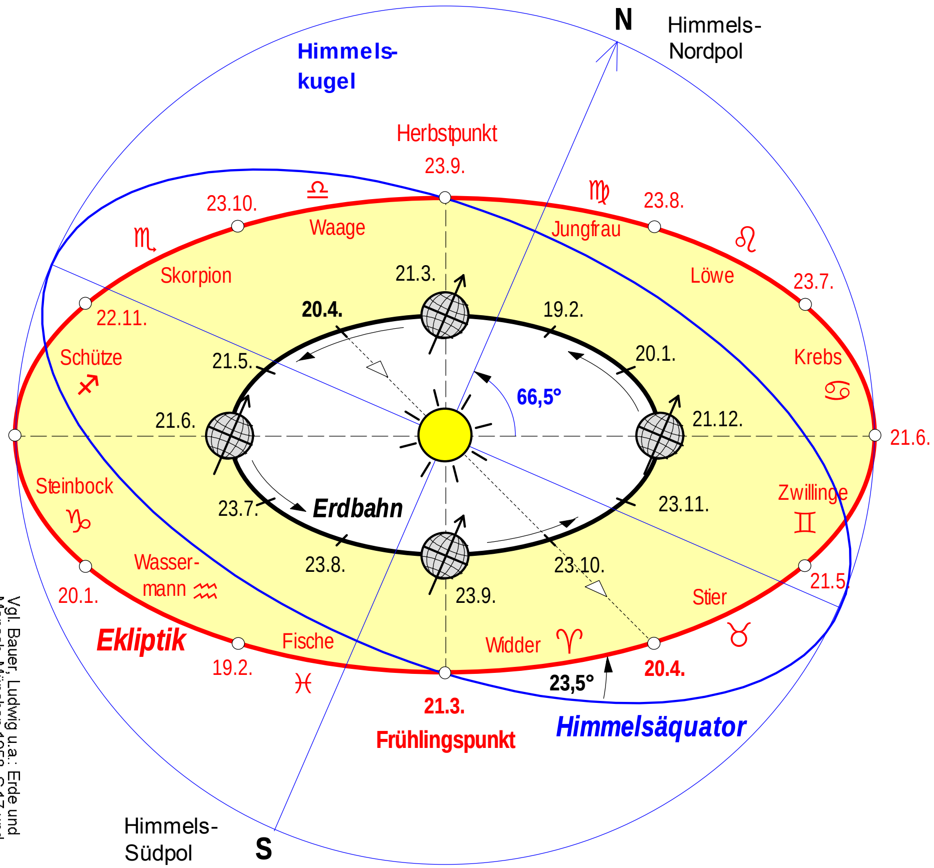
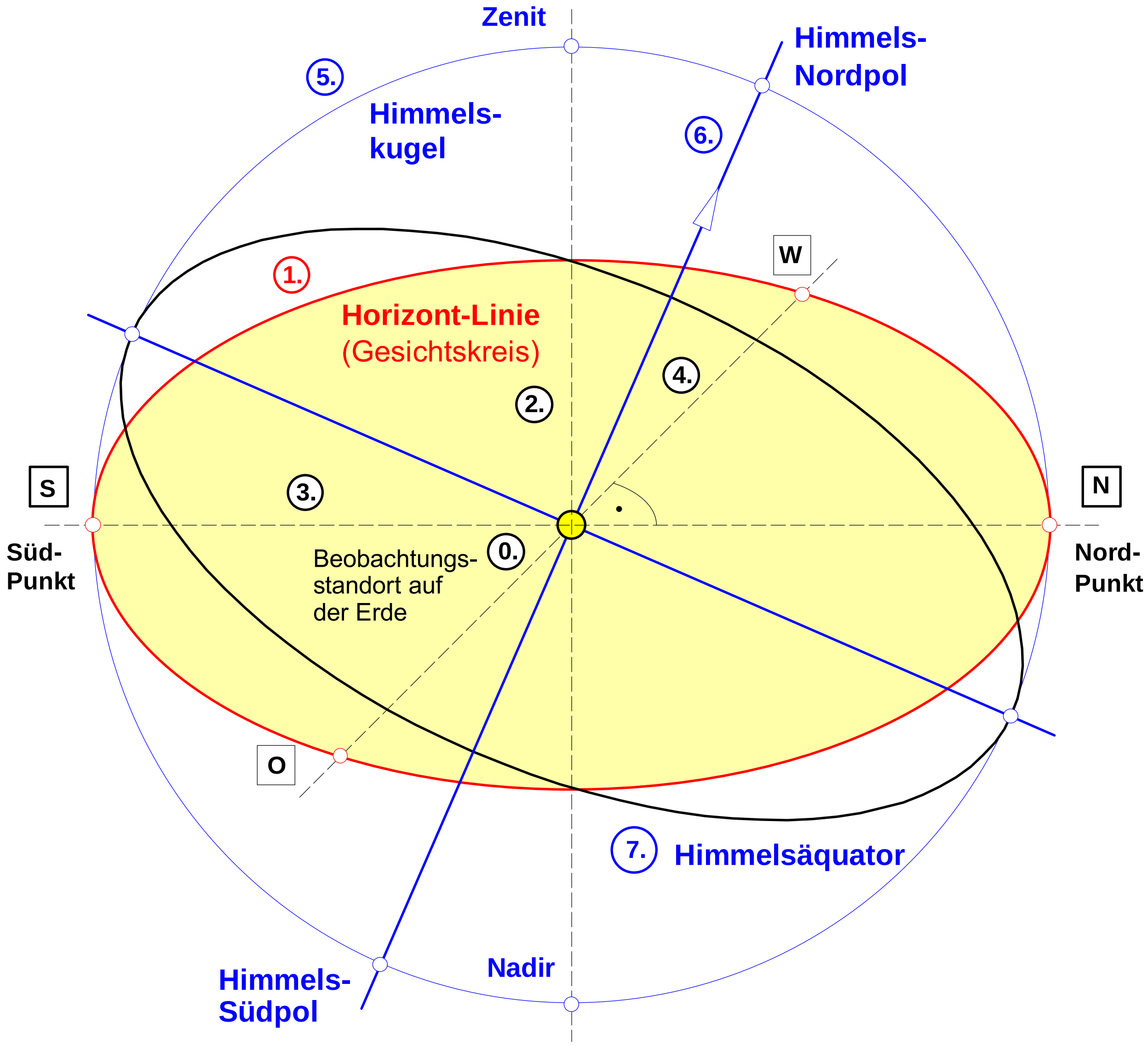


Abb. 2: Die Bewegung der Erde um die Sonne (Revolution) und die scheinbare Bewegung der Sonne auf der Ekliptik durch den Fixsternhimmel. Außerdem ist die Himmelskugel mit Himmelsäquator und Himmelspolen dargestellt.



1. **Beobachtungsstandort** auf der **Erde** (z.B. auf einem Schiff auf hoher See)
2. Man sieht den Horizont (Gesichtskreis) und kann die **Horizontlinie** konstruieren.
3. Mit einem Senklot läßt sich eine **Senkrechte** durch den **Standort** konstruieren.
4. Mit einer Wasserwaage und einer Kompassnadel läßt sich eine **Waagerechte** durch den **Standort** konstruieren. Die Schnittpunkte mit der Horizontlinie sind der **Süd-** und der **Nordpunkt**.
5. Senkrecht zur Süd-Nord-Linie läßt sich in der Horizontebene die Ost-West-Linie konstruieren.
6. Mit einem Kreisbogen um den Standort kann die **Himmelskugel** durch den Süd- und Nordpunkt konstruiert werden. Die Schnittpunkte mit der Senkrechten sind "Zenit" und "Nadir".
7. Die Verbindungslinie zwischen **Standort** und dem **Drehzentrum** der Kreisbahnen, auf denen während einer Nacht die Fixsterne scheinbar rotieren (in der Nähe des Polarsterns), ist die **Himmelsachse**. Deren Schnittpunkt mit der Himmelskugel sind der Himmels-Nord- und Südpol.
8. Die Kreislinie um die Fläche senkrecht zur Himmelsachse ist der **Himmelsäquator**.

Vgl.: Reidt-W olff : Die Elemente der Mathematik, Band 4 Oberstufe, Paderborn 1961 (6. Auf lage), S. 158 f f .

4. **Zeitmessung** und **Zeitmaß** (Maßeinheit der Zeit)

Was eignet sich – ähnlich wie der Meterstab bei der Längenrnessung – als Zeitmaßstab? Ein Vorgang, der immer wieder in der gleichen Weise abläuft, der also periodisch ist. Das einfachste Beispiel hierfür ist der Tag. Sind aber denn alle Tage wirklich exakt gleich lang? Zu einer Überprüfung kann man sich ein Gerät bauen, das, wie z.B. ein *Pendel*, offensichtlich periodisch arbeitet, und sein Zeitmaß mit der des Tages vergleichen. Damit ist jedoch noch nicht bewiesen daß Tage oder Pendelschwingungen tatsächlich periodisch sind. Eine unbekannte Kraft könnte beispielsweise das Pendel jeden Sonntag unmerklich beschleunigen, so daß es unserer Aufmerksamkeit entginge, wenn Sonntage tatsächlich kürzer als Werktage wären. Um nachzuprüfen, ob ein Vorgang wirklich periodisch ist, müßten wir einen konstanten Zeitmaßstab haben und ihn wie einen Meterstab zu verschiedenen Zeitpunkten anlegen, um so die Abstände zwischen den einzelnen Zeitmarkierungen (z.B. die Länge von Sonn- und Werktagen) festzustellen. Man kann aber nur nachweisen, daß die Dauer der vielen beobachtbaren periodischen Vorgänge sehr gut miteinander übereinstimmt und die Zeit durch einen von ihnen definieren. Wenden wir uns nunmehr der Zeitmessung mit Hilfe solcher periodischer Vorgänge zu.

Das wohl älteste Zeitmaß liefert die tägliche Bewegung der Sonne infolge der Drehung unserer Erde. Zur Anzeige des augenblicklichen Sonnenstandes verwendet man seit alters her die *Sonnenuhr*; als »Zeiger« dient der langsam wandernde Schatten eines dünnen Stabes. Den Tag unterteilte man in 24 gleiche Teile, in Stunden; diese wieder in Minuten und Sekunden (1 Tag = 86 400 Sekunden). Besser als die Sonnenuhr und die ebenfalls sehr alten Sand- und Wasseruhren eignet sich für Zeitmessungen das bereits erwähnte Pendel. Fügt man einen Mechanismus hinzu, der die Zahl der Pendelschwingungen zählt, also beispielsweise ein Zifferblatt mit Zeigern, so hat man schon das Prinzip der Standuhr. Pendelbewegungen liegen gewöhnlich im Bereich von Sekunden.

5. **Definitionen** der **Zeit–Maßeinheit "1 Sekunde"**

a) **Sonnentag**-Definition der Sekunde (1799)

Es wäre aber unzweckmäßig, die Zeiteinheit mit Hilfe einer Sanduhr oder eines schwingenden Pendels festzulegen, weil sich auf diese Weise je nach dem Bau der Sanduhr und der Beschaffenheit des Pendels verschiedene Zeiteinheiten ergeben würden. Man hat deshalb schon im Altertum eine andere sich regelmäßig wiederholende Bewegung zur Grundlage der Zeitmessung gemacht: die Drehung der Erde um ihre Achse (oder wie man im Altertum und im Mittelalter sagte: die Drehung der Sonne um die Erde).

Als natürliche Zeiteinheit ergibt sich auf diese Weise der Tag. Man kann mit Hilfe eines vertikal aufgestellten Stabes leicht feststellen, wann dieser den kürzesten Schatten wirft, d.h., wann die Sonne ihren höchsten Stand erreicht hat. Am nächsten Tag läßt sich dieser Augenblick auf die gleiche Weise ermitteln. Die verstrichene Zeit ist dann ein Tag. Diese uns von der Natur gelieferte Zeiteinheit hat aber den Mangel, daß die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Höchstständen der Sonne im Laufe des Jahres nicht den gleichen Wert hat. Man sah sich deshalb gezwungen, den mittleren Sonnentag einzuführen.

Unter einem mittleren Sonnentag versteht man das Jahresmittel für die Zeitspannen zwischen allen aufeinanderfolgenden Höchstständen der Sonne im Laufe eines Jahres.

Der mittlere Sonnentag hat lange Zeit als Grundlage für die Festlegung der Zeiteinheit gedient. Für die in der Physik meist verwendete Zeiteinheit "1 Sekunde" wurde 1799 erstmals die folgende Definition international vereinbart:

- **1 Sekunde** ist der **86 400**ste Teil eines mittleren **Sonnentages**.

b) **Jahres**-Definition der Sekunde (1967)

Aber auch der mittlere Sonnentag erwies sich bei einer genaueren Untersuchung der Erddrehung als veränderlich. Die Drehung der Erde um ihre Achse wird nämlich wegen der Ebbe und Flut ständig langsamer, so daß der mittlere Sonnentag ständig länger wird. Der Effekt ist für den einzelnen Tag äußerst gering; da sich die Verlängerungen aber ständig summieren, **ergibt sich für 100 Jahre eine Verlängerung des mittleren Sonnentages von insgesamt 9,1 s**. Wenn es sich also um große Zeitspannen handelt und man etwa die aus dem Altertum überlieferten Termine über Sonnenfinsternisse mit den gegenwärtigen Bewegungen von Sonne und Mond in Einklang bringen will, dann muß man die Zunahme der Tageslängen im Laufe der letzten 2000 Jahre berücksichtigen.

Obwohl die Veränderungen des mittleren Sonnentages so gering sind, daß sie für die Zeitmessung des Alltags keine Rolle spielen, bewirken sie trotzdem, daß der mittlere Sonnentag wegen der sehr hohen Genauigkeitsansprüche der Physik an die Zeitmessung nicht als Grundlage für die Festlegung der Zeiteinheit dienen kann. Man sah sich deshalb gezwungen, einen anderen in der Natur ablaufenden periodischen Vorgang zur Definition der Zeiteinheit heranzuziehen: den Umlauf der Erde um die Sonne im Laufe eines Jahres.

Unter einem Jahr versteht man die Zeitdauer eines Umlaufes der Erde um die Sonne.

Diese Umlaufzeit ist zwar auch nicht völlig konstant, aber sie verändert sich nur sehr langsam und recht gleichmäßig, wobei die Änderung **in 1000 Jahren rund 5,3 s** beträgt. Der Umlauf der Erde um die Sonne ist deshalb zur Definition eines gleichbleibenden Zeitmaßes besser geeignet als die Achsendrehung der Erde. Die auf dieser Grundlage 1967 festgelegte Definition der Zeiteinheit "1 Sekunde" lautet:

- **1 Sekunde** ist der **31 556 925,9747**ste Teil eines **Jahres**.

c) **Atomstrahlungs**-Definition der Sekunde (1967)

Für Messungen mit höchster Präzision wurde in dem Gesetz über die Einheiten im Meßwesen von 1967 noch eine weitere Sekunden-Definition festgelegt:

- **1 Sekunde** ist das 9 192 631 770 fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

6. Rechtliche Regelungen zum Zeitbegriff: **Das Zeit-Gesetz** der Bundesrepublik Deutschland

Vom 25. Juli 1978 (BGBl. I S. 1110)
zuletzt geändert durch Gesetz vom 13. September 1994
(BGBl. I S. 2322)

§ 1 Gesetzliche Zeit.

(1) Im amtlichen und geschäftlichen Verkehr werden Datum und Uhrzeit nach der gesetzlichen Zeit verwendet.

(2) Die gesetzliche Zeit ist die mitteleuropäische Zeit. Diese ist bestimmt durch die koordinierte Weltzeit unter Hinzufügung einer Stunde.

(3) Die koordinierte Weltzeit ist bestimmt durch eine Zeitskala mit folgenden Eigenschaften:

– Sie hat am 1. Januar 1972, 0 Uhr, dem Zeitpunkt 31. Dezember 1971, 23 Uhr 59 Minuten 59,96 Sekunden, der mittleren Sonnenzeit des Nullmeridians entsprochen.

– Das Skalenmaß ist die Basiseinheit Sekunde nach § 3 Abs. 4 des Gesetzes über Einheiten im Meßwesen vom 2. Juli 1969 (BGBl. I S. 709), zuletzt geändert durch Artikel 287 Nr. 48 des Gesetzes vom 2. März 1974 (BGBl. I S. 469), in Meereshöhe*.

– Die Zeitskala der koordinierten Weltzeit wird entweder durch Einfügen einer zusätzlichen Sekunde oder durch Auslassen einer Sekunde mit einer Abweichung von höchstens einer Sekunde in Übereinstimmung mit der mittleren Sonnenzeit des Nullmeridians gehalten.

(4) Für den Zeitraum ihrer Einführung ist die mitteleuropäische Sommerzeit die gesetzliche Zeit. Die mitteleuropäische Sommerzeit ist bestimmt durch die koordinierte Weltzeit unter Hinzufügung zweier Stunden.

§ 2 Darstellung und Verbreitung der gesetzlichen Zeit.

Die gesetzliche Zeit wird von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt dargestellt und verbreitet

§ 3 Ermächtigung zur Einführung der mitteleuropäischen Sommerzeit.

(1) Die Bundesregierung wird ermächtigt, zur besseren Ausnutzung der Tageshelligkeit und zur Angleichung der Zeitzählung an diejenige benachbarter Staaten durch Rechtsverordnung für einen Zeitraum zwischen dem 1. März und dem 31. Oktober die mitteleuropäische Sommerzeit einzuführen.

(2) Die mitteleuropäische Sommerzeit soll jeweils an einem Sonntag beginnen und enden. Die Bundesregierung bestimmt in der Rechtsverordnung nach Absatz 1 den Tag und die Uhrzeit, zu der die mitteleuropäische Sommerzeit beginnt und endet, sowie die Bezeichnung der am Ende der mitteleuropäischen Sommerzeit doppelt erscheinenden Stunde.

§ 4 Andere Vorschriften.

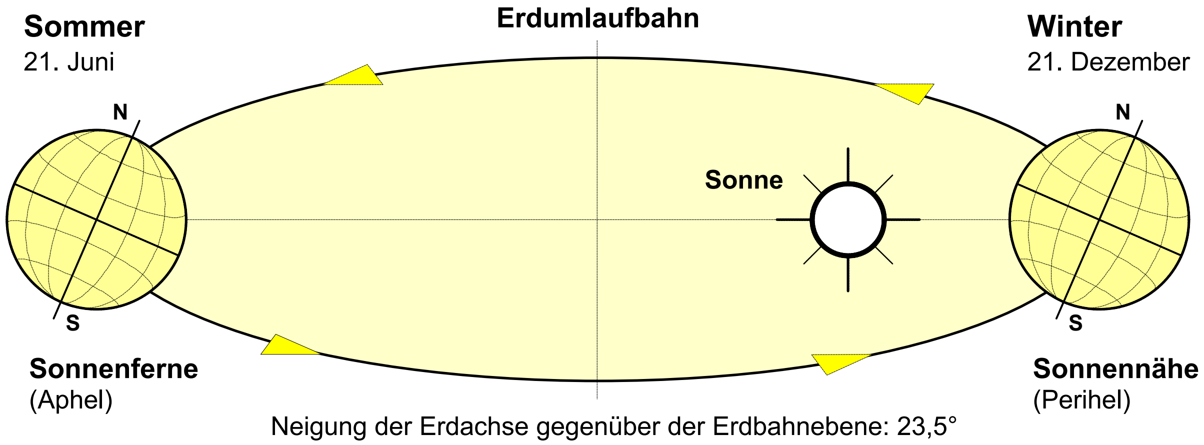
§ 9a der Luftverkehrs-Ordnung sowie Zeitregelungen, die sich aus der Anwendung internationaler Übereinkommen ergeben, bleiben unberührt.

§ 5 Inkrafttreten; Außerkraftreten anderer Vorschriften.

Dieses Gesetz tritt am Tage nach der Verkündung in Kraft. Gleichzeitig tritt das Gesetz betreffend die Einführung einer einheitlichen Zeitbestimmung in der im Bundesgesetzblatt Teil III, Gliederungsnummer 7141-1, veröffentlichten bereinigten Fassung außer Kraft.

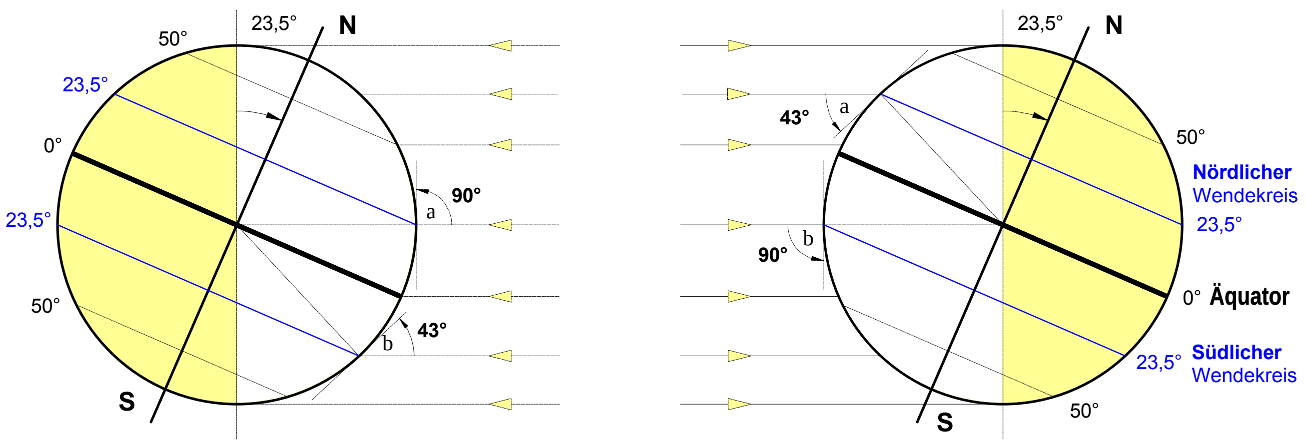
Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name: PHY-5A-F.DOC - 24.09.04
Arbeitsblatt Nr. **5 a)** : Ergänzung zur **Entstehung der Jahreszeiten**	

Zur Entstehung der warmen und kalten Jahreszeiten (Sommer-Winter-Periode)



Neigung der Erdachse gegenüber der Erdbahnebene: 23,5°

Sonneneinstrahlung



Nordhalbkugel:

Sommer

a **= 90°**

a Einfallswinkel der Sonnenstrahlen **am nördlichen Wendekreis**

b Einfallswinkel der Sonnenstrahlen **am südlichen Wendekreis**

Nordhalbkugel:

Winter

a **= 43°**

Nordhalbkugel im **Sommer**	**Nordhalbkugel** im **Winter**
• Die Sonnenstrahlen treffen auf der Nordhalbkugel im Sommer **steiler** auf der Erdoberfläche auf als im Winter (und als auf der Südhalbkugel). Der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen auf der Nordhalbkugel liegt je nach geographischer Breite zwischen **0°** (in der Nähe des Nordpols) und **90°** am nördlichen Wendekreis. • Die Dauer der täglichen Sonneneinstrahlung während einer Umdrehung der Erde um ihre eigene Achse ist im Sommer auf der Nordhalbkugel **länger** als im Winter (und als auf der Südhalbkugel).	• Die Sonnenstrahlen treffen auf der Nordhalbkugel im Winter **flacher** auf der Erdoberfläche auf als im Sommer (und als auf der Südhalbkugel). Der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen auf der Nordhalbkugel liegt je nach geographischer Breite zwischen **0°** (in der Nähe des Nordpols) und **43°** am nördlichen Wendekreis. • Die Dauer der täglichen Sonneneinstrahlung während einer Umdrehung der Erde um ihre eigene Achse ist im Winter auf der Nordhalbkugel **kürzer** als im Sommer (und als auf der Südhalbkugel).

Kurs: **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name: PHY-5B-F.DOC - 24.09.04

Arbeitsblatt Nr. **5 b)** : Mathematischer Exkurs zur **Proportionalität** und **Geradengleichung**

1. Zum **Begriff** der **mathematischen Funktion**

Wird jedem beliebigen Wert einer unabhängigen Veränderlichen (Variablen) **x** durch eine Vorschrift einer davon abhängigen Veränderlichen (Variablen) **y** ein bestimmter Wert zugeordnet, so heißt diese Zuordnung eine **Funktion**. Man sagt auch kurz "**y** *ist eine Funktion von* **x**" und schreibt in symbolischer Form: **y** = f(**x**).

2. **Formen** der **Darstellung** einer **Funktion** (Beispiel: lineare Funktion)

a) Darstellung in Form einer **Wertetabelle**

x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12

· 2 · 3 · 4

Als 1. Beispiel wurde in der nebenstehenden Wertetabelle eine Funktion angenommen, nach der sich die Variable **y** in Abhängigkeit von der unabhängigen Variablen **x** auf folgende Weise ändert:

Wird der **x**–Wert **verdoppelt**, so **verdoppelt** sich der **y**–Wert,

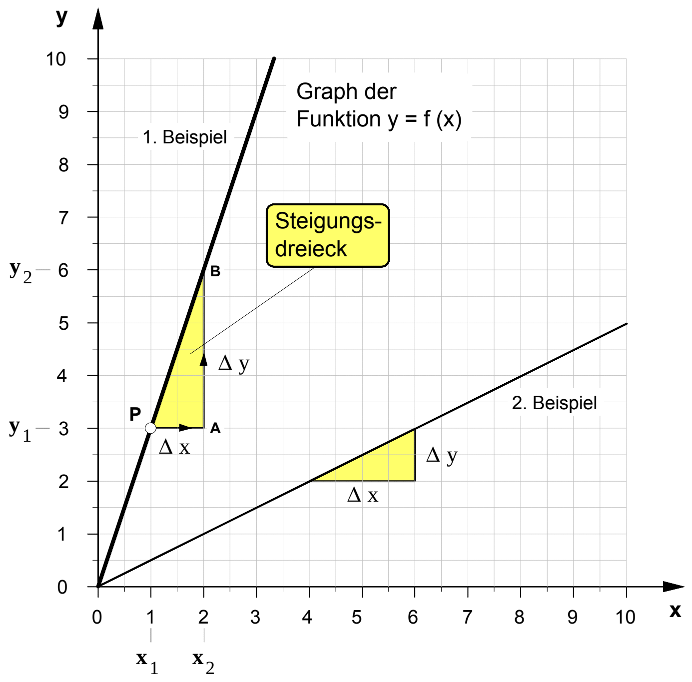
wird der **x**–Wert **verdreifacht**, so **verdreifacht** sich der **y**–Wert,

wird der **x**–Wert **vervierfacht**, so **vervierfacht** sich der **y**–Wert usw..

- Die **y**–Werte ändern sich demnach stets **in gleichem Maße** wie die **x**–Werte. Man sagt auch: *Die* ***y****–Werte sind* ***proportional*** *(verhältnisgleich) zu den* ***x****–Werten*. Als Formel stellen wir diese proportionale Abhängigkeit zwischen zwei Variablen wie folgt dar:

$$\boxed{y \sim x}$$

b) Darstellung der Funktion in Form eines **Graphen** im **x–y–Koordinatensystem**



- Für unsere beiden **Beispiele** ergeben sich folgende
  - ► Steigungsfaktoren

1. Beispiel: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad m = 3$

2. Beispiel: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = 0{,}5$

  - ► und damit folgende Funktionsgleichungen

1. Beispiel: $y = 3 \cdot x$

2. Beispiel: $y = 0{,}5 \cdot x$

c) Darstellung in Form einer **Funktionsgleichung**

- Der Graph der Funktion **y** = f(**x**) ist in unserem Beispiel eine **Gerade**, genauer: Eine Gerade die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht (Ursprungsgerade). Solche Geraden unterscheiden sich allein durch ihre **Steilheit** oder wie man auch sagt: durch ihre **Steigung**.
- Die Funktionsgleichung, mit der eine solche Gerade in algebraischer Form beschrieben wird, heißt **Geradengleichung**. Sie lautet im Fall der Ursprungsgeraden:

$$\boxed{y = m \cdot x}$$

- Der Faktor **m** ist eine **Konstante**. Sein Wert ist ein Maß für die Steilheit einer Geraden. Er wird daher als **Steigungsfaktor** oder kurz als **Steigung** bezeichnet. Seine Definition lautet:

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1 \\ \Delta x &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

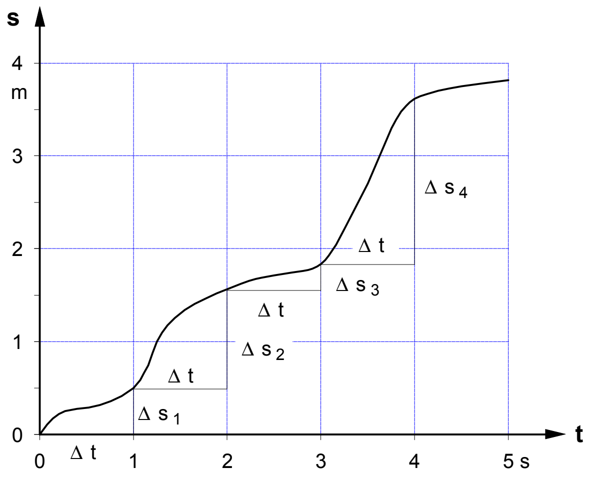
Graphisch wird der Steigungsfaktor **m** mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks, dem sog. **Steigungsdreieck**, ermittelt. Um das Steigungsdreieck zu zeichnen, geht man von einem beliebigen Punkt **P** auf der Geraden aus und zeichnet von da aus zunächst nach rechts die waagerechte Kathete mit einer frei wählbaren Länge Δ**x**. Von deren rechtem Endpunkt **A** aus zeichnet man eine senkrechte Linie bis diese die Gerade schneidet und bestimmt anschließend die durch den Schnittpunkt **B** begrenzte Länge Δ**y** der senkrechten Kathete. Der Wert des Steigungsfaktors **m** läßt sich dann mit Hilfe der obigen Definitionsformel berechnen.

Kurs: **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name: PHY-6-F.DOC - 30.08.01
Arbeitsblatt Nr. **6** : **Gleichförmige Bewegung** und **Geschwindigkeit**	

1. Die ungleichförmige Bewegung

Legt ein Körper während einer Ortsveränderung in der Zeit **t** in gleichen Zeitabschnitten Δ**t** stets **u n gleiche Wegabschnitte** Δ**s** zurück, so führt der Körper eine **ungleichförmige Bewegung** aus.

- **Weg-Zeit**-Diagramm einer ***ungleichförmigen*** Bewegung



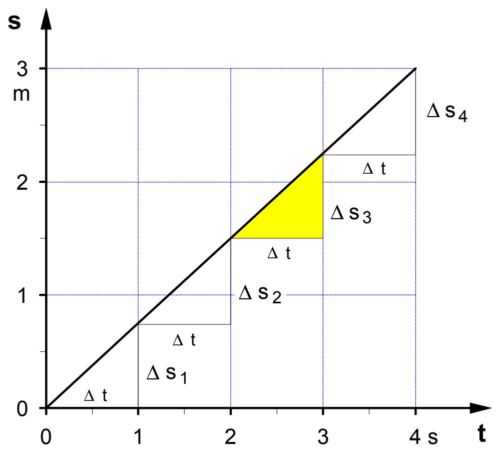
Das Weg-Zeit-Diagramm läßt unschwer erkennen, daß es sich bei der ungleichförmigen Bewegung um eine komplizierte Bewegungsform handelt, die jedoch den in der Natur und im Experiment wahrnehmbaren wirklichen Bewegungen entspricht. Dessen war sich Galileo **GALILEI** (1564-1642), der sich als erster um eine systematische Beschreibung von Bewegungsabläufen bemühte, bewußt. Gleichwohl ging er in seinen kinematischen Betrachtungen davon aus, daß "es durchaus gestattet" sei, "irgend eine Art der Bewegung beliebig zu ersinnen und die damit zusammenhängenden Ereignisse zu betrachten". Angesichts der Kompliziertheit der wirklichen Bewegungen definierte Galilei zunächst einen einfachen Sonderfall, nämlich den der "gleichförmigen" Bewegung. "Die gleichförmige Bewegung", heißt es bei Galilei, "müssen wir allem zuvor beschreiben."

Vgl.: G.Galilei, Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, Leiden 1638, Nachdruck: Darmstadt 1973, S.146 f. und S. 141

2. Sonderfall : Die gleichförmige Bewegung

Als ***gleichförmige*** **Bewegung** definierte GALILEI jene Form der Ortsveränderung, bei der ein Körper "in irgend welchen" **gleichen** Zeitabschnitten Δ**t** stets **gleiche W e g abschnitte** Δ**s** zurücklegt.

- **Weg-Zeit-Diagramm** einer ***gleichförmigen*** **Bewegung**



Aus der obigen Definition folgt, daß der Graph einer gleichförmigen Bewegung im **s-t**-Diagramm eine **Gerade** ist, d.h. es ist **s ~ t**. Analog zur Geradengleichung **y = m · x** in der Mathematik gilt damit folgende Funktionsgleichung:

$\mathbf{s = K \cdot t}$, wobei der Steigungsfaktor $K = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

- **definiert** ist als die "**Geschwindigkeit v**" , d.h.:

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

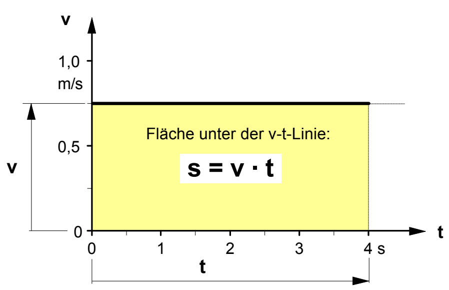
Maßeinheit der Geschwindigkeit **v** :

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{1\ m}{1\ s} = 1\ \frac{m}{s}$$

- Damit gilt für das **Weg-Zeit-Gesetz** der ***gleichförmigen*** Bewegung:

$$\boxed{s = v \cdot t}$$ wobei **v = konstant** ist.

- **Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm** der ***gleichförmigen*** **Bewegung**



Da die Geschwindigkeit **v** konstant ist, wird in dem **v-t-**Diagramm mit dem Produkt " **v · t** " der Inhalt der Rechteck**fläche** unter der **v-t-**Linie angegeben.

Demnach kann die **Fläche** unter der **v-t-**Linie als ein Maß für den **zurückgelegten Weg** gedeutet werden.

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name: PHY-7.DOC - 30.08.01

Arbeitsblatt Nr. **7** : **Übungsaufgaben** zur **gleichförmigen Bewegung**

1. Das bei einer Echo-Lotung am Meeresboden hervorgerufene Echo kehrt nach **1,4** s an den Aussendeort des Schallsignals zurück. Wie tief ist das Wasser an der Meßstelle, wenn die Schallgeschwindigkeit in Meerwasser **1475** m/s beträgt? (h = 1033m)

---

2. Die US-Raumsonde PIONIER II hatte im Dezember 1974 in Jupiternähe die Geschwindigkeit **171 000** km/h. Welche Zeit benötigte die Sonde damals, um eine Strecke von der Länge des Jupiterdurchmessers von $\mathbf{1{,}42} \cdot 10^8$ m zu durchfliegen? (t = 0,83h)

---

3. Die Entfernung zwischen Sonne und Erde beträgt $\mathbf{1{,}5} \cdot 10^8$ km, die Lichtgeschwindigkeit $\mathbf{3} \cdot 10^8$ m/s. Welche Zeit braucht das Licht von der Sonne bis zur Erde? (t = 500s)

---

4. Ein PKW hat eine 200 km lange Strecke zurückzulegen. Welche Zeit Δt spart er ein, wenn er nicht mit seiner sonst üblichen Durchschnittsgeschwindigkeit v_1 = **80** km/h, sondern mit v_2 = **90** km/h fährt? (Δt = 16 min 40s)

---

5. In bergigem Gelände kann ein Radfahrer, der morgens um **07.00** Uhr abgefahren ist, nur **12** km in der Stunde zurücklegen. Um **08.30** Uhr wird ihm ein zweiter Radfahrer, der jedoch dank seiner besseren Kondition **15** km in der Stunde zurücklegt, nachgeschickt. Um wieviel Uhr wird dieser den ersten einholen, wenn beide um **12.00** Uhr eine halbstündige Rast einlegen? Stellen Sie beide Bewegungen in **einem** Weg-Zeit-Diagramm dar. (Treffpunkt: 15.00 Uhr)

---

6. Ein Nahverkehrszug benötigt für die Fahrt von Altdorf bis zu dem 50 km entfernten Neustadt eine Fahrtzeit von 40 Minuten. Dort hat er einen Aufenthalt von 10 Minuten und fährt dann wieder zurück nach Altdorf. Wegen der größeren Streckensteigung braucht er für die Rückfahrt 50 Minuten.

Ein auf dem Parallelgleis zwischen **Altdorf** und **Neustadt** mit einer mittleren Geschwindigkeit von **100** km/h fahrender Schnellzug verläßt **40** Minuten nach dem Nahverkehrszug den Bahnhof von **Altdorf**. Der Schnellzug hat in **Neustadt** einen Aufenthalt von **5** Minuten und setzt dann seine Fahrt in gleicher Richtung mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von **120** km/h in Richtung **Mühlheim** fort.

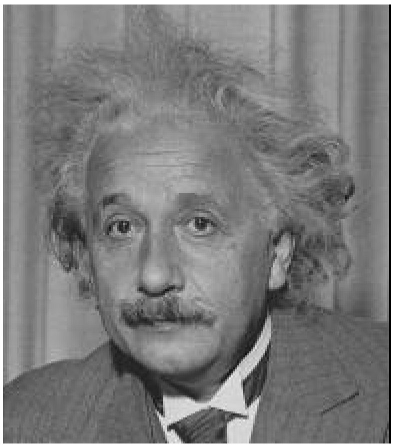
a) Stellen Sie die Bewegungen der beiden Züge in **einem** Weg-Zeit-Diagramm **und** in **einem** Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dar.

b) Nach welcher Zeit $\mathbf{t_X}$ und in welcher Entfernung $\mathbf{s_X}$ von **Altdorf** begegnen sich die beiden Züge? (t_X = 62,5 min ; s_X = 37,5 km)

c) Wann erreicht der Schnellzug seinen **50** km von Neustadt entfernten Zielbahnhof in Mühlheim? (nach t = 100 min)

d) Auf welchen Wert müßte der Schnellzug seine mittlere Geschwindigkeit ändern, wenn seine Abfahrtzeit in **Altdorf** um **10** Minuten vorverlegt würde und er zum gleichen Zeitpunkt in **Neustadt** eintreffen soll, in dem der Nahverkehrszug den Bahnhof in **Neustadt** verläßt **?** (v = 150 km/h)

Ergänzender Hinweis zu Arbeitsblatt Nr. **8**: **Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung**



Albert Einstein (1879 – 1955)

Galileo Galilei (1564– 1642)

Einstein zur Bedeutung des **Beschleunigungsbegriffs** von **Galilei**

»Man kann sich heute nicht mehr vorstellen, was für eine große Phantasieleistung in der klaren Bildung des Begriffs der **Beschleunigung** und in der Erkenntnis der physikalischen Bedeutung dieses Begriffs lag.«

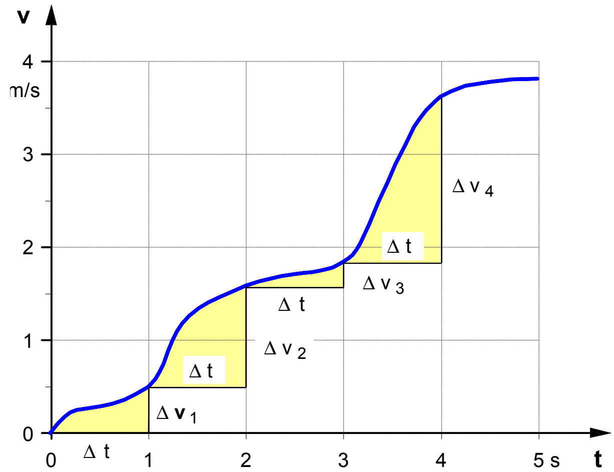
Quelle: Einstein, A., Galileo Galilei, Vorwort in: Galileo Galilei, Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme das ptolemäische und das koperkanische, Florenz 1632, Nachdruck hrsg. von Roman Sexl und Karl von Meyenn, Stuttgart 1982 (B.G. Teubner Verlag)

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name:	Phy-8-1f.Doc - 02.11.09
Arbeitsblatt Nr. **8** :	**Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung**	Seite **1**

1. Die ungleichförmige Beschleunigung

Nimmt die **Geschwindigkeit** eines Körpers in gleichen Zeitabschnitten **Δt** stets um ***ungleiche*** Beträge **Δv** zu, so führt der Körper eine ***ungleichförmig*** **beschleunigte Bewegung** aus.

- **Geschwindigkeit-Zeit-**Diagramm einer ***ungleichförmig*** beschleunigten Bewegung



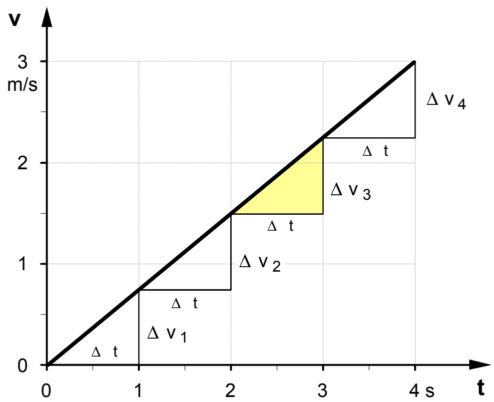
Bei der ***ungleichförmigen*** *Beschleunigung* handelt es sich um eine sehr komplizierte Bewegungsform. Auch wenn sie den in der Realität wahrnehmbaren Bewegungen häufig entspricht, wollen wir zur Darstellung der beschleunigten Bewegung in Anlehnung an Galilei zunächst einen einfachen ***Sonderfall*** *definieren*, nämlich den der ***gleichförmigen*** *Beschleunigung*. Galilei bezog sich dabei übrigens auf "Erscheinungen", wie sie "bei den *frei fallenden Körpern in der Natur* vorkommen." Er geht davon aus, "daß ein aus der Ruhelage herabfallender Stein nach und nach neue Zuwüchse an Geschwindigkeit erlangt", und wirft dann die Frage auf: "Warum soll ich nicht *glauben*, daß solche Zuwüchse an Geschwindigkeit in *allereinfachster, Jedermann plausibler Weise* zu Stande kommen?" Weiter heißt es dann bei Galilei: "Mit dem Geiste (!) erkennen wir diese Bewegung als einförmig und in gleichbleibender Weise stetig beschleunigt, da in irgend welchen gleichen Zeiten stets gleiche Geschwindigkeitszunahmen sich addieren."

Vgl.: G.Galilei, Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige (Discorsi), Leiden 1638, Nachdruck: Darmstadt 1973, S.147 und S.148.

2. Sonderfall : Die **gleichmäßig beschleunigte Bewegung** (auch: gleichförmige Beschleunigung)

Als ***gleichmäßig*** **beschleunigte Bewegung** definierte GALILEI jene Form der Geschwindigkeitsänderung, bei der ein Körper "in irgend welchen" **gleichen** Zeitabschnitten **Δt** stets ***gleiche*** Geschwindigkeits**zunahmen Δv** erfährt. Galilei hat sie auch als **gleichförmige Beschleunigung** bezeichnet.

- **Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm** einer ***gleichmäßig beschleunigten*** **Bewegung**



Aus der obigen Definition folgt, daß der Graph einer gleichförmigen Beschleunigung im **v-t**-Diagramm eine **Gerade** ist. Analog zur Geradengleichung **y = m · x** in der Mathematik gilt damit folgende Funktionsgleichung:

$\mathbf{v = K \cdot t}$, wobei der Steigungsfaktor $K = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

- definiert ist als die »**Beschleunigung**« **a** , d.h.:

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

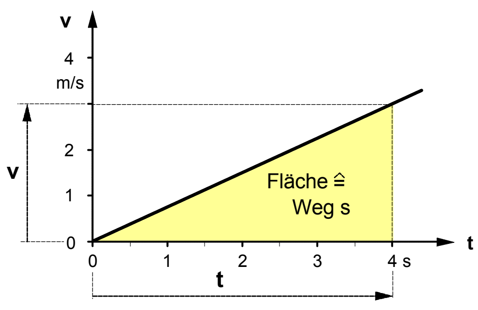
Maßeinheit der Beschleunigung **a** :

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{1\ \text{m/s}}{1\ \text{s}} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Damit gilt für das **Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz** der ***gleichförmig beschleunigten*** Bewegung:

$\boxed{v = a \cdot t}$ wobei **a = konstant** ist.

- **Weg-Zeit-Gesetz** der ***gleichmäßig beschleunigten*** **Bewegung**



Auch hier wollen wir von der bereits bei der gleichförmigen Bewegung entwickelten Überlegung ausgehen, daß die **Fläche** unter der **v-t-**Linie ein Maß für den zurückgelegten Weg **s** sei. Damit gilt für den in der Zeit **t** zurückgelegten **Weg** :

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \quad \text{mit} \quad v = a \cdot t$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

Einstein über Galileis Beschleunigungsdefinition: »Man kann sich heute nicht mehr vorstellen, was für eine große Phantasieleistung in der klaren Bildung des Begriffs der Beschleunigung und in der Erkenntnis der physikalischen Bedeutung dieses Begriffs lag.«

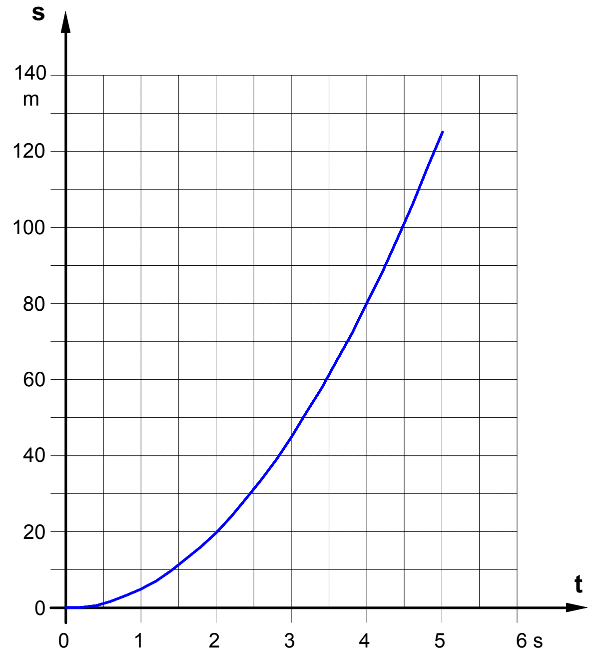
1. Weg-Zeit-Gesetz und Weg-Zeit-Diagramm

$$\boxed{s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

Beispiel: **a** = **10** m/s²

$$s = 5 \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

t in **s**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
s in **m**	**5**	**20**	**45**	**80**	**125**



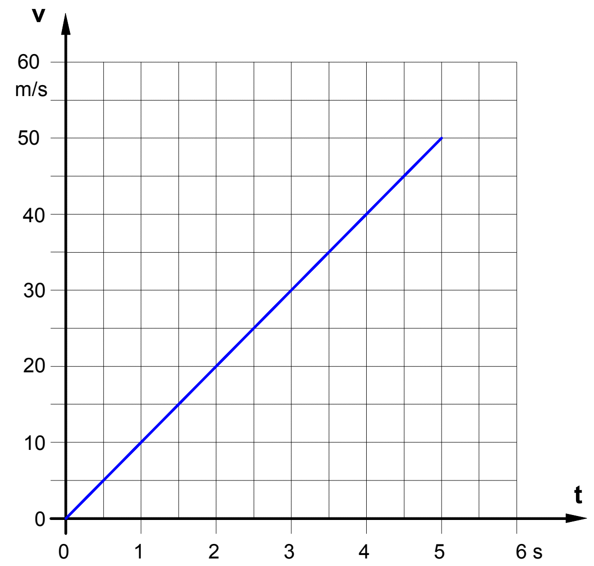
2. Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz und Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm

$$\boxed{v = a \cdot t}$$

Beispiel: **a** = **10** m/s²

$$v = 5 \frac{m}{s^2} \cdot t$$

t in **s**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
v in **m/s**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**

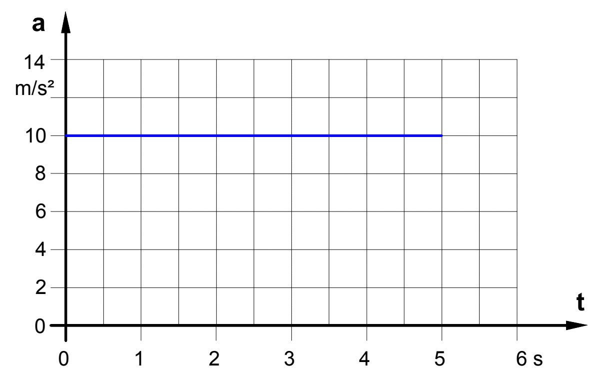


3. Beschleunigung-Zeit-Gesetz und Beschleunigung-Zeit-Diagramm

$$\boxed{a = \text{const.}}$$

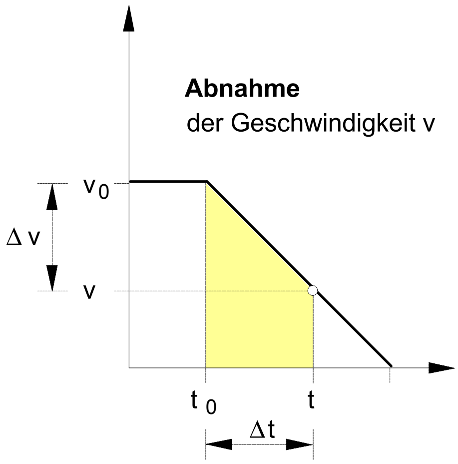
Beispiel: **a** = **10** m/s²

t in **s**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a in **m/s²**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**



Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK** | Name: | PHY-8AF.DOC - 02.09.01

Arbeitsblatt Nr. **8 a)** : **Gleichförmige** Geschwindigkeits**änderung** mit **Anfangsgeschwindigkeit v_o**



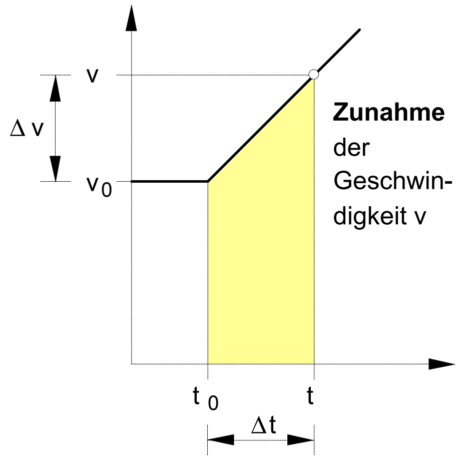
- Definition:

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

mit D**v = v – v$_o$**
D**t = t – t$_o$**

Diese Definition und die folgenden Gesetze gelten in der angegebenen Form nur für die **gleichförmige Änderung** der Geschwindigkeit , d.h. für den Fall, daß

a = const. ist.



- **Verzögerung (v < v$_o$)**
  a < 0 (negative Beschleunigung)

- **Beschleunigung (v > v$_o$)**
  a > 0 (positive Beschleunigung)

• Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

gemäß Definition gilt: Δ **v = a · Dt** mit D**v = v – v$_o$** und D**t = t – t$_o$**

v – v$_o$ = a · (t – t$_o$)

$$v = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

Setzen wir **t$_o$ = 0 s** , so ergibt sich für das

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz: $$\boxed{v = v_0 + a \cdot t}$$

v_0 ... Anfangsgeschwindigkeit in **t_0**
v ... die in der Zeit **t** erreichte Geschwindigkeit
a ... Beschleunigung (positiv oder negativ)

• Weg-Zeit-Gesetz (Der zurückgelegte Weg **s** entspricht jeweils der Fläche unter der v-t-Linie.)

$$s = v_0 \cdot \Delta t - \frac{(v_0 - v) \cdot \Delta t}{2} \quad \text{(Trapezfläche)}$$

mit $(v_0 - v) = -\Delta v$

$$s = v_0 \cdot \Delta t - \frac{-\Delta v \cdot \Delta t}{2}$$

$$s = v_0 \cdot \Delta t + \frac{(v - v_0) \cdot \Delta t}{2} \quad \text{(Trapezfläche)}$$

mit $(v - v_0) = \Delta v$

$$s = v_0 \cdot \Delta t + \frac{\Delta v \cdot \Delta t}{2}$$

$$s = v_0 \cdot \Delta t + \frac{\Delta v \cdot \Delta t}{2} \quad \text{mit} \quad \Delta v = a \cdot \Delta t$$

$$s = v_0 \cdot \Delta t + \frac{a \cdot \Delta t \cdot \Delta t}{2}$$

$$s = v_0 \cdot \Delta t + \frac{a \cdot \Delta t^2}{2} \quad \text{mit} \quad \Delta t = t - t_0$$

$$s = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

Setzen wir **t$_o$ = 0 s** , so ergibt sich für

das Weg-Zeit-Gesetz: $$\boxed{s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

v_0 ... Anfangsgeschwindigkeit in **t_0**
s ... der in der Zeit **t** zurückgelegte Weg
a ... Beschleunigung (positiv oder negativ)

1. Eine Lokomotive fährt aus dem Ruhezustand mit **a** = **0,6** m/s^2 gleichmäßig beschleunigt an.

a) Wie lange dauert es, bis sie die Geschwindigkeit **80** km/h erreicht hat? [t = 37 s]

b) Wie weit ist sie dann vom Ausgangsort entfernt? [s = 411 m]

---

2. Ein Körper wird aus dem Ruhezustand gleichmäßig beschleunigt. Die Beschleunigung beträgt **a** = **0,08** m/s^2 . In welcher Zeit legt er den Weg **s** = **100** m zurück? [t = 50 s]

---

3. Der Pfeil einer Armbrust wird durch die sich entspannende Bogensehne auf einer **s** = **0,3** m langen Führungsschiene gleichmäßig beschleunigt. Er verläßt die Armbrust mit der Geschwindigkeit **v** = **66** m/s. Welche Zeit **t** vergeht während des Beschleunigungsvorganges? [t = 9,09 ms]

---

4. Ein Verkehrsflugzeug startet. Nach der Rollstrecke **s** = **2,6** km hebt es mit der Fluggeschwindigkeit **v** = **340** km/h von der Startbahn ab. Nehmen Sie an, daß es sich auf der Startbahn gleichmäßig beschleunigt bewegt habe.

a) Wie lange rollt das Flugzeug beim Startvorgang? [t = 55,1 s]

b) Welche Beschleunigung hat es dabei ? [a = 1,71 m/s²]

---

5. Ein Körper führt längs einer geraden Bahn eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus. Zur Zeit t_o = **0** hat er die Anfangsgeschwindigkeit v_o = **8** m/s. Seine Beschleunigung beträgt **a** = **2,0** m/s^2 . Zu jedem der folgenden Zeitdiagramme sind zunächst die Wertetabellen für t = 0 bis t = 10 s zu erstellen.

a) Zeichnen Sie das **v-t-**Diagramm und entwickeln Sie die entsprechende Bewegungsgleichung **v** = f (**t**) .

b) Zeichnen Sie das **s-t-**Diagramm und entwickeln Sie die entsprechende Bewegungsgleichung **s** = f(**t**).

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem **v-t-**Diagramm und dem **s-t-**Diagramm ein und desselben Bewegungsvorganges?

---

6. Ein Körper wird längs einer geraden Bahn gleichmäßig abgebremst, d.h. er wird gleichmäßig negativ beschleunigt. Seine Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit t_o = 0 beträgt v_o = **10** m/s, seine Beschleunigung **a** = **– 0,5** m/s^2 .

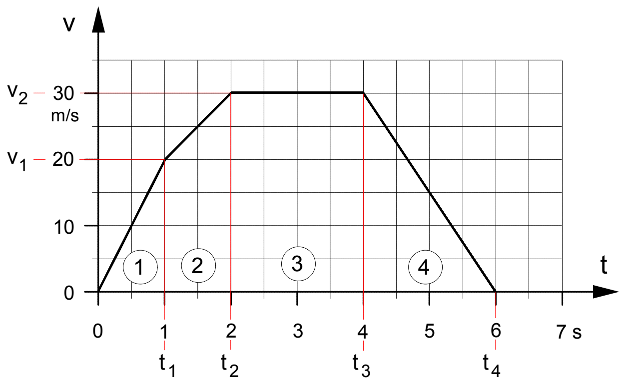
a) Zeichnen Sie das **v-t-**Diagramm und entwickeln Sie die entsprechende Bewegungsgleichung **v** = f (**t**), wenn er bis zum Stillstand abgebremst wird.

b) Ermitteln Sie aus dem **v-t-**Diagramm den Weg **s**, den der Körper während des Bremsvorganges bis zum Stillstand zurücklegt. [s = 100 m]

c) Zeichnen Sie das **s-t-**Diagramm für den Fall, daß der Körper sich zur Zeit t_0 = **0** bei der Ortskoordinate s_0 = **0** befindet.

---

7. Die Bewegung eines Körpers ist in dem nebenstehenden **v-t-**Diagramm dargestellt.



a) Ermitteln Sie mit Hilfe des **v-t-**Diagramms die bis zu den Zeitpunkten t_1 bis t_4 jeweils zurückgelegten Wege s_1 bis s_4 .

b) Zeichnen Sie das **s-t-**Diagramm und das **a-t-**Diagramm zusammen mit dem **v-t-**Diagramm auf <u>ein</u> DIN-A4-Blatt.

c) Entwickeln Sie für die Abschnitte ① bis ④ des **s-t-**Diagramms die entsprechenden Gleichungen **s =** f (**t**).

- Weitere Übungsaufgaben zur **gleichmäßig beschleunigten Bewegung**

1. Die besten Läufer legen ohne Mühe **100 m** in **10 s** zurück. Welche maximale Geschwindigkeit erreicht ein solcher Läufer und welche Beschleunigung ist dabei notwendig, wenn er seinen Lauf zunächst auf einer Strecke von **25 m** beschleunigt und dann den Rest der Strecke mit der erreichten Maximalgeschwindigkeit zum Ziel läuft **?** (v_{max} = 12,5 m/s ; a = 3,125 m/s²)

2. Ein Fahrzeug wird in 2 s auf einer Strecke von 12 m bei gleichmäßigem Bremsen zum Stillstand gebracht. Welche Anfangsgeschwindigkeit besaß es und welche Verzögerung wird dabei von den Bremsen erzeugt **?** (v_o = 12 m/s ; a = – 6 m/s²)

3. Ein Fahrzeug bremst gleichmäßig und vermindert dadurch seine Geschwindigkeit auf einem Wegabschnitt **s_1 = 80 m** zunächst von **50 km/h** auf **30 km/h**. Welchen Weg **s_2** braucht das Fahrzeug dann noch, um beim gleichmäßigen Fortsetzen des Bremsens zum Stehen zu kommen **?** (s_2 = 45 m)

4. Welche Verspätung erhält ein Zug, der eine Baustelle von **250 m** Länge statt mit der normalen Fahrgeschwindigkeit von **54 km/h** nur mit **18 km/h** passieren darf, wenn er vorher mit der Verzögerung **– 0,4 m/s²** bremst und danach mit der Beschleunigung **0,25 m/s²** die Normalgeschwindigkeit wiedergewinnt **?** (Verspätung: t_v = 55 s)

5. Ein Straßenbahnwagen fährt mit einer Beschleunigung **a = 0,8 m/s²** an, bis er die Geschwindigkeit **50 km/h** erreicht hat. Diese Geschwindigkeit behält er so lange bei, bis er mit einer Bremsverzögerung **a' = – 1,5 m/s²** gerade an der nächsten Haltestelle zum Stehen kommt. Wie lange braucht er für die **320 m** lange Strecke zwischen den beiden Haltestellen **?** (t = 36,4 s)

6. Ein Auto fährt mit **20 km/h** auf einem beschädigten Straßenabschnitt. Danach gibt der Fahrer Gas und erzeugt eine Beschleunigung von **1,5 m/s²** . Die Beschleunigung dauert **6 s** . Welche Geschwindigkeit wird erreicht und welcher Weg wird in dieser Zeit durchfahren **?** (52,4 km/h ; 60,3 m)

7. Ein Flugzeug braucht zum Abheben vom Boden eine Geschwindigkeit von **180 km/h** . Welche mittlere Beschleunigung benötigt es auf seinem **900 m** langen Startweg und wie viele Sekunden nach dem Beginn des Startvorganges hebt es vom Boden ab **?**(1,39 m/s² ; 36 s)

8. Welche Verzögerung müssen die Bremsen eines Autos hervorrufen, wenn es bei einer Geschwindigkeit von **50 km/h** auf einer Strecke von **15 m** zum Stehen gebracht werden soll **?** (–6,43 m/s²)

9. Wie viele Meter vor einer Kurve muß der Fahrer eines Autos mit der Verzögerung **– 2 m/s²** bremsen, um seine Geschwindigkeit von **72 km/h** auf **36 km/h** zu vermindern **?** (75 m)

10. Ein Mittelklasse-Auto wird in der Zeit **Δt_1** aus dem Stillstand mit **a = 3 m/s²** gleichmäßig auf die Geschwindigkeit **v_1** beschleunigt und bewegt sich dann noch die Zeit **Δt_2 = 6 s** gleichförmig weiter. Insgesamt legt es in der Zeit **$t_2 = \Delta t_1$** + **Δt_2** einen Weg von **s = 330 m** zurück.

a) Auf welche Geschwindigkeit **v_1** wurde es beschleunigt **?** (v_1 = 108 km/h)

b) Wie groß ist der während des Beschleunigungsvorganges zurückgelegte Weg **s_1** **?** (s_1 = 150 m)

Entwickeln Sie für beide Teilaufgaben für die jeweils gesuchte Größe in **allgemeiner Form** eine Lösungsformel **!**

1. Zum Begriff der **Folge**

Unter einer *Folge* versteht man eine geordnete Menge von Zahlen (z.B. die Folge der geraden natürlichen Zahlen 2, 4, 6, ... usw.). Die Funktionsgleichung zur Bestimmung einzelner Glieder bezeichnet man als *allgemeines Glied* oder als *Bildungsgesetz* der Folge (z.B. $\mathbf{a_n} = 2 \cdot \mathbf{n}$ mit n = ∈ N für die Folge der geraden natürlichen Zahlen). Mit Hilfe des Bildungsgesetzes lassen sich die Glieder der Folge berechnen (z.B. $\mathbf{a_1} = 2 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{2}$, $\mathbf{a_2} = 2 \cdot \mathbf{2} = \mathbf{4}$, $\mathbf{a_3} = 2 \cdot \mathbf{3} = \mathbf{6}$ ... usw.) Dazu als *physikalisches Beispiel* eine **unendliche Folge von Zeiten** :

- Beispiel: *Bildungsgesetz* einer Folge von Zeiten

$$\boxed{t_n = 1\text{s}\left(2 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{für} \quad n \in N} \quad \Longrightarrow$$

- Darstellung als *Folge* von Zeiten :

n	$\mathbf{t_n}$
1	t_1 = **1,00** s
2	t_2 = **1,50** s
3	t_3 = **1,67** s
4	t_4 = **1,75** s
...	....
10	t_{10} = **1,90** s
...	...
∞	t ¥ = **2,0** s

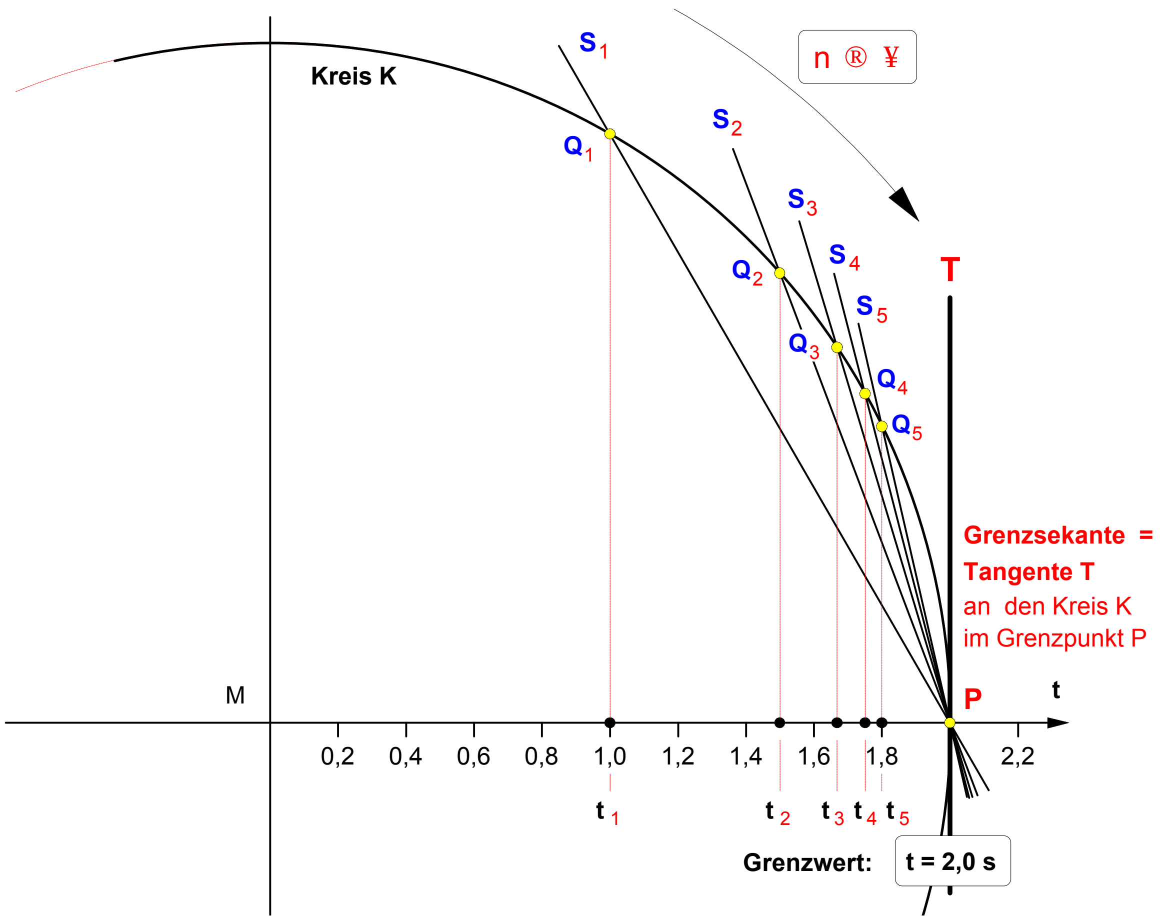
2. **Grenzwert** der Folge

Wenn **n** gegen unendlich strebt, so streben alle Zeitwerte $\mathbf{t}_n$ gegen den Wert **2,0** s. Die Größe »**t** = **2,0 s**« bezeichnet man als den **Grenzwert** der Folge.

- Symbolische Schreibweise mit dem *Grenzwertzeichen* (limes (lat.): Grenze):

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} t_n = 2{,}0\,\text{s}} \qquad \text{oder mit } t_n = 1\text{s}\left(2 - \frac{1}{n}\right): \quad \boxed{\lim_{n\to\infty}\left[1\text{s}\left(2 - \frac{1}{n}\right)\right] = 2{,}0\,\text{s}}$$

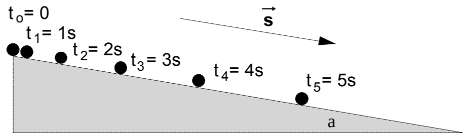
3. **Geometrische Darstellung der Folge** als Folge von Sekanten und Punkten eines Kreises



Wenn **n** gegen **unendlich strebt** (**n** ® ¥) , dann streben

- die **Zeiten** $\mathbf{t}_n$ gegen __**den Grenzwert "t = 2,0 s"**__ ,
- die **Sekanten** $\mathbf{S}_n$ gegen __**die Tangente T**__
- die **Punkte** $\mathbf{Q}_n$ auf dem Kreisbogen gegen __**den Berührungspunkt P der Tangenten**__

1. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung einer Kugel auf einer schiefen Ebene (reibungsfrei, $\alpha = 0{,}6°$)



Bei einer ungleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit nicht konstant, sondern ändert sich in jedem Augenblick. Mit Hilfe einer **Grenzwertbetrachtung** läßt sich die **Geschwindigkeit in jedem Zeitpunkt** bestimmen, sofern man die Weg-Zeit-Funktion kennt. Dazu folgendes Beispiel: Eine Kugel rollt auf einer schiefen Ebene. Aufgrund von Messungen ergibt sich z.B. folgende Meßreihe:

Zeitpunkt t_n in s	0	1,0	2,0	2,1	2,2	2,5	3,0	4,0	5,0
Weglänge s_n in m	0	0,05	0,2	0,2205	0,242	0,31	0,45	0,8	1,25

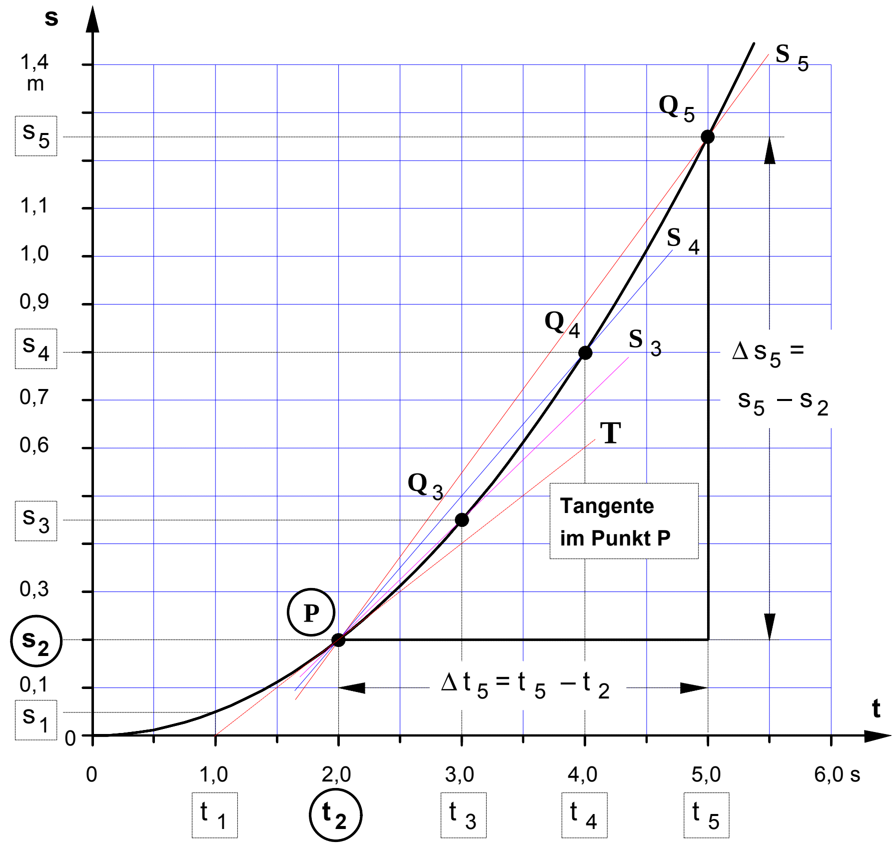
- **Problem:** Wie läßt sich die **Momentangeschwindigkeit** der Kugel im Zeitpunkt t_2 = **2** s bestimmen ?

2. Mittlere Geschwindigkeiten $\bar{v}_n$ in verschiedenen Zeitspannen Δt_n

(n = 5; 4; 3; 2; 2,5 ; 2,2 ; 2,1)

Zeitspanne $\Delta t_n = t_n - t_2$	Wegintervall $\Delta s_n = s_n - s_2$	Mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}_n = \frac{\Delta s_n}{\Delta t_n}$
$\Delta t_5 = t_5 - t_2$ = 5 s – 2 s = 3 s	$\Delta s_5 = s_5 - s_2$ = 1,25 m – 0,2 m = 1,05 m	$\bar{v}_5 = \frac{\Delta s_5}{\Delta t_5}$ = **0,35** m/s
$\Delta t_4 = t_4 - t_2$ = 4 s – 2 s = 2 s	$\Delta s_4 = s_4 - s_2$ = 0,8 m – 0,2 m = 0,6 m	$\bar{v}_4 = \frac{\Delta s_4}{\Delta t_4}$ = **0,30** m/s
$\Delta t_3 = t_3 - t_2$ = 3 s – 2 s = 1 s	$\Delta s_3 = s_3 - s_2$ = 0,45 m – 0,2 m = 0,25 m	$\bar{v}_3 = \frac{\Delta s_3}{\Delta t_3}$ = **0,25** m/s
$\Delta t_{2,5} = t_{2,5} - t_2$ = 2,5 s – 2 s = 0,5 s	$\Delta s_{2,5} = s_{2,5} - s_2$ = 0,31 m – 0,2 m = 0,11 m	$\bar{v}_{2,5} = \frac{\Delta s_{2.5}}{\Delta t_{2.5}}$ = **0,22** m/s
$\Delta t_{2,2} = t_{2,2} - t_2$ = 2,2 s – 2 s = 0,2 s	$\Delta s_{2,2} = s_{2,2} - s_2$ = 0,242 m – 0,2 m = 0,042 m	$\bar{v}_{2,2} = \frac{\Delta s_{2.2}}{\Delta t_{2.2}}$ = **0,21** m/s
$\Delta t_{2,1} = t_{2,1} - t_2$ = 2,1 s – 2 s = 0,1 s	$\Delta s_{2,1} = s_{2,1} - s_2$ = 0,2205 m – 0,2 m = 0,0205 m	$\bar{v}_{2,1} = \frac{\Delta s_{2.1}}{\Delta t_{2.1}}$ = **0,205** m/s

3. Weg-Zeit-Diagramm

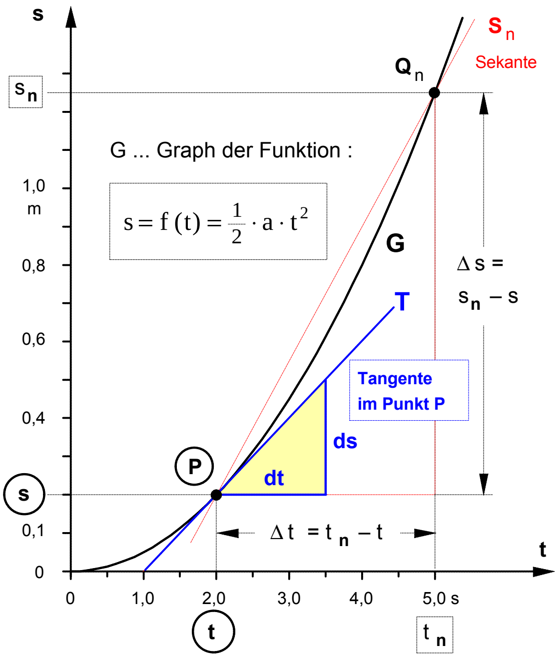


4. Grenzwertbetrachtung: Strebt t_n gegen t_2, dann streben alle

- Δt_n gegen **Null**
- Punkte Q_n gegen **den Punkt P**
- Sekanten S_n gegen **die Tangente T im Punkt P**
- mittleren Geschwindigkeiten $\bar{v}_n$ offensichtlich gegen den **Grenzwert** **0,2 m/s. Dieser Grenzwert ist die Momentangeschwindigkeit** v_2 **im Zeitpunkt** t_2 .

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name: PHY-10-2.DOC - 31.10.04	
Arbeitsblatt Nr. **10** :	Zum Begriff der **Momentangeschwindigkeit**	Seite **2**

5. Herleitung einer **allgemeinen Definition** des **Geschwindigkeitsbegriffs**



- **Gegeben** sei die **Weg-Zeit-Funktion** $s = f(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ einer *gleichförmigen* Beschleunigung.
- **Gesucht** wird die **Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v** = f (**t**) zur Berechnung der **Momentan**geschwindigkeit im Zeitpunkt **t** = **2** s .
- **Lösung** :

1. Schritt : **Mittlere Geschwindigkeit** $\overline{v}_n$ in der Zeitspanne Δ**t** (**Differenzenquotient** = Sekantensteigung)

$$\overline{v}_n = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_n - s}{t_n - t} \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \ :$$

$$\overline{v}_n = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot t_n^{\ 2} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}{t_n - t}$$

2. Schritt : **Mathematische Umformung des Differenzenquotienten**

$$\overline{v}_n = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{t_n^{\ 2} - t^2}{t_n - t}$$

mit der Binom-Zerlegung $\mathbf{t_n^2 - t^2 = (t_n - t) \cdot (t_n + t)}$ ergibt sich:

$$\overline{v}_n = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{(t_n - t) \cdot (t_n + t)}{t_n - t}$$

und nach Kürzen von ($\mathbf{t_n - t}$) : $\overline{v}_n = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_n + t)$

3. Schritt : **Grenzwertbildung** und **Grenzübergang** zur Bestimmung der **Momentangeschwindigkeit v** im Zeitpunkt **t** – Dazu lassen wir Δ**t** gegen **0** und damit $\mathbf{t_n}$ gegen **t** gehen (Δ**t** ® **0** bzw. $\mathbf{t_n}$ ® **t**).

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_n \to t} \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_n + t)$$

Jetzt kann zur Bestimmung des Grenzwertes der *Grenzübergang* von $\mathbf{t_n}$ nach **t** vollzogen werden, d.h. es wird $\mathbf{t_n}$ = **t** gesetzt (!).
Geometrisch beinhaltet dies den *Übergang* von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t + t)$$

Daraus ergibt sich schließlich: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = a \cdot t$

- **Fazit**: Die **Momentangeschwindigkeit v** ist der Grenzwert des Differenzenquotienten Δ**s**/Δ**t** für den Fall, daß Δ**t** gegen **0** geht. Für die Berechnung dieses Grenzwertes ergibt sich in diesem *speziellen* Fall der *gleichförmigen* Beschleunigung die Formel **v = a · t** .

  Geometrisch betrachtet ist dieser Grenzwert als Grenzwert der Folge der *Sekanten*steigungen und insofern als die **Steigung der *Tangente T*** zu deuten. Mit den Katheten **ds** und **dt** des Tangenten-Steigungsdreiecks ergibt sich dann die

- Schreibweise als **Differentialquotient** (mit **ds** als Weg-Differential und **dt** als Zeit-Differential) :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t = 2s}$$

In Worten: Die Momentangeschwindigkeit **v** ist der Differentialquotient "**ds** nach **dt** im Zeitpunkt **t** = **2** s". Für einen beliebigen Zeitpunkt **t** gilt dann die

- **Allgemeine Definition der Geschwindigkeit**

Die Geschwindigkeit **v** ist der Differentialquotient " **ds** nach **dt** " des Weges nach der Zeit. Sie ist ihrerseits eine Funktion **v** (**t**) der Zeit **t**.

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$$

6. **Zusammenfassung** zur allgemeinen Definition des Geschwindigkeitsbegriffs (siehe Seite **2**)

- **Gegeben** war die **Weg-Zeit-Funktion** $s = f(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ einer *gleichförmigen* Beschleunigung.

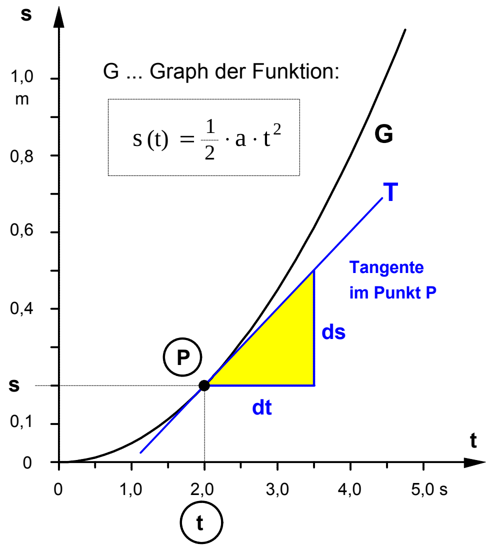
- **Gesucht** wurde die **Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v** = f (**t**) zur Berechnung der **Momentan**geschwindigkeit in einem beliebigen Zeitpunkt **t** .

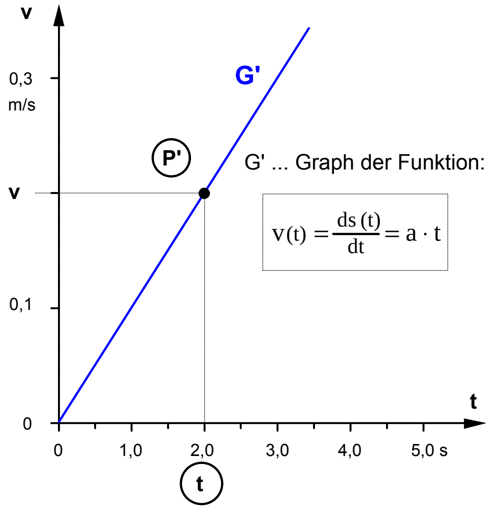
- **Lösung** : Mit Hilfe des auf der vorangegangenen Seite entwickelten "Drei-Schritt-Verfahrens" ergab sich folgendes Resultat:

$$\boxed{v(t) = \frac{ds(t)}{dt}} \qquad \text{mit} \qquad s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v(t) = \frac{d\left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2\right)}{dt}$$

$$\boxed{v(t) = a \cdot t}$$





- **Fazit**: Differenziert man die Weg–Zeit–Funktion

  $s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ nach der Zeit

  (oder wie man auch sagt: *Bildet man die 1. Ableitung des Weges nach der Zeit*),

  so erhält man die Geschwindigkeit–Zeit–Funktion

  $v(t) = a \cdot t$.

  Mathematisch betrachtet ist die Funktion **v** (t) die *Steigungs*-funktion der Funktion **s** (t), denn sie gibt an, wie sich die Steigung des Graphen der Funktion **s** (t) in Abhängigkeit von der Zeit **t** ändert.

• **Schreibweisen** des **Differentialquotienten**

Am Beispiel des Differentialquotienten des Weges nach der Zeit (mit **d**s als Weg-Differential und **d**t als Zeit-Differential) sollen im folgenden die in der Physik und Mathematik verwendeten Schreibweisen dargestellt werden.

► Von *Gottfried Wilhelm **Leibniz*** (dt. Philosoph, 1646 – 1716) stammt die sowohl in der **Physik** als auch in der **Mathematik** verwendete Schreibweise mit ***Differentialen***

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

► Üblich in der **Physik** ist bei *Zeit*-Differentialen bzw. bei Ableitungen nach der *Zeit* auch die auf *Isaac **Newton*** (engl. Physiker und Mathematiker, 1643 – 1727) zurückgehende ***Punkt***-Schreibweise:

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}}$$

(In Worten: "s Punkt")

► In Anlehnung an die Newtonsche Punkt-Schreibweise ist in der **Mathematik** auch die ***Strich***-Schreibweise üblich:

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = s' = f'(t)}$$

1. Vorbetrachtung: **Zerlegen** von **Binomen** des **Typs** $a^n - b^n$ in **Polynome**

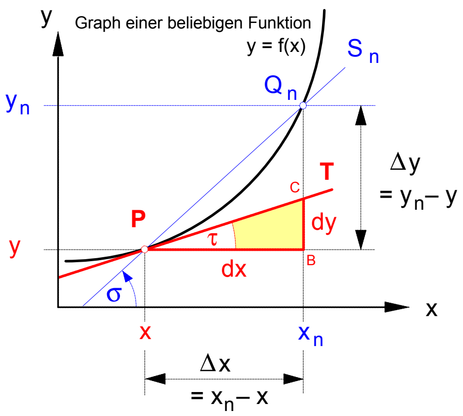
$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\cdot\left[a^{n-1}\cdot b^0 + a^{n-2}\cdot b^1 + a^{n-3}\cdot b^2 + a^{n-4}\cdot b^3 + \;\ldots\; a^0\cdot b^{n-1}\right]}$$

- Dazu zwei Beispiele :

1.) $$a^4 - b^4 = (a-b)\cdot\left[a^{4-1}\cdot b^0 + a^{4-2}\cdot b^1 + a^{4-3}\cdot b^2 + a^{4-4}\cdot b^3\right]$$
$$= (a-b)\cdot\left[a^3 + a^2\cdot b + a\cdot b^2 + b^3\right]$$

2.) $$a^5 - b^5 = (a-b)\cdot\left[a^{5-1}\cdot b^0 + a^{5-2}\cdot b^1 + a^{5-3}\cdot b^2 + a^{5-4}\cdot b^3 + a^{5-5}\cdot b^4\right]$$
$$= (a-b)\cdot\left[a^4 + a^3\cdot b + a^2\cdot b^2 + a\cdot b^3 + b^4\right]$$

2. **Differenzenquotient** und **Differentialquotient** einer **Funktion** *y = f (x)*



- **Differenzenquotient** (Sekantensteigungsdreieck **P B Q$_n$**) :

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_n - y}{x_n - x} = \tan\sigma}$$

tan s ⇒ Steigung der Sekante S_n

- **Differentialquotient** (Tangentensteigungsdreieck **P B C**) :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\tau}$$

tan t ⇒ Steigung der Tangente **T**

3. Differenzieren einer Potenzfunktion – Beispiel : y = x ^{4}

- gegeben: **y** = f(**x**) **= x ^{4}**
- gesucht: **y' =** $\frac{dy}{dx}\Big|_x$ **= ?** (Differentialquotient bzw. Tangentensteigung an der Stelle x)

$\boxed{\textbf{1. Schritt :}}$ **Aufstellen des Differenzenquotienten** :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_n - y}{x_n - x}$$

Mit **y$_n$ = x$_n$ ^{4}** und **y = x ^{4}** :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_n^4 - x^4}{x_n - x}$$

$\boxed{\textbf{2. Schritt :}}$ **Umformung des Differenzenquotienten** (unter Anwendung von ① - siehe oben) :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_n - x)\cdot\left[x_n^3 + x_n^2\cdot x + x_n\cdot x^2 + x^3\right]}{(x_n - x)}$$

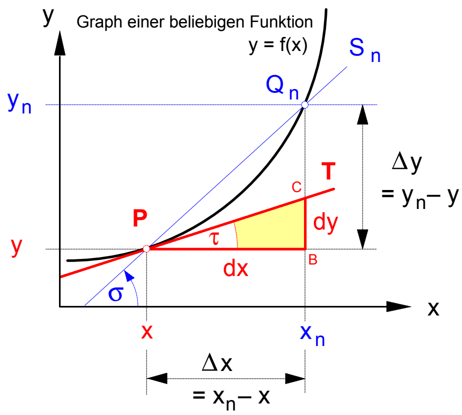
$\boxed{\textbf{3. Schritt :}}$ **Grenzwertbildung** (Δx → 0 bzw. x_n → x) und **Grenzübergang** (x_n wird gleich x gesetzt):

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = x^3 + x^2\cdot x + x\cdot x^2 + x^3 = 4\cdot x^3$$

$\boxed{\textbf{Ergebnis :}}$

$$\boxed{\text{Wenn } y = x^4 \text{ , dann ist } y' = \frac{dy}{dx} = \mathbf{4}\cdot x^3}$$

4. Weiteres Beispiel: **Differenzieren der Potenzfunktion y = x ³**



- gegeben: **y** = f(x) = $\mathbf{x^3}$
  Gehen Sie bitte von folgenden Koordinatenangaben aus:
  Punkt **P**: (x | y) Punkt $\mathbf{Q_n}$: (x + Δx | y + Δy)
- gesucht: Wie lautet die 1. Ableitungsfunktion **y'** = f'(x) der Funktion **y** = f(x) = $\mathbf{x^3}$?
- Lösung:

1. Schritt : **Aufstellen des Differenzenquotienten** :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

Denn es ist **y** = $\mathbf{x^3}$ und (**y** + Δ**y**) = (**x** + Δ**x**)$^{\mathbf{3}}$

2. Schritt : **Umformung des Differenzenquotienten** (unter Anwendung des Binomischen Gesetzes) :

mit $(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \Delta x + 3 \cdot x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$ ergibt sich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \Delta x + 3 \cdot x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

3. Schritt : **Grenzwertbildung** (Δ**x** → **0**) und **Grenzübergang** (Δ**x** wird gleich **0** gesetzt):

Den Rest bitte auf die Rückseite schreiben!

---

5. Das Potenzgesetz der Differentialrechnung

- gegeben: **y** = f(**x**) = $\mathbf{x^k}$
- gesucht: **y'** = $\frac{dy}{dx}$ **= ?** (Differentialquotient bzw. 1.Ableitung der Funktion **y** = f(**x**))

1. Schritt : **Aufstellen des Differenzenquotienten** :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_n - y}{x_n - x} = \frac{x_n^k - x^k}{x_n - x}$$

, denn es ist $\mathbf{y_n} = \mathbf{x_n}^{\mathbf{k}}$ und **y** = $\mathbf{x^k}$

2. Schritt : **Umformung des Differenzenquotienten** (unter Anwendung der Binom-Zerlegung) :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_n - x) \cdot (x_n^{k-1} \cdot x^0 + x_n^{k-2} \cdot x^1 + x_n^{k-3} \cdot x^2 + \ldots + x_n^0 \cdot x^{k-1})}{(x_n - x)}$$

Nach dem Kürzen von (x_n - x) :

3. Schritt : **Grenzwertbildung** (Δ**x** → **0** bzw. $\mathbf{x_n}$ → **x**) und **Grenzübergang** ($\mathbf{x_n}$ wird gleich **x** gesetzt):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = x^{k-1} \cdot x^0 + x^{k-2} \cdot x^1 + x^{k-3} \cdot x^2 + \ldots + x^0 \cdot x^{k-1}$$

nach den Potenzregeln ergibt sich für die Summanden

$$= x^{k-1+0} + x^{k-2+1} + x^{k-3+2} + \ldots + x^{0+k-1}$$

$$= x^{k-1} + x^{k-1} + x^{k-1} + \ldots + x^{k-1}$$

da die Anzahl der Summanden stets gleich **k** ist, gilt:

$$= \mathbf{k} \cdot x^{\mathbf{k-1}}$$

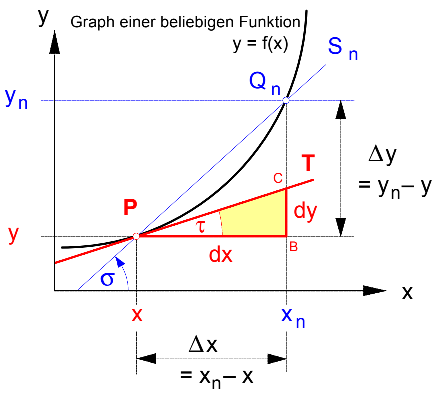
Demnach lautet das **Potenzgesetz** :

$$\boxed{\text{Wenn } y = x^{\mathbf{k}} \text{ , dann ist } y' = \frac{dy}{dx} = \mathbf{k} \cdot x^{\mathbf{k-1}}}$$

Beispiele: Ermitteln Sie die 1. Ableitungsfunktion **y'** der Funktionen **a) y =** $\mathbf{x^7}$ **b) y =** $\sqrt{\mathbf{x}}$ **c) y =** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}$

Zusammenfassende Übersicht zur Differentialrechnung

1. **Differenzenquotient** und **Differentialquotient** einer **Funktion** ***y = f (x)***



· **Differenzenquotient** (**Sekanten**steigungsdreieck **P B Q_n**)

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_n - y}{x_n - x} = \tan \sigma}$$

Der **Differenzenquotient** gibt die Steigung der **Sekante PQ_n** an.

· **Differentialquotient** (**Tangenten**steigungsdreieck **P B C**)

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \tau}$$

Der **Differentialquotient** (die Ableitung) der Funktion an der Stelle x gibt die Steigung der **Tangente T** und damit die Steigung des Graphen im Punkt **P** an.

2. **Höhere Differentialquotienten** (bzw. höhere Ableitungen)

Jede Ableitung einer Funktion **y** = f(**x**), die selbst wieder eine differenzierbare Funktion von x darstellt, kann abermals differenziert werden.

Zweite Ableitung: $$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d f'(x)}{dx}$$

Dritte Ableitung: $$\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx} = y''' = f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d f''(x)}{dx}$$ usw. usw.

3. **Einfache Formen der Grundregeln der Differentialrechnung**

a) Konstante Funktion: Wenn **y** = **c** , dann ist **y' = 0**

b) Konstanter Faktor: Wenn **y** = **a · f**(x) , dann ist **y' = a · f'**(x)

c) Summenregel: Wenn **y** = **f_1**(x) **+ f_2**(x) **+ ... + f_n**(x) , dann ist **y' = f_1'**(x) **+ f_2'**(x) **+ ... + f_n'**(x)

d) Produktregel: Wenn **y** = **f_1**(x) **· f_2**(x) , dann ist **y' = f_1'**(x) **· f_2**(x) **+ f_1**(x) **· f_2'**(x)

e) Quotientenregel: Wenn $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, dann ist $y' = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{[f_2(x)]^2}$

f) Die **Kettenregel** ist anzuwenden, wenn **y** = f(**x**) nicht unmittelbar von **x** abhängt (wie z.B. bei **y** = $a^{\mathbf{x}}$), sondern nur **mittelbar** (wie z.B. bei **y** = sin ($\sqrt{\mathbf{x}}$). Definiert man $\sqrt{\mathbf{x}}$ = **v** = h(**x**) als **innere Funktion** und sin (**v**) = **u** = g(**v**) als **äußere Funktion**, so wird deutlich, daß **y** nur mittelbar abhängig ist von **x**. Demnach ist **y** = g[h(**x**)] und mit **y** = f(**x**) gilt f(**x**) = g[h(**x**)] . In diesem Fall ist die Kettenregel wie folgt anzuwenden:

Wenn **y** = f(**x**) = g[h(**x**)] , dann ist $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$ bzw. $y' = g'(v) \cdot h'(x)$

wobei **u** = g(**v**) die äußere Funktion ist und **v** = h(**x**) die innere Funktion.

In unserem Beispiel **y** = sin ($\sqrt{\mathbf{x}}$) ist demzufolge **y'** = cos ($\sqrt{\mathbf{x}}$) · 1/(2$\sqrt{\mathbf{x}}$)

4. **Einige elementare Ableitungen**

Funktion	1. Ableitung	Funktion	1. Ableitung
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$ $\quad n \in R \setminus \{0\}$	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \ell n\, x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ell n\, a$	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

1. **Geschwindigkeit** einer beliebigen Bewegung

- **Durchschnittsgeschwindigkeit** zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten $\mathbf{t_1}$ und $\mathbf{t_2}$ (Differenzenquotient bzw. Sekantensteigung)

$$\boxed{\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}}$$

- **Momentangeschwindigkeit** in einem beliebigen Zeitpunkt $\mathbf{t_1}$ (Differentialquotient bzw. Tangentensteigung)

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}}$$

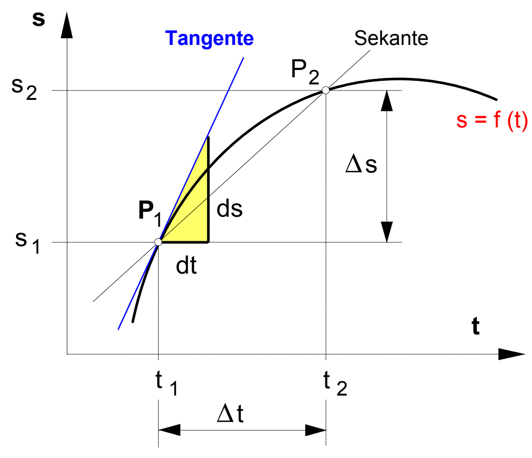


Bild 1 Graph einer beliebigen Weg-Zeit-Funktion s = f (t)

> Die **Geschwindigkeit v** einer Bewegung mit einer beliebigen Weg-Zeit-Funktion **s** = f (**t**) ist definiert als der **1. Differentialquotient** des **Weges s nach der Zeit t**.

2. **Beschleunigung** einer beliebigen Bewegung

- **Durchschnittsbeschleunigung** zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten $\mathbf{t_1}$ und $\mathbf{t_2}$ (Differenzenquotient bzw. Sekantensteigung)

$$\boxed{\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}}$$

- **Momentanbeschleunigung** in einem beliebigen Zeitpunkt $\mathbf{t_1}$ (Differentialquotient bzw. Tangentensteigung)

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}}$$ oder mit $v = \frac{ds}{dt}$ gilt auch

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d(ds)}{dt \cdot dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}}$$

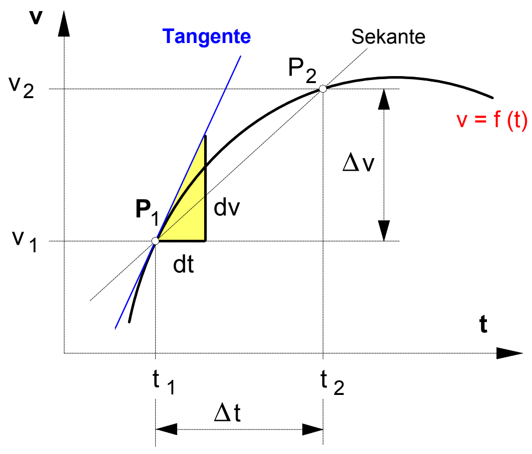


Bild 2 Graph einer beliebigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v = f (t)

> Die **Beschleunigung a** einer Bewegung mit einer beliebigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion **v** = f (**t**) ist definiert als der **1. Differentialquotient** der **Geschwindigkeit v nach der Zeit t** und damit als der **2. Differentialquotient** des **Weges nach der Zeit t**.

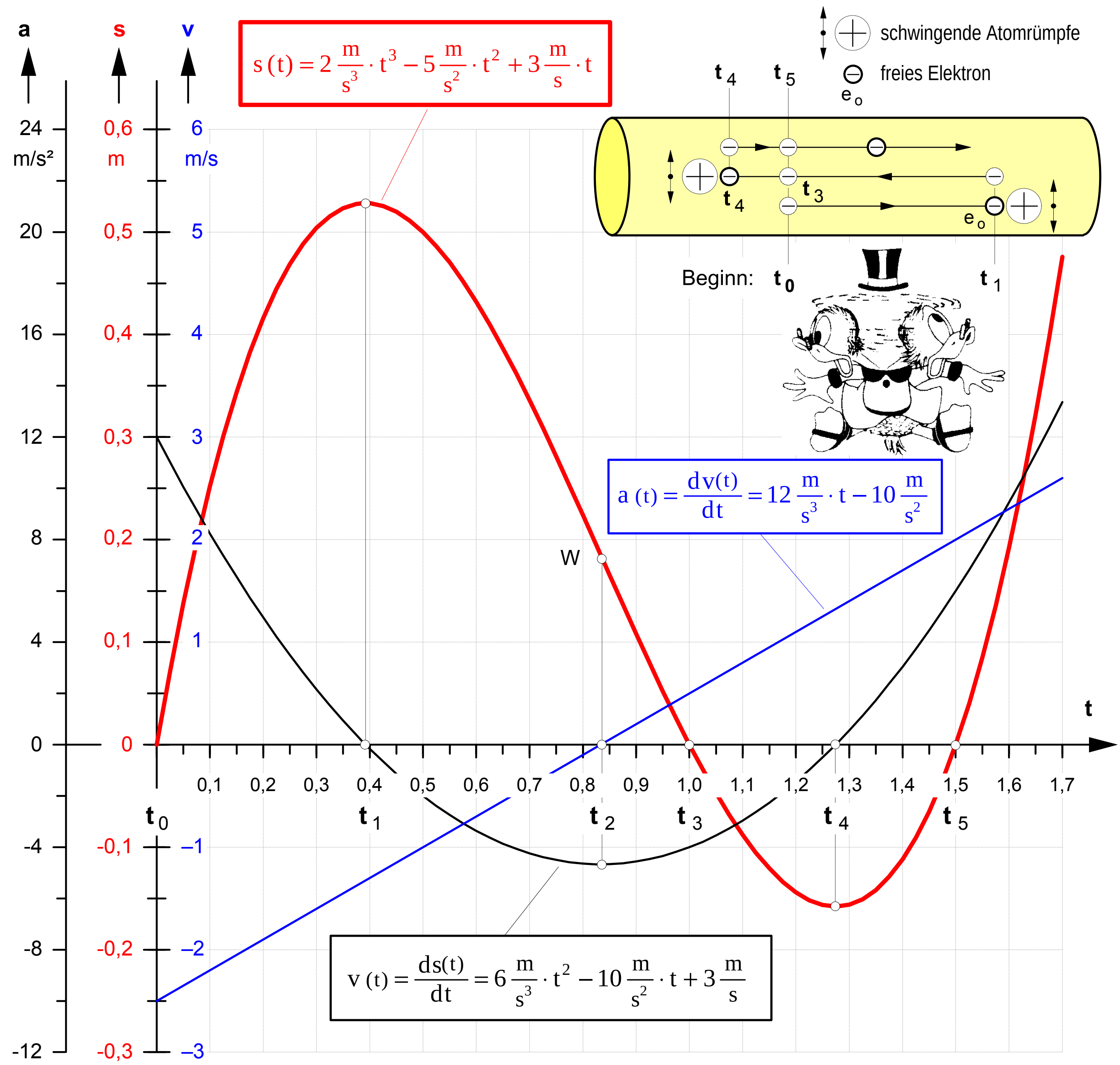
- **Beispiel** **Lösung siehe nächste Seite!**

Wir wollen annehmen, die ungleichförmige Driftbewegung eines freien Elektrons in einem Kupferleiter werde in einer Bewegungsphase, die sich auf einer Leiterlänge von etwa 70 cm abspielt und knapp 2 Sekunden dauert, hinreichend genau mit nebenstehender Weg-Zeit-Funktion beschrieben. Berechnen Sie den Weg, die Momentangeschwindigkeit und die Momentanbeschleunigung nach **0,3** s und nach **1,2** s.

$$s(t) = 2\frac{m}{s^3} \cdot t^3 - 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 3\frac{m}{s} \cdot t$$

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name:	PHY-11-2.DOC - 07.11.00
Arbeitsblatt Nr. **11** : **Momentangeschwindigkeit** und **Momentanbeschleunigung**		Seite **2**

- **Zeit-Diagramme** zur **ungleichförmig beschleunigten** Driftbewegung eines freien Elektrons in einem Kupferleiter (zum Aufgabenbeispiel von Seite 1)



- **Interpretation** der Zeit-Diagramme unter *kinematischen* Gesichtspunkten

t_o bis t_1 : **Verzögerte *Vorwärts*** bewegung mit abnehmenden Verzögerungswerten

t_1 bis t_2 : **Beschleunigte *Rückwärts*** bewegung mit abnehmenden Beschleunigungswerten (Wegen der *Rückwärts*bewegung sind die Beschleunigungswerte in dieser Phase *negativ*.)

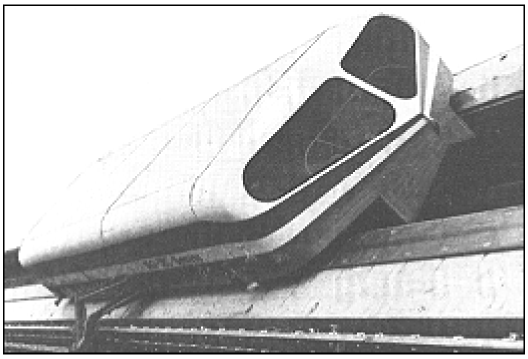
t_2 bis t_3 : **Verzögerte *Rückwärts*** bewegung zunächst *zurück bis zum Ausgangspunkt* mit zunehmender Verzögerung (Wegen der noch andauernden *Rückwärts*bewegung sind die Verzögerungswerte jetzt allerdings *positiv*.)

t_3 bis t_4 : **Verzögerte *Rückwärts*** bewegung mit zunehmender Verzögerung in *Rückwärts*richtung *über den Ausgangspunkt hinaus* (Wegen der immer noch andauernden *Rückwärts*bewegung sind die Verzögerungswerte weiterhin *positiv*.)

t_4 bis t_5 : **Beschleunigte *Vorwärts*** bewegung mit zunehmender Beschleunigung zunächst wieder bis zum Ausgangspunkt und ab t_5 weiter vorwärts über den Ausgangspunkt hinaus

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name: PHY-12-1.DOC - 14.11.04
Arbeitsblatt Nr. **12** : **Übungsaufgaben** zu **v** = d**s**/d**t** und **a** = d**v**/d**t**	

Herkömmliche Bahnantriebe haben den Nachteil, daß große Beschleunigungskräfte beim Anfahrvorgang zu einem Durchdrehen der Antriebsräder führen. Magnetschwebebahnen mit sogenannten Linearmotoren umgehen dieses Problem, indem sie die unmittelbare und berührungslose Kraftübertragung auf die Schienen ermöglichen. Damit ist der Linearmotor eine Antriebsart, die es Fahrzeugen mit großer Leistung unabhängig von ihrem Gewicht erlaubt, in kurzer Zeit hohe Geschwindigkeiten zu erreichen. Anwendung findet der Linearmotor bei schnellen Schienenverkehrssystemen (siehe Abb.) wie z.B. beim Transrapid. Mit dem Transrapid wurde auf einem Testgelände im Emsland 1988 eine Spitzengeschwindigkeit von 412 km/h erreicht. Weitere Anwendungsbeispiele für den Linearmotor sind Beschleunigungsantriebe in Karosserieprüfanlagen zur Durchführung von Aufprallversuchen, Förderanlagen und Türantriebe.



Versuchsmodell einer Magnetschwebebahn mit Linearmotor (Foto: Siemens AG)

Übungsaufgabe

Mit dem Versuchsmodell einer solchen Magnetschwebebahn mit Linearmotor wurde auf einer 120 Meter langen Teststrecke eine Serie von Beschleunigungsexperimenten durchgeführt. Drei dieser Testläufe, die sich jeweils auf einen Beobachtungszeitraum von 6 bis 7 Sekunden erstreckten, sollen im Rahmen dieser Übungsaufgabe unter kinematischen Gesichtspunkten näher analysiert werden.

Aufgrund der Auswertung von elektronischen Zeit- und Wegmessungen wurde festgestellt, daß sich der Verlauf der Bewegungen der Magnetschwebebahn während dieser drei Testläufe hinreichend genau mit folgenden Bewegungsgleichungen beschreiben läßt:

► **Testlauf 1.**

$$\boxed{\mathbf{s}(t) = 0{,}56\,\frac{m}{s^2}\cdot\mathbf{t}^2 + 1{,}2\,\frac{m}{s}\cdot\mathbf{t} + 8{,}4\text{ m}}$$

► **Testlauf 2.**

$$\boxed{\mathbf{s}(t) = 1{,}0\,\frac{m}{s^3}\cdot\mathbf{t}^3 - 12\,\frac{m}{s^2}\cdot\mathbf{t}^2 + 36\,\frac{m}{s}\cdot\mathbf{t}}$$

► **Testlauf 3.**

$$\boxed{\mathbf{s}(t) = 0{,}625\,\frac{m}{s^4}\cdot\mathbf{t}^4 - 8{,}125\,\frac{m}{s^3}\cdot\mathbf{t}^3 + 28{,}125\,\frac{m}{s^2}\cdot\mathbf{t}^2}$$

- Entwickeln Sie für alle drei Testläufe
  - **a)** die Bewegungsgleichung **v**(t) für die **Mommentangeschwindigkeit** sowie
  - **b)** die Bewegungsgleichung **a**(t) für die **Mommentanbeschleunigung**.
- Zeichnen Sie für alle drei Testläufe
  - **c)** das **Weg–Zeit–Diagramm**,
  - **d)** das **Geschwindigkeit–Zeit–Diagramm** und
  - **e)** das **Beschleunigung–Zeit–Diagramm**.
- Analysieren Sie die drei Bewegungsabläufe, indem Sie
  - **f)** den Verlauf der Graphen in einzelnen Zeitabschnitten unter **kinematischen** Gesichtspunkten interpretieren.

Die **Integralrechnung** als **Umkehrung** der **Differentialrechnung**

Wie jede andere Rechenoperation so läßt sich auch die Differentialrechnung umkehren. In ähnlicher Weise wie das Addieren zum Subtrahieren, das Multiplizieren zum Dividieren oder das Potenzieren zum Radizieren führt, so geht aus der Differentialrechnung die sog. **Integralrechnung** hervor. Umkehrung bedeutet hier, eine Funktion **F**(x) zu suchen, deren abgeleitete Funktion **f**(x) gegeben ist. Der Vorgang des Differenzierens ist also rückgängig zu machen, d. h. die gegebene Funktion **f**(x) ist gleich der Ableitung **F'**(x) der gesuchten Funktion **F**(x). Die gegebene Funktion **f**(x) = **F'**(x) soll wieder in ihren ursprünglichen, nicht abgeleiteten Zustand **F**(x) überführt werden. Diesen Prozeß nennt man **Integrieren** oder Integration.[1]

1. **Funktion** und **Ableitungsfunktion** (⇨ Differentialfunktion)

Beispiel zur Wiederholung

- gegeben: **Funktion y** = f (x) = 3 $\mathbf{x}^4$
- gesucht: **Ableitungsfunktion** $y' = \frac{dy}{dx} = ?$
- Lösung : Nach den Regeln der **Differentialrechnung** gilt (in diesem Fall gemäß der Potenzregel):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(3x^4\right)}{dx} = 12\,x^3$$

In Worten: Die Ableitungsfunktion **y '** = f ' (x) "**stammt**" von der Funktion **y** = f (x) ab. Oder anders ausgedrückt: Die Funktion **y** = f (x) ist die "**Stammfunktion**" der Ableitungsfunktion **y '** = f '(x).

2. **Funktion** und **Stammfunktion** (⇨ Integralfunktion)

Beispiel

- gegeben: **Funktion** y = f (x) = 12 x^3
- gesucht: **Stammfunktion Y** = **F**(x) = $\int y\,dx$ = **?**

  In Worten: Von welcher Funktion **Y** = **F** (x) "stammt" die Funktion **y** = **f** (x) im Sinne der Differentialrechnung ab, oder kurz: wie lautet die "Stammfunktion" **Y** = **F** (x) der Funktion **y** = **f**(x) **?**

- Lösung: Nach den Regeln der **Integralrechnung** gilt (in diesem Fall gemäß der Potenzregel):

$$Y = \int y\,dx = \int 12\,x^3\,dx = 3\,x^4 + C$$

- Probe: $Y = 3\,x^4 + C \quad \Rightarrow \quad Y' \stackrel{?}{=} y$

$$Y' = \frac{dY}{dx} = \frac{d\left(3\,x^4 + C\right)}{dx} = 12\,x^3 \stackrel{!}{=} y$$

> ▶ Definition: Eine Funktion **Y = F** (x) heißt **Stammfunktion** einer **Funktion y = f** (x) , wenn deren **1. Ableitung Y ' = F** ' (x) **gleich** der **Funktion y = f** (x) ist, d.h. wenn **Y ' = y** ist.

▶ Das **Symbol** $\int y\,dx$ beinhaltet die **Anweisung** , die Stammfunktion der Funktion **y** zu bestimmen.

▶ Beispiele: Bestimmen Sie die **Stammfunktionen** folgender Funktionen

(1) **y = 6 x** $\mathbf{^2}$ (2) **y = 1** (3) **y = x + 2** (4) **y =** $\sqrt{x}$ (5) **y =** $\mathbf{x^2}$ **– 2 x + 1**

---

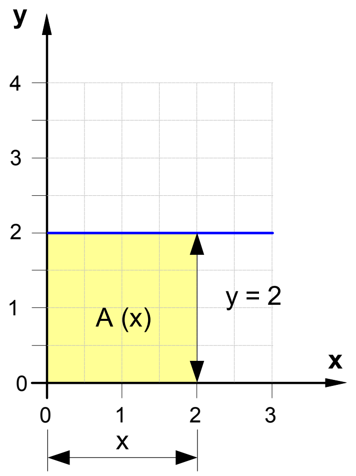
1 abgeleitet von *integratio* (lat.): Wiederherstellung bzw. von *restituere in integrum* (lat.): den alten Zustand wiederherstellen. Vgl.: Reidt-Wolff, Die Elemente der Mathematik, Oberstufe (Kurzausgabe), Paderborn 1966

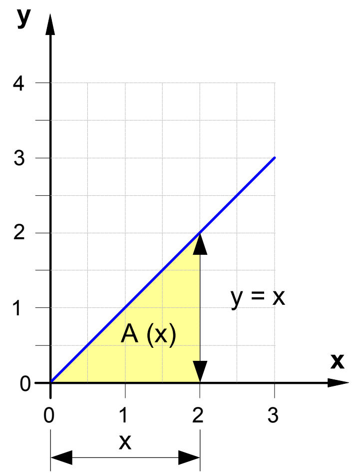
3. Die **Integralfunktion** (= Stammfunktion) als **Flächenfunktion**

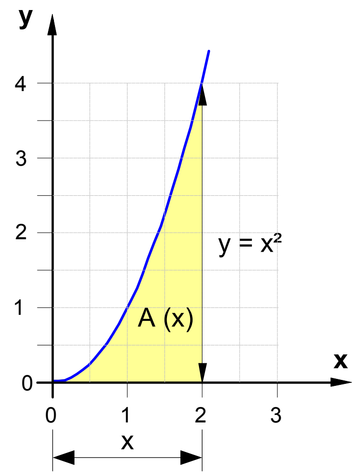
25.11.01 - exku3-2f.vsd

a) Die **Funktionen y = f (x)** geben an, wie sich die Werte von **y** in Abhängigkeit von **x** ändern.

$y = f(x) = 2 \cdot x^0$	$y = f(x) = x^1$	$y = f(x) = x^2$
Fläche A(x): $A(x) = y \cdot x$	Fläche A(x): $A(x) = \frac{1}{2} \cdot y \cdot x$	Fläche A(x): $A(x) = \frac{1}{3} \cdot y \cdot x$

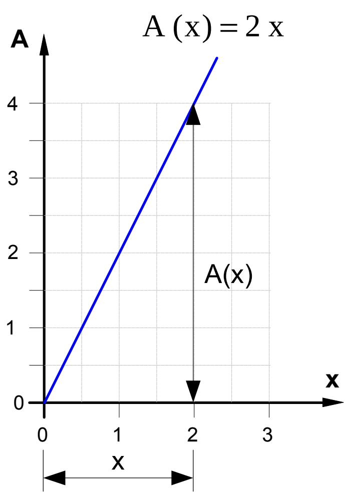


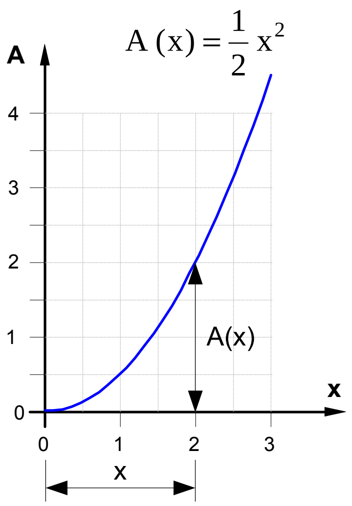


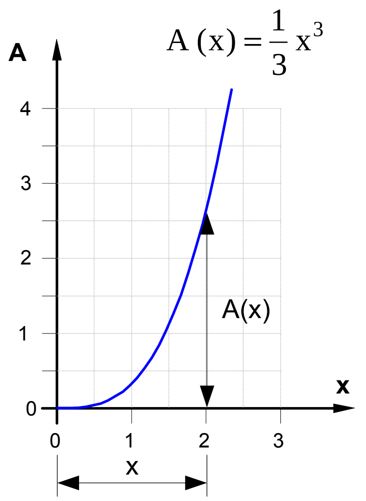


b) Die **Flächenfunktionen A = f (x)** geben an, wie sich die Flächen unter den Graphen von **y** = f (x) in Abhängigkeit von **x** ändern.

$A(x) = 2 \cdot x = 2 \cdot x^1$	$A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} x^2$	$A(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot x = \frac{1}{3} x^3$







▲ **Fazit:** $A(x) = Y = \int y \, dx$

(1) Die **Flächenfunktionen A = f (x)** sind offensichtlich die **Stammfunktionen** der jeweils gegebenen **Funktionen y = f (x)**, denn es gilt jeweils:

$A(x) = Y = 2x$	$A(x) = Y = \frac{1}{2} x^2$	$A(x) = Y = \frac{1}{3} x^3$
Probe: $Y' = 2 \overset{!}{=} y$	Probe: $Y' = x \overset{!}{=} y$	Probe: $Y' = x^2 \overset{!}{=} y$

(2) Die **Flächenfunktionen A = f (x)** sind damit **Integralfunktionen**, d.h.:

$A(x) = \int 2 \, dx = 2x$	$A(x) = \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2$	$A(x) = \int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3$

(3) Demnach gibt auch die **Integralfunktionen** $\int$ **y** d**x** an, wie sich die **Fläche A (x)** unter dem **Graphen** der **Funktion y** = f (**x**) in Abhängigkeit von x ändert.

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name: PH-13-1F.DOC - 30.11.01	
Arbeitsblatt Nr. **13** :	**Zeitintegrale in der Kinematik**	Seite **1**

1. Bestimmung der **Weg**funktion **s** = f (t) aus der **Geschwindigkeit**sfunktion **v** = f (t)

- **gegeben:** Beliebige **Geschwindigkeitsfunktion v**(t)
- **gesucht:** **Wegfunktion s** = f(t) zur Berechnung des Weges, den der Körper in einer beliebigen Zeit **t** zurückgelegt hat, d.h. also **s**(t) = **?**
- **Lösung:** Wir gehen von dem **Leitgedanken** aus, daß die *Flächen*zunahme unter der **v**(t)–Linie ein Maß für die *Weg*zunahme sei (Vgl. dazu den unten angegebenen Galilei-Text).

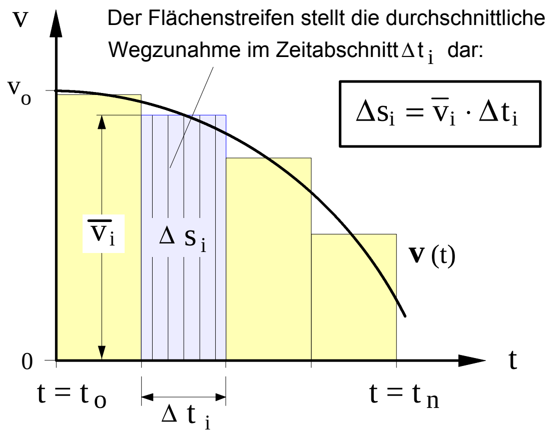


Bild 1 : Graph einer beliebigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion **v**(t)

$\overline{\mathbf{v}}_i$ ... Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitabschnitt $\Delta \mathbf{t}_i$

(1) **Näherungsweise** kann als Maß für den bis zum Zeitpunkt **t** = $\mathbf{t}_n$ zurückgelegten Weg **s**(t) die *Fläche* unter der ***Treppenlinie*** angenommen werden:

$$\boxed{s(t) \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i \cdot \Delta t_i}$$

In Worten: Der bis zum Zeitpunkt **t** = $\mathbf{t}_n$ zurückgelegte Weg **s**(t) ist näherungsweise die Summe aller Wegzunahmen $\Delta \mathbf{s}_i$ im Zeitraum von **t** = $\mathbf{t}_o$ bis **t** = $\mathbf{t}_n$.

(2) Eine **exakte Bestimmung** der *Fläche unter der* ***v–t–Linie*** und damit des bis zum Zeitpunkt **t** = $\mathbf{t}_n$ **tatsächlich zurückgelegten Weges s**(t) läßt sich aus der Grenzwertbetrachtung $\Delta \mathbf{t} \to \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{n} \to \infty$ gewinnen:

$$\boxed{s(t) = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i \cdot \Delta t_i = \int v(t)\, dt}$$

In Worten: Der zurückgelegte **Weg s**(t) ist das **Zeitintegral** der **Geschwindigkeit**.

(3) Kurzform des Lösungsweges

- geg.: **v**(t)
- ges.: **s**(t) = **?**
- Ansatz: $\mathbf{v}(t) = \dfrac{d\mathbf{s}(t)}{dt}$
- Lösung:

$$d\mathbf{s}(t) = \mathbf{v}(t) \cdot dt$$
$$\int d\mathbf{s}(t) = \int \mathbf{v}(t) \cdot dt$$
$$\mathbf{s}(t) = \int \mathbf{v}(t) \cdot dt$$

- Bedeutung des *Integralsymbols*: Gesucht wird die Stammfunktion **s**(t), also jene Funktion **s**(t), deren 1. Ableitung nach der Zeit die Funktion **v**(t) ist.

- Erstmalige Darstellung des **Integrationsprinzips** von **Galileo Galilei** aus dem Jahre 1630

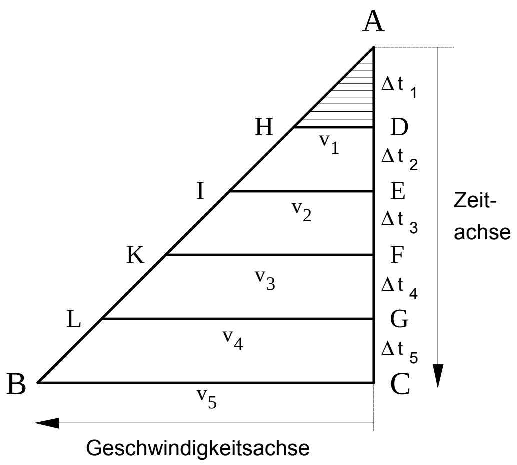


Bild 2 : Graphische Darstellung von Galilei zur Erläuterung des Integrationsprinzips (Achsenkennzeichnung von mir, J.S.)

Galilei entwickelte das Prinzip der Integration am Beispiel der von ihm als gleichförmig angenommenen Beschleunigung beim freien Fall: "Um also die unendliche Anzahl der Geschwindigkeitsstufen zu versinnlichen, welche der Stufe DH vorangehen, muß man sich unendlich viele kleinere und immer kleinere Linien denken, welche man sich parallel zu DH von den unendlich vielen Punkten der Linie DA aus gezogen zu denken hat. *Diese* ***unendliche Anzahl von Linien*** *stellt uns aber schließlich die* ***Fläche*** *des Dreiecks AHD dar. So können wir uns vorstellen, jede von dem Körper* ***zurückgelegte Strecke****, welche vom Ruhezustand aus in gleichförmig beschleunigter Bewegung passiert wird, habe unendlich viele Geschwindigkeitsstufen verbraucht und erforderlich gemacht, entsprechend den unendlich vielen Linien*, welche man von Punkt A beginnend, parallel der Linie HD sich gezogen denkt und desgleichen parallel den Linien IE, KF, LG, BC, wobei die Bewegung beliebig weit fortgesetzt werden kann." (Hervorhebungen von mir, J.S.)

aus: Galileo Galilei, Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme (1635), Leipzig 1891 (Nachdruck: Darmstadt 1982), S.243 f.

2. Bestimmung der **Geschwindigkeit**sfunktion **v** = f (t) aus der **Beschleunigung**sfunktion **a** = f (t)

- **gegeben:** Beliebige **Beschleunigungsfunktion a**(t)
- **gesucht: Geschwindigkeitsfunktion v** = f(t) zur Berechnung der Momentangeschwindigkeit, die der Körper in einer beliebigen Zeit **t** erzielt, d.h. also **v**(t) = **?**
- **Lösung:** Wir gehen von dem **Leitgedanken** aus, daß die *Flächen*zunahme unter der **a**(t)–Linie ein Maß für die *Geschwindigkeits*zunahme sei.

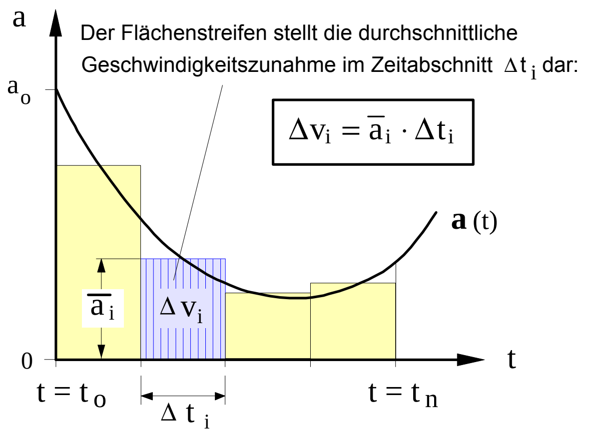


Bild 1 : Graph einer beliebigen Beschleunigung-Zeit-Funktion **v**(t)

$\bar{\mathbf{a}}_i$ ... Durchschnittsbeschleunigung im Zeitabschnitt Δt_i

(1) Näherungsweise kann als Maß für die im Zeitpunkt $\mathbf{t} = \mathbf{t_n}$ erreichte Momentangeschwindigkeit **v**(t) die *Fläche* unter der ***Treppenlinie*** angenommen werden:

$$\boxed{v(t) \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \cdot \Delta t_i}$$

In Worten: Die im Zeitpunkt $\mathbf{t} = \mathbf{t_n}$ erreichte Momentangeschwindigkeit **v**(t) ist näherungsweise die Summe aller durchschnittlichen Geschwindigkeitszunahmen $\Delta \mathbf{v}_i$ im Zeitraum von $\mathbf{t} = \mathbf{t_o}$ bis $\mathbf{t} = \mathbf{t_n}$.

(2) Eine **exakte Bestimmung** der *Fläche unter der* ***a–t–Linie*** und damit der bis zum Zeitpunkt $\mathbf{t} = \mathbf{t_n}$ **tatsächlich erreichten Momentangeschwindigkeit v**(t) läßt sich aus der Grenzwertbetrachtung $\Delta\mathbf{t} \to \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{n} \to \infty$ gewinnen:

$$\boxed{v(t) = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \cdot \Delta t_i = \int a(t)\,dt}$$

In Worten: Die **Geschwindigkeit v**(t) ist das **Zeitintegral** der **Beschleunigung**.

(3) Kurzform des Lösungsweges

- geg.: **a**(t)
- ges.: **v**(t) = **?**
- Ansatz: $\mathbf{a}(t) = \dfrac{d\,\mathbf{v}(t)}{dt}$
- Lösung:

$$d\,\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}(t) \cdot dt$$
$$\int d\,\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t) \cdot dt$$
$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t) \cdot dt$$

- Bedeutung des *Integralsymbols*: Gesucht wird die Stammfunktion **v**(t), also jene Funktion **v**(t), deren 1. Ableitung nach der Zeit die Funktion **a**(t) ist.

---

3. **Anwendung** der **Zeitintegrale** auf die **gleichmäßig beschleunigte Bewegung**

$$\boxed{a(t) = a = \text{const.}}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int dv = \int a \cdot dt$$

$$v = \int a \cdot dt \quad \text{mit} \quad a = \text{const.}$$

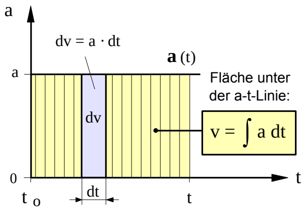
$$\boxed{v(t) = a \cdot t + v_0}$$

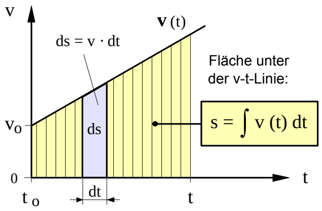
$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad ds = v \cdot dt$$

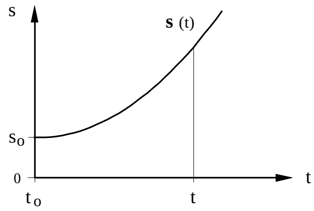
$$\int ds = \int v \cdot dt \;\Rightarrow\; s = \int v \cdot dt$$

$$s(t) = \int v(t) \cdot dt = \int (a \cdot t + v_0) \cdot dt$$

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0}$$

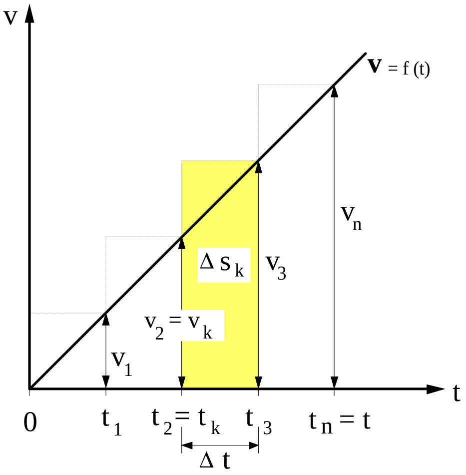






4. Mathematische Formalisierung des Integrationsprinzips von Galilei:

Das Zeitintegral $\int v\,dt$ als Grenzwert einer Summe



- gegeben : **v**(t) = **a · t** , wobei **a** = **const.**
- gesucht : **s**(t) = **?**
- Lösung :

(1) **Näherungsweise** gilt für den in der Zeitspanne D**t** zurückgelegten Weg Ds$_k$ (≙ der Fläche des Rechteckstreifens) :

[1] Ds$_k$ = v$_k$ · Dt mit k = 1, 2, ... n

(2) **Näherungsweise** gilt für den in der Zeit **t** = **t**$_n$ zurückgelegten Weg **s** (≙ der Fläche unter der Treppenlinie) :

[2] $s \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \Delta t$ mit $v_k = a \cdot t_k$ gilt dann : [3] $s \approx \sum_{k=1}^{n} a \cdot t_k \cdot \Delta t$

[4] $s \approx \sum_{k=1}^{n} a \cdot t_k \cdot \Delta t = (a \cdot t_1) \cdot \Delta t + (a \cdot t_2) \cdot \Delta t + ... + (a \cdot t_n) \cdot \Delta t$ [4a] mit $t_1 = 1 \cdot \Delta t$; $t_2 = 2 \cdot \Delta t$; ...; $t_n = n \cdot \Delta t$

[5] $s \approx \sum_{k=1}^{n} a \cdot (k \cdot \Delta t) \cdot \Delta t = a(1 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t + a(2 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t + ... + a(n \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$

[6] $s \approx \sum_{k=1}^{n} a \cdot k \cdot \Delta t^2 = a \cdot 1 \cdot \Delta t^2 + a \cdot 2 \cdot \Delta t^2 + ... + a \cdot n \cdot \Delta t^2$

[7] $s \approx a \cdot \Delta t^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = a \cdot \Delta t^2 \cdot (1 + 2 + ... + n)$ [7a] mit $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$

[8] $s \approx a \cdot \Delta t^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot (n+1)$ mit $\Delta t = \frac{t}{n}$ (siehe [4a])

[9] $s \approx a \cdot \left(\frac{t}{n}\right)^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot (n+1) = a \cdot \frac{t^2}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n+1) = a \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2n} \cdot (n+1)$

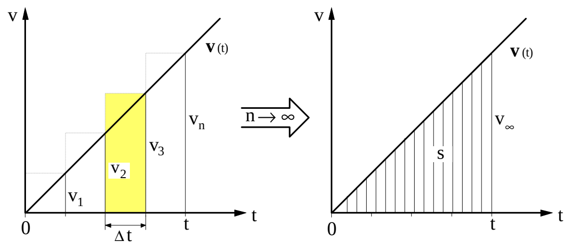
[10] $s \approx a \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot (n+1) = a \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(3) **Grenzwertbildung** und **Grenzübergang** für **n** ® ¥ zur Ermittlung des in der Zeit **t** tatsächlich zurückgelegten Weges (≙ der Fläche unter der v-t-Linie) :

[11] $s = \int a \cdot t \; dt = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a \cdot t_k \cdot \Delta t = \lim_{n \to \infty} a \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Wenn $n \to \infty$ geht, dann geht $\frac{1}{n} \to 0$ und für den Grenzübergang gilt: $\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$.

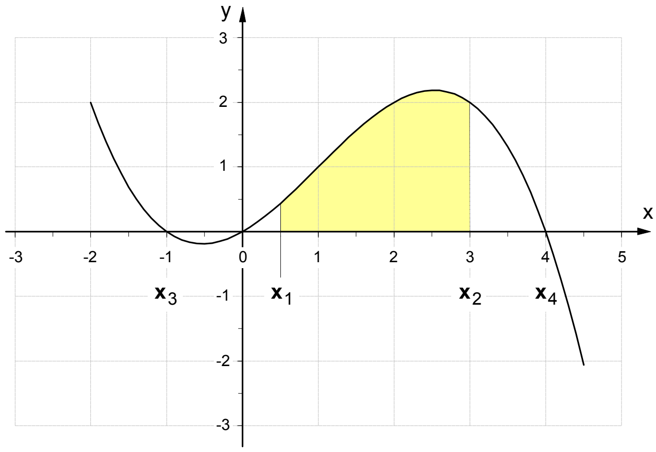
[12] Damit wird $s = \int a \cdot t \; dt = a \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2} \; (1+0)$ und wir erhalten das bereits bekannte Weg – Zeit – Gesetz :



$$\boxed{s = \int a \cdot t \; dt = \frac{1}{2} \, a \cdot t^2}$$

Galilei: "So können wir uns vorstellen, jede von dem Körper zurückgelegte Strecke, ..., habe unendlich viele Geschwindigkeitsstufen verbraucht und erforderlich gemacht, entsprechend den unendlich vielen Linien." (siehe S.1 des Arbeitsblattes)

1. **Flächenberechnung** mit Hilfe des **bestimmten Integrals** – Eine exemplarische Einführung



- **gegeben :** $y = f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x$
- **gesucht :** Zu bestimmen ist der Inhalt des Flächenstücks, das von der **x**-Achse und dem Graphen eingeschlossen wird, und zwar

a) in den Grenzen zwischen $\mathbf{x_1 = +0{,}5}$ und $\mathbf{x_2 = +3{,}0}$ sowie

b) in den Grenzen zwischen $\mathbf{x_3 = -1}$ und $\mathbf{x_4 = +4}$.

- **Lösung :**

a) Flächenstück in den Grenzen zwischen $\mathbf{x_1 = +0{,}5}$ und $\mathbf{x_2 = +3{,}0}$:

$$A = \int_{0,5}^{3,0} y\,dx = \int_{0,5}^{3,0} \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x\right)\,dx$$

►Die **Lösung des Integrals** (= Stammfunktion) liefert die **Flächenformel** : $A = \left[-\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2\right]_{+0,5}^{+3,0}$

►Setzt man in die Flächenformel die **Integrationsgrenzen** ein, so ergibt sich für den Flächeninhalt :

$$A = \left[-\frac{1}{24}\mathbf{3{,}0}^4 + \frac{1}{6}\mathbf{3{,}0}^3 + \frac{1}{3}\mathbf{3{,}0}^2\right] - \left[-\frac{1}{24}\mathbf{0{,}5}^4 + \frac{1}{6}\mathbf{0{,}5}^3 + \frac{1}{3}\mathbf{0{,}5}^2\right] = [4{,}125] - [0{,}1016]$$

$A = 4{,}0234$ FE (Flächeneinheiten)

b) Flächenstück in den Grenzen von $\mathbf{x_3 = -1}$ bis $\mathbf{x_4 = +4}$: **Lösung** auf gesondertem Blatt als **Hausaufgabe!**

---

2. **Anwendungsbeispiel** aus der Kinematik : **Ungleichförmig beschleunigte Bewegung**

Im Rahmen eines Brems- und Crash-Tests wurden die Geschwindigkeitswerte des Testfahrzeugs mit Hilfe eines elektronischen Fahrtenschreibers registriert. Die Auswertung dieser Daten ergab, daß sich die Bewegung des Fahrzeugs während der letzten **5** Sekunden unmittelbar vor dem Aufprall auf eine Betonwand mit folgender Bewegungsgleichung hinreichend genau beschreiben läßt :

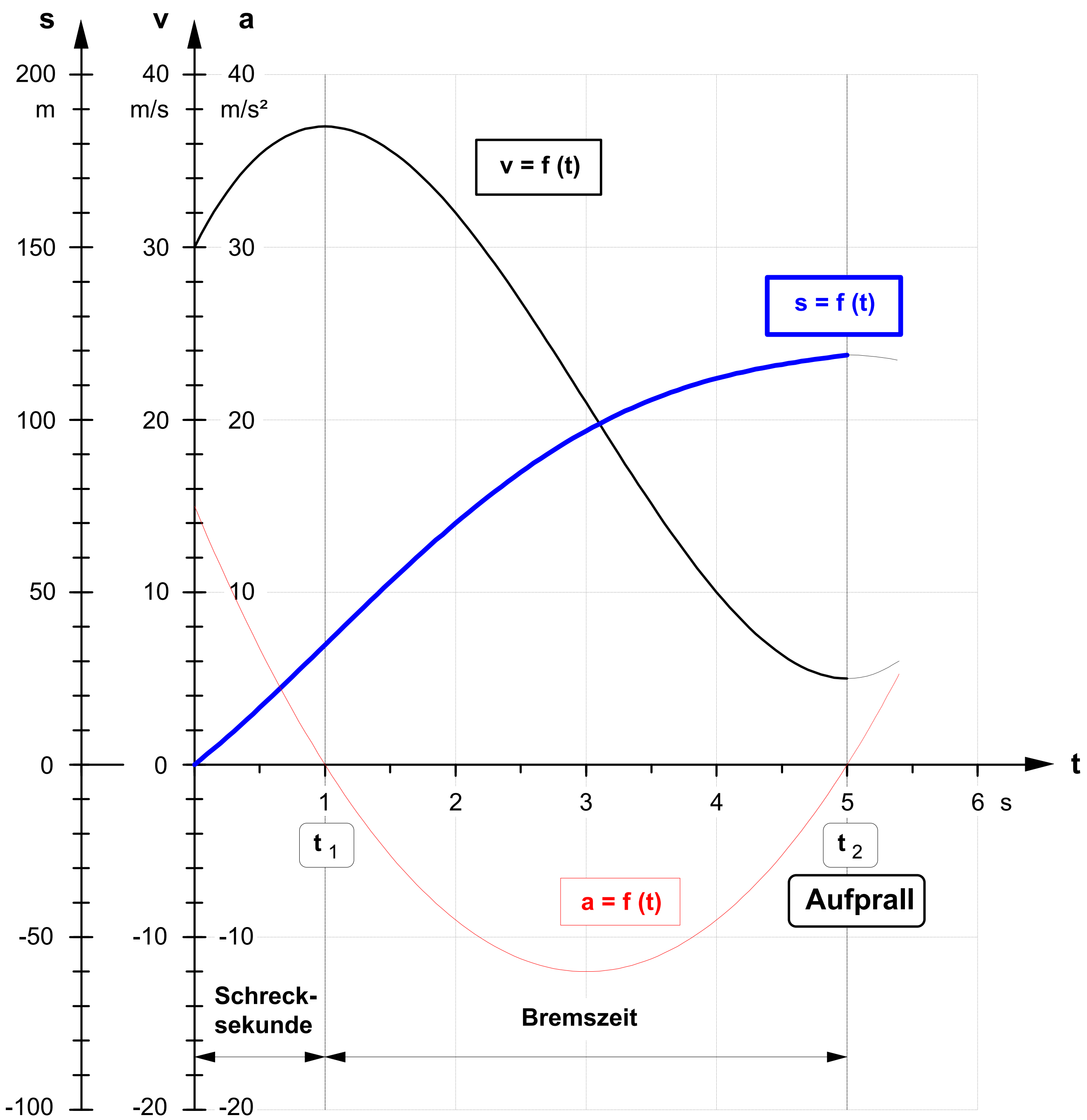
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{1}\frac{m}{s^4}\,\mathbf{t}^3 - \mathbf{9}\frac{m}{s^3}\,\mathbf{t}^2 + \mathbf{15}\frac{m}{s^2}\,\mathbf{t} + \mathbf{30}\frac{m}{s}$$

a) Wie groß war die **Geschwindigkeit** des Fahrzeugs
- nach Ablauf der in dem Testlauf enthaltenen "Schrecksekunde" (nach $\mathbf{t_1 = 1}$ s) und
- zum Zeitpunkt des Aufpralls (nach $\mathbf{t_2 = 5}$ s) **?**

b) Welchen **Weg** legte das Fahrzeug
- während der "Schrecksekunde" und
- im Verlauf des Bremsvorganges zurück **?**

c) Stellen Sie die **v-t-Funktion**, die **a-t-Funktion** und die **s-t-Funktion** in **einem** Zeitdiagramm dar.

Zeitdiagramme zur Aufgabe **2.** von Seite 4 des Arbeitsblattes Nr. 13



• **Geschwindigkeit**–Zeit–Funktion:

$$v(t) = 1\,\frac{m}{s^4}\cdot t^3 - 9\,\frac{m}{s^3}\cdot t^2 + 15\,\frac{m}{s^2}\cdot t + 30\,\frac{m}{s}$$

• **Beschleunigung**–Zeit–Funktion:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 3\,\frac{m}{s^4}\cdot t^2 - 18\,\frac{m}{s^3}\cdot t + 15\,\frac{m}{s^2}$$

• **Weg**–Zeit–Funktion:

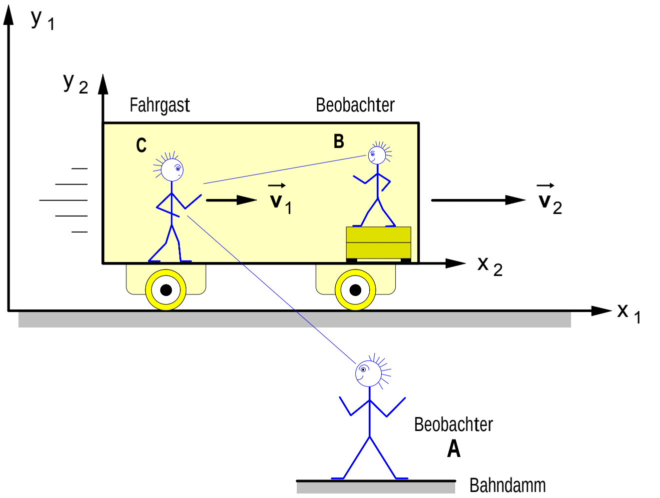
$$s(t) = \int v(t)\,dt = 0{,}25\,\frac{m}{s^4}\cdot t^4 - 3\,\frac{m}{s^3}\cdot t^3 + 7{,}5\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2 + 30\,\frac{m}{s}\cdot t$$

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK** | Name: | PHY-14-F.DOC - 10.02.03

Arbeitsblatt Nr. **14** : **Überlagerung** (»Superposition«) von Bewegungen: **Einführung**

- **Beispiel 1** : **Laufbewegung** eines **Fahrgastes in einem fahrenden Eisenbahnzug**

a) Fahrgast **C** bewegt sich **in** Fahrtrichtung des Zuges



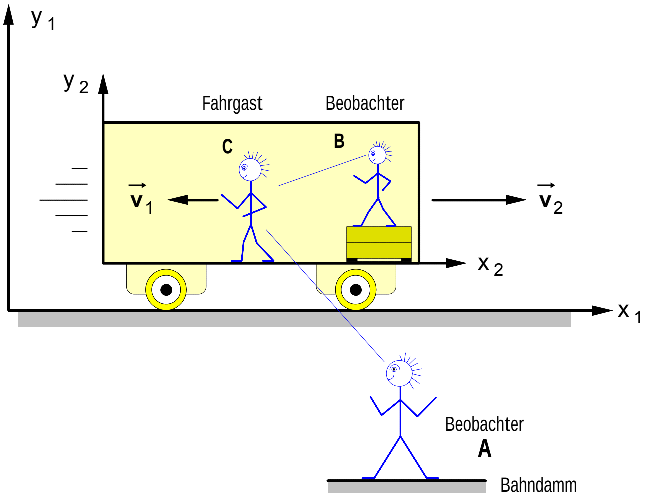
- Der **mitbewegte Beobachter B** nimmt den Zug als ruhendes Bezugssystem S2 an und stellt fest:
  - ▶ Der Fahrgast **C** bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ (Beispiel: Der Betrag sei **0,8** m/s.)
- Der **ruhende Beobachter A** nimmt die Erde als ruhendes Bezugssystem S1 an und stellt fest:
  - ▶ Der **Zug** bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2$ (Beispiel: Der Betrag sei **5** m/s)
  - ▶ Der Fahrgast **C** bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$\underline{\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2}$$

für die **Beträge** gilt:

$\mathbf{v} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ = 0,8 m/s + 5 m/s = **5,8** m/s

b) C bewegt sich **gegen** die Fahrtrichtung des Zuges



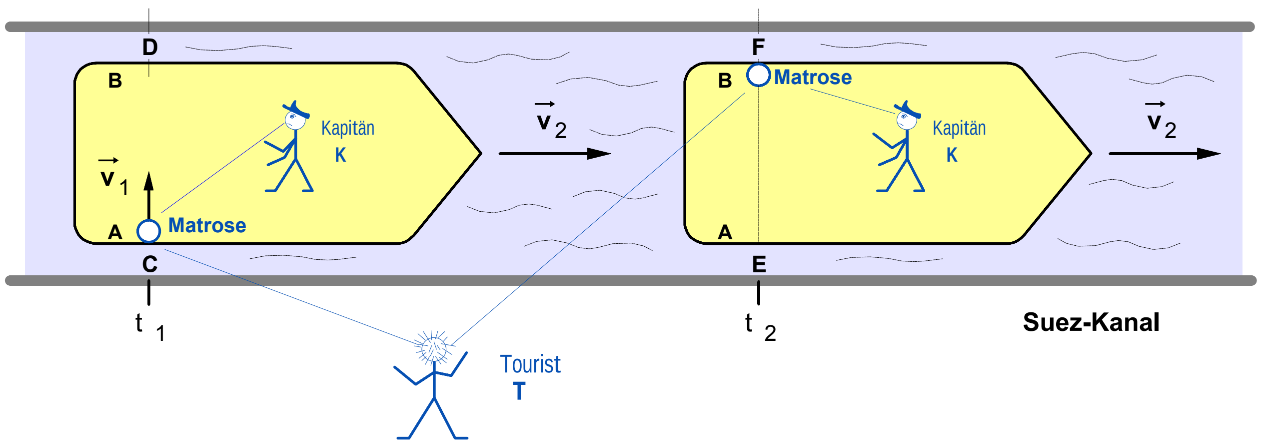
- Der **mitbewegte Beobachter B** nimmt den Zug als ruhendes Bezugssystem S2 an und stellt fest:
  - ▶ Der Fahrgast **C** bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ (Der Betrag sei auch hier **0,8** m/s.)
- Der **ruhende Beobachter A** nimmt die Erde als ruhendes Bezugssystem S1 an und stellt fest:
  - ▶ Der **Zug** bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2$ (Der Betrag sei auch hier **5** m/s)
  - ▶ Der Fahrgast **C** bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$\underline{\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2}$$

für die **Beträge** gilt in diesem Fall:

$\mathbf{v} = -\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ = **– 0,8** m/s + **5** m/s = **4,2** m/s

- **Beispiel 2** : **Laufbewegung** eines **Matrosen quer zur Fahrtrichtung eines Schiffes**



Wir wollen annehmen, ein **Matrose** habe sich in der Zeit **t = 20 s** aus der Perspektive

- eines auf dem Schiff **mitbewegten Beobachters** (z.B. des Kapitäns) mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ (der Betrag sei $\mathbf{v_1}$ = **1,5** m/s) von **A** nach **B** bewegt.
- eines am Kanalufer **ruhenden Beobachters** (z.B. eines Touristen) mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ von **C** nach **F** bewegt, während sich das Schiff gleichzeitig mit $\vec{v}_2$ (der Betrag sei $\mathbf{v_2}$ = **3** m/s) von **C** nach **E** bewegt hat.
  - **a)** Mit welcher Geschwindigkeit $\vec{v}$ hat sich der Matrose aus der Sicht des Touristen bewegt?
  - **b)** Welchen **Weg** $\vec{s}$ hat der Matrose in der Zeit **t** aus der Sicht des Touristen zurückgelegt?

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name: PHY-14A.DOC - 10.02.03
Arbeitsblatt Nr. **14 a)** : **Überlagerung** von Bewegungen: **Vektordarstellung**	

1. Zum **Begriff** der **Vektorgröße** in der Physik

> Eine **Vektorgröße** (von *vectus* (lat.): *gerichtet*) ist eine physikalische Größe, die sowohl einen **Betrag** als auch eine **Richtung** besitzt.

- Vektorgrößen (Beispiele): Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Weg, Feldstärke
- Physikalische Größen, die im Gegensatz zu Vektoren **allein** durch die Angabe eines **Betrages** (= Zahlenwert x Maßeinheit) vollständig bestimmt sind, heißen **skalare Größen** (Beispiele: Zeit, Temperatur, Masse, Ladung).

2. **Symbolische Darstellung** von **Vektorgrößen**

a) Formelzeichen: Den **Vektorcharakter** einer physikalischen Größe kennzeichnen wir durch einen kleinen Pfeil über dem Formelzeichen (z.B. $\vec{F}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{E}$). Will man lediglich eine Angabe über den **Betrag** einer Vektorgröße machen, läßt man den kleinen Pfeil einfach weg; **v** ist z.B. der **Betrag** des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$.

b) Geometrische Darstellung einer Vektorgröße als **Vektorpfeil**

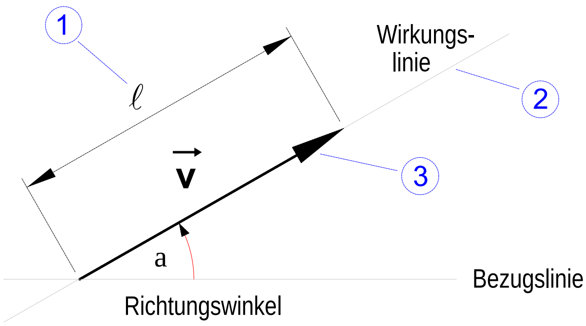


Bild **1**: Pfeildarstellung eines Vektors

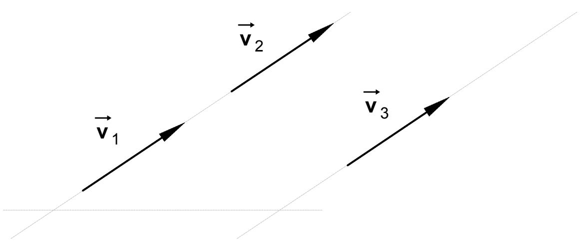
- Der **Betrag** (Zahlenwert x Maßeinheit) einer Vektorgröße wird durch die **Länge** ① des Vektorpfeiles dargestellt. Dies erfordert stets die Festlegung eines **Maßstabes** (z.B. für einen Geschwindigkeitsvektor 2 m/s pro Zentimeter oder kürzer: $\mathbf{m}_V$ = 2 ms^{-1}/cm).
- Die **Richtung** einer Vektorgröße wird angegeben durch

  ② die **räumliche Lage** des Vektorpfeiles (auf seiner Wirkungslinie) gegenüber einer beliebig wählbaren Bezugslinie (z.B. durch den Richtungswinkel α) und

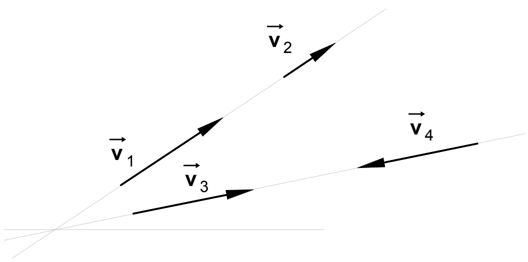
  ③ die **Orientierung** des Vektorpfeiles, d.h. den Durchlaufsinn vom Anfangspunkt zum Endpunkt (Spitze) des Pfeiles.

> Zwei Vektorgrößen sind nur dann **gleich**, wenn sie sowohl den **gleichen Betrag** als auch die **gleiche Richtung** haben. Demnach sind **zwei Vektorpfeile** nur dann **gleich**, wenn sie bei gleichem Maßstab die **gleiche Länge**, die **gleiche räumliche Lage** gegenüber derselben Bezugslinie und die **gleiche Orientierung** haben. Daher können Vektoren auch beliebig **parallel verschoben** werden.

- Bild **2**: *gleiche* Vektoren



- Bild **3**: *ungleiche* Vektoren



3. **Regel** über die **Addition** von **Vektoren** (auch: *geometrische* Addition)

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2}$$

> Zur Bestimmung der *geometrischen* Summe der beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ wird über die beiden Vektoren ein Parallelogramm aufgespannt. Der **Summenvektor** $\vec{v}$ (auch resultierender Vektor genannt) ist stets die Parallelogramm-**Diagonale zwischen** den beiden Vektorsummanden $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$.

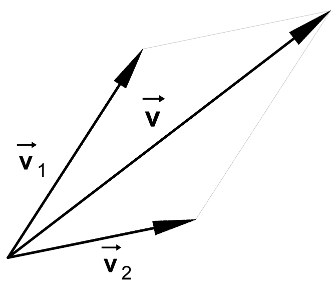


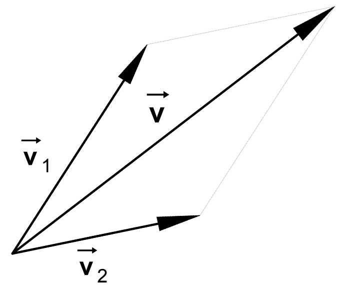
Bild **4**: Geometrische Addition zweier Vektoren

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name:	PHY-14B.DOC - 25.02.08
Arbeitsblatt Nr. **14 b)** : **Überlagerung** von Bewegungen: **Prinzip** und **Aufgabenbeispiele**		

1. Über Körper, die gleichzeitig zwei oder mehrere geradlinige Bewegungen ausführen

Zum **Prinzip der ungestörten Überlagerung** von Bewegungen

- Wenn ein Körper unter zwei oder mehreren Einflüssen steht, die ihn jeder für sich zu einer Bewegung veranlassen, wenn der Köper also **mehrere Bewegungen gleichzeitig** ausführt, so überlagern sich diese verschiedenen Bewegungen *unabhängig*, d.h. ohne sich gegenseitig zu beeinflussen und zu stören (*Unabhängigkeitsprinzip*).
- Führt ein Körper **gleichzeitig** zwei verschieden gerichtete Bewegungen mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aus, so bewegt er sich in Richtung der ***resultierenden Geschwindigkeit*** $\vec{v}$. Der Betrag und die Richtung dieser *resultierenden Geschwindigkeit* $\vec{v}$ ergibt sich durch die ***vektorielle* Addition** der beiden Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ gemäß dem Parallelogrammsatz. Zur Bestimmung des *resultierenden* ***Weg***vektors $\vec{s}$ sind die Wegvektoren $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$ in analoger Weise *vektoriell* zu addieren.



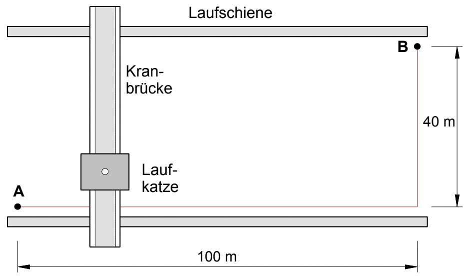
Überlagerung von zwei Geschwindigkeiten durch **Vektoraddition** gemäß dem Parallelogrammsatz

2. **Aufgabenbeispiele** zur Überlagerung von zwei *geradlinigen* Bewegungen mit *konstanten* Geschwindigkeiten

1. Die rechts dargestellte Kranbrücke mit Laufkatze soll in der Lage sein, in einer Werkhalle Lasten in **25** s vom Ort **A** zum Ort **B** zu befördern.

Mit welchen Durchschnittsgeschwindigkeiten müssen die Kranbrücke auf den Laufschienen ($\mathbf{v}_1$), die Laufkatze auf der Kranbrücke ($\mathbf{v}_2$) und schließlich die Laufkatze durch die Werkhalle ($\mathbf{v}$) bewegt werden können ?

[4 m/s ; 1,6 m/s ; 4,31 m/s]

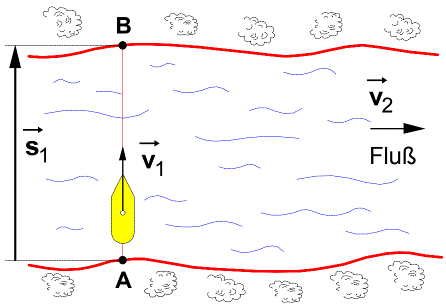


2. Ein Boot überquert einen Fluß mit der Breite $\mathbf{s}_1$ = **180** m. Die Stömungsgeschwindigkeit beträgt $\mathbf{v}_2$ = **5,4** km/h. (siehe dazu die Abb. rechts).

a) Mit welcher Geschwindigkeit **v** bewegt sich das Boot über den Fluß, wenn es durch seinen Antrieb die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_1$ = **7,2** km/h erhält und von **A** aus in Richtung **B** gesteuert wird ? [9 km/h]

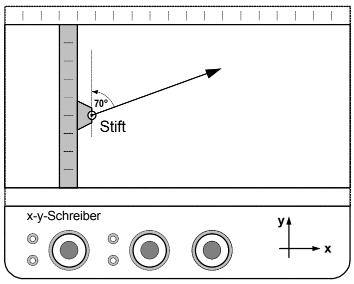
b) Welche Wegstrecke $\mathbf{s}_2$ wird das Boot abgetrieben, wie lange dauert die Fahrt zum anderen Ufer und welchen Weg **s** legt das Boot dabei insgesamt zurück ? [135 m ; 90 s ; 225 m]

c) Wie lange dauert die Überfahrt, wenn das Boot so gesteuert wird, daß es an dem gegenüberliegenden Ufer bei **B** ankommt ? [136,4 s]



3. Der Stift eines x-y-Schreibers soll sich aus der in der Abbildung rechts angegebenen Startposition bei einer Geschwindigkeit von 15 cm/s in y-Richtung gegenüber der Senkrechten unter einem Winkel von 70° in der angegebenen Richtung bewegen.

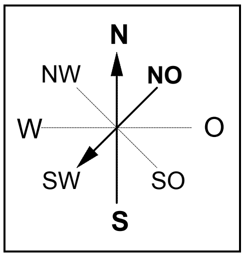
Mit welcher Geschwindigkeit muss er sich in x-Richtung bewegen? [41,2 cm/s]



4. Bei optimaler Ausnutzung der Antriebsleistung seiner Triebwerke benötigt ein Flugzeug bei Windstille für die **800** km lange Flugstrecke von München nach Hamburg (Süd-Nord-Richtung) eine reine Flugzeit von **2** Stunden und **28** Minuten.

a) Mit welcher Verspätung muß mindestens gerechnet werden, wenn während des gesamten Fluges ein Nord-Ost-Sturm mit einer mittleren Windgeschwindigkeit $\mathbf{v}_2$ = 108 km/h die Flugbewegung beeinträchtigt ? [53,3 min]

b) Wie lange würde der Flug mindestens dauern, wenn auf der gesamten Flugstrecke Süd-West-Wind mit einer mittleren Geschwindigkeit von $\mathbf{v}_3$ = 90 km/h herrschen würde ? [2 h 6 min]



Windrose

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name:	PHY-15-L.DOC - 18.01.05
Arbeitsblatt Nr. **15** :	**Die gleichförmige Kreisbewegung**	Seite **1**

1. Die **Bahngeschwindigkeit** bei der **gleichförmigen Kreisbewegung**

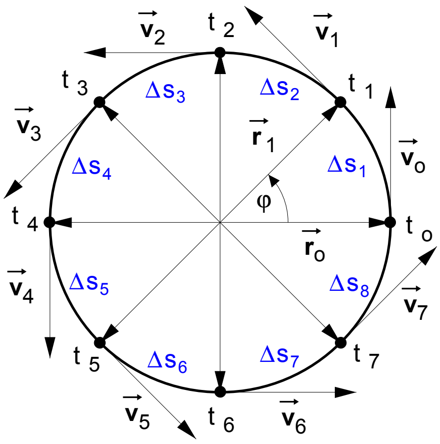


Bild 1: Auf einer Kreisbahn rotierender Massepunkt

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung

- ▶ gilt für die **Beträge**:
  $\mathbf{v_o = v_1 = v_2 = v_3 = \dots}$,
- ▶ für die **Vektoren** jedoch:
  $\vec{v}_o \neq \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2 \neq \vec{v}_3 \neq \dots$

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist der **Betrag v** der Bahngeschwindigkeit in jedem Augenblick gleich groß, d.h. der auf einer Kreisbahn rotierende Massepunkt legt in gleichen Zeitabschnitten **Δt** stets gleiche Wegabschnitte **Δs** (Kreisbogenabschnitte) zurück. Daraus folgt für die Bestimmung des **Betrages** der **Bahngeschwindigkeit**:

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Bei einem **vollen Umlauf** in der Zeit **Δt** = **T** (Umlauf- oder Periodendauer) legt der Massepunkt den Weg **Δs** = **2 · p · r** (Kreisumfang) zurück. Damit ergibt sich für den

· Betrag der **Bahngeschwindigkeit** :

$$\boxed{v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}}$$

r ... Radius der Kreisbahn in m
T ... Umlaufdauer in s
v ... Bahngeschwindigkeit in m / s

2. Die **gleichförmige Kreisbewegung** als **beschleunigte Bewegung**

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung sind lediglich die **Beträge** der Bahngeschwindigkeit konstant. Indessen **ändert** sich in jedem Moment die **Richtung** der Bewegung. Damit ändert sich auch in jedem Moment der **Vektor** der **Bahngeschwindigkeit**. Aufgrund dieser **vektoriellen** Form der **Geschwindigkeitsänderung** handelt es sich bei einer gleichförmigen Kreisbewegung stets um eine **beschleunigte Bewegung !!** Wir wollen im folgenden diese Geschwindigkeitsänderung bestimmen.

· Ermittlung der **Geschwindigkeitsänderung** $\Delta\vec{v}$

▶ Da die **Beträge** der Geschwindigkeits- und Radiusvektoren gleich sind, können wir schreiben:

$$\mathbf{v_1 = v_o = v}$$
$$\mathbf{r_1 = r_o = r}$$

▶ Da beide Dreiecke **ähnlich** sind, läßt sich der **Betrag** der Geschwindigkeits**änderung** nach dem Strahlensatz wie folgt bestimmen:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \quad \Rightarrow \quad \Delta v = \Delta r \cdot \frac{v}{r}$$

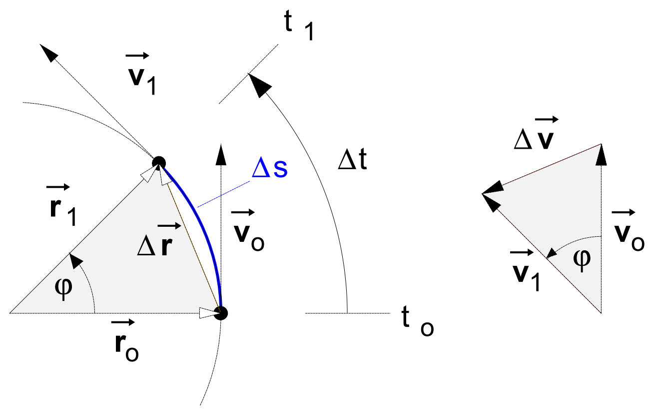


Bild 2 : Bestimmung der **Geschwindigkeitsänderung** $\Delta\vec{v}$

▶ Demnach erfährt der Körper in der Zeit **Δt** die Geschwindigkeitsänderung **Δv** und gemäß der **Beschleunigungsdefinition** kann angegeben werden:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a \quad \text{mit} \quad \Delta v = \Delta r \cdot \frac{v}{r} \quad \text{ergibt sich für diese Beschleunigung} \quad a = \frac{\Delta r \cdot \frac{v}{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{v}{r}$$

▶ Für ***kleine Zeitabschnitte*** **Δt** kann angenommen werden, daß **Δr** ≈ **Δs** ist. Setzen wir **Δr** = **Δs** , so folgt daraus:

$$a = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{v}{r} \quad \text{mit} \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = v \ \text{(Bahngeschwindigkeit)} \quad \Rightarrow \quad a = v \cdot \frac{v}{r}$$

· Diese Beschleunigung **a** wird als **Zentripetalbeschleunigung** $\mathbf{a_z}$ bezeichnet.

$$\boxed{a_z = \frac{v^2}{r}}$$

v ... Bahngeschwindigkeit des Körpers in m/s
r ... Radius der Kreisbahn in m
$\mathbf{a_z}$ ... Zentripetalbeschleunigung in m/s²

3. Die **Winkelgeschwindigkeit** einer **gleichförmigen Kreisbewegung**

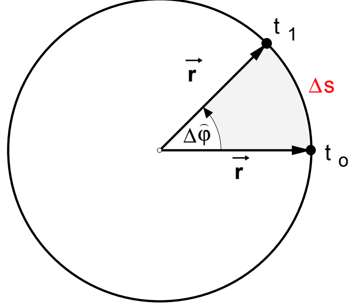


Bild 3: Auf einer Kreisbahn rotierender Massepunkt

Eine andere Möglichkeit zur Beschreibung der "Schnelligkeit" eines Massepunktes auf einer Kreisbahn ergibt sich aufgrund der Tatsache, daß der Radiusvektor $\vec{r}$ in jeder Zeitspanne Δt einen bestimmten Drehwinkel $\Delta\hat{\varphi}$ überstreicht. Den Quotienten aus dem überstrichenen Winkel $\Delta\hat{\varphi}$ und der dazu benötigten Zeit Δt nennt man **Winkelgeschwindigkeit** w. Zu beachten ist dabei, daß der Drehwinkel $\Delta\hat{\varphi}$ nicht im Gradmaß, sondern im *Bogenmaß* gemessen wird.

· Definition des **Betrages** der **Winkelgeschwindigkeit** :

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\hat{\varphi}}{\Delta t}}$$

$\Delta\hat{\varphi}$ ... Drehwinkel im Bogenmaß
Δt ... Zeit in s
ω ... Winkelgeschwindigkeit in 1 / s

Daraus folgt für einen rotierenden **Körper**: **Alle Punkte eines rotierenden Körpers haben die gleiche Winkelgeschwindigkeit**.

· Hinweise zum **Bogenmaß**

Definition: $\boxed{\Delta\hat{\varphi} = \frac{\Delta s}{r}}$ Umrechnungsformel: $\boxed{\frac{\hat{\varphi}}{\varphi} = \frac{2\cdot\pi}{360°}}$

$\hat{\varphi}$ ... Winkel im Bogenmaß
φ ... Winkel im Gradmaß

Bei einem **vollen Umlauf** in der Zeit **Δt = T** (Umlauf- oder Periodendauer) überstreicht der Radiusvektor den **Vollwinkel** $\Delta\hat{\varphi}$ = **2 ·** p . Damit ergibt sich für die

· Berechnung des **Betrages** der bei der *gleichförmigen* Kreisbewegung *konstanten* **Winkelgeschwindigkeit** :

$$\boxed{\omega = \frac{2\cdot\pi}{T}}$$

T ... Umlaufdauer (Periodendauer) in s
ω ... Winkelgeschwindigkeit in 1 / s
f ... Frequenz in 1 / s

Oder mit $\frac{1}{T} = f$ gilt auch: $\boxed{\omega = 2\cdot\pi\cdot f}$

· Beziehung zwischen den **Beträgen** der **Bahngeschwindigkeit** und der **Winkelgeschwindigkeit**

Gemäß der Definition des Drehwinkels im Bogenmaß gilt für den Bogenabschnitt $\Delta s = r\cdot\Delta\hat{\varphi}$. Damit ergibt sich für den bei der gleichförmigen Kreisbewegung konstanten *Betrag* der Bahngeschwindigkeit zunächst

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r\cdot\Delta\hat{\varphi}}{\Delta t}$ (siehe Seite **1**) und mit $\frac{\Delta\hat{\varphi}}{\Delta t} = \omega$ schließlich: $\boxed{v = \omega\cdot r}$

· Beziehung zwischen den **Beträgen** der **Winkelgeschwindigkeit** und der **Zentripetalbeschleunigung** $\mathbf{a_z}$

$a_z = \frac{v^2}{r}$ (siehe Seite **1**). Mit $v = \omega\cdot r$ ergibt sich: $\boxed{a_z = \omega^2\cdot r}$

· Die **Richtung** der **Winkelgeschwindigkeit**

Die Richtung des Vektors $\vec{w}$ der Winkelgeschwindigkeit fällt mit der Drehachse zusammen, seine Orientierung stimmt mit der Richtung überein, in der sich ein in Drehrichtung geschraubter Korkenzieher verschieben würde (Korkenzieher- oder Rechtsschraubenregel).

· Für den *Vektor* $\vec{v}$ der **Bahngeschwindigkeit** gilt dann das **Vektorprodukt** (Kreuzprodukt):

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\cdot\vec{r}}$$

Richtungsregel: Dreht man den Vektor **vor** dem Kreuzsymbol ($\vec{w}$) in Richtung des Vektors **hinter** dem Kreuzsymbol ($\vec{r}$), so orientiert sich der Produktvektor $\vec{v}$ gemäß einer Rechtsschraube.

Für den **Betrag** der Bahngeschwindigkeit gilt unter Berücksichtigung des Winkels a zwischen $\vec{w}$ und $\vec{r}$ die Formel: $\boxed{v = \omega\cdot r\cdot\sin\alpha}$

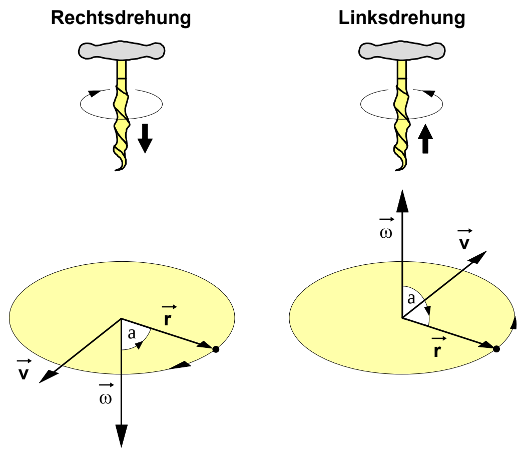


Bild 4: Korkenzieherregel zur Bestimmung der Orientierung des Vektors $\vec{w}$

Arbeitsblatt Nr. **15 a)** : **Übungsaufgaben zur gleichförmigen Kreisbewegung**

1. Ein Auto fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von **108** km/h.

a) Wie oft dreht sich ein Rad pro Sekunde, wenn der Raddurchmesser **56** cm beträgt? [n = 17,05 1/s]

b) Wie groß sind die Umlaufdauer und die Winkelgeschwindigkeit des Rades? [T= 59 ms ; ω = 107 1/s]

c) Welchen Drehwinkel legt das Rad in **0,1** Sekunden zurück? [$\Delta\varphi$ = 613,6°]

---

2. Die Erde bewegt sich in einem Jahr (=365,25 Tage) einmal um die Sonne auf einer Bahn, die in guter Annäherung als Kreis mit **149,7** Millionen km Radius betrachtet werden kann.

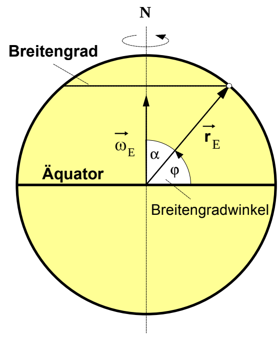
a) Welche Winkelgeschwindigkeit hat der Radiusvektor zwischen Sonne und Erde? [$\omega = 1{,}99 \cdot 10^{-7}$ 1/s]

b) Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit der Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne? [v=29,8 km/s]

c) Um welchen Winkel dreht sich der Radiusvektor an einem Tag? [$\Delta\varphi$ = 0,985°]

---

3. Die Erde dreht sich gegenüber dem Fixsternhimmel in **23** Stunden und **56** Minuten einmal um ihre eigene Achse (23 h 56 min = 1 Sterntag). Der Erdradius beträgt r_E = **6370** km.



a) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit und die Bahngeschwindigkeit eines Punktes auf dem **Äquator**. [$\omega = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ 1/s ; v = 1674 km/h]

b) Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit eines Ortes auf dem **50.** Breitengrad? [v = 1076 km/h]

c) Um wieviel ist die Bahngeschwindigkeit der Spitze des Eiffelturms (Höhe: **300** m) in Paris größer als die seines Fußes? Paris liegt etwa auf dem **48.** Breitengrad. [Δv = 0,0147 m/s]

d) Angenommen, man würde von der Spitze des Eiffelturmes bei Windstille eine Eisenkugel fallen lassen. In welcher Entfernung östlich von dem senkrecht unter dem Abwurfpunkt liegenden Punkt auf der Erde würde die Kugel auf dem Erdboden auftreffen, wenn alle übrigen bewegungsrelevanten Einflußfaktoren vernachlässigbar wären? [s = 11,5 cm]

---

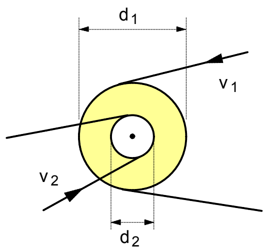
4. Die Spitze des Minutenzeigers einer Turmuhr bewegt sich mit der Bahngeschwindigkeit **v = 1,5** mm/s. Wie lang ist der Zeiger? [r = 85,9 cm]

---

5. Wieviel Minuten nach **16.00** Uhr holt der Minutenzeiger den Stundenzeiger zum ersten Mal wieder ein? [t = 21 min 49 s]

---

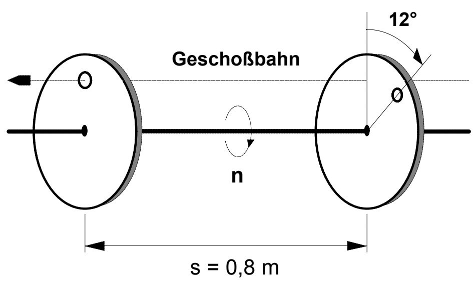
6. Zwei auf eine Transmission wirkende Treibriemen (siehe Abbildung rechts) laufen mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v_1}$ = **8** m/s bzw. $\mathbf{v_2}$ = 5 m/s . Die Durchmesser der fest miteinander verbundenen Riemenscheiben unterscheiden sich um **15** cm. Welche Durchmesser und welche Drehzahl haben die Riemenscheiben?
[d_1 = 40 cm ; d_2 = 25 cm ; n = 382 1/min]



---

7. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit einer Gewehrkugel wird diese durch zwei Pappscheiben geschossen, die im Abstand von **0,8** m auf einer gemeinsamen Welle mit der Drehzahl **n** = **1500** 1/min rotieren (siehe Abbildung rechts).

Welche Geschwindigkeit hat das Geschoß, wenn die beiden Durchschußlöcher um **12**° gegeneinander versetzt sind?
[v = 600 m/s]



8. Welche Höchstgeschwindigkeit hat ein PKW, dessen Motor die maximale Drehzahl **n** = **4300** 1/min aufweist? Der PKW hat im 4.Gang eine Gesamtuntersetzung von **1 : 3,5** und der äußere Raddurchmesser beträgt **65** cm. [v = 150,5 km/h]

---

9. Die Trommel einer Zentrifuge macht **4000** Umdrehungen je Minute. Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung, der die Flüssigkeitsteilchen im Abstand von **10** cm von der Drehachse ausgesetzt sind? Wievielmal höher als die Erdbeschleunigung (g=9,81 m/s^2) ist diese Zentripetalbeschleunigung?
[a_z = 1789 · g]

---

10. Die Mondbewegung kann näherungsweise als gleichförmige Kreisbewegung betrachtet werden. Der mittlere Bahnradius (=mittlere Entfernung der Mittelpunkte von Erde und Mond) beträgt **r = 384 400** km, die Umlaufzeit des Mondes um die Erde **T = 27** d **7** h **43** min.

a) Wie groß ist die mittlere Bahngeschwindigkeit des Mondes ? [v = 3683 km/h]

b) Mit welcher Zentripetalbeschleunigung wird der Mond ständig zum Erdmittelpunkt hin bewegt?
[a_z = 2,72 · 10^{-3} m/s²]

---

11. Ein Mensch übersteht höchstens Beschleunigungen, die neunmal so groß sind wie die Erdbeschleunigung (g = 9,81 m/s²). Ein Düsenflugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von **2000** km/h eine horizontal verlaufende Kurve, die die Form einer Kreislinie hat. Wie groß muß der Radius der Kurve mindestens sein?
[r = 3496 m]

---

12. Um Astronauten auf die bei Raumflügen auftretenden hohen Beschleunigungen vorzubereiten, werden sie in einer an einem Zentrifugen-Schwenkarm befestigten Simulatorkabine herumgeschleudert. Mit welcher Drehzahl pro Minute müßte eine solche Zentrifuge mit einem Kreisbahndurchmesser von **40** m rotieren, damit ein Astronaut im Inneren der Kabine mit einer Beschleunigung von **5 · g** an die Kabinenwand gedrückt wird? [n = 14,95 1/min]

---

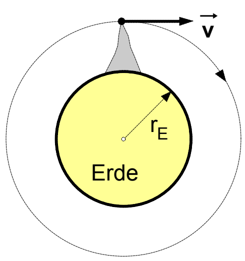
13. Ein Flugzeug fliegt einen Looping, d.h. es beschreibt in der Luft einen Kreis mit vertikaler Ebene. Mit welcher maximalen Geschwindigkeit darf es höchstens fliegen, wenn die Kreisbahn einen Radius von **500** m hat und die Gesamtbeschleunigung den Wert **6 · g** an keiner Stelle überschreiten darf?
[v = 564 km/h]

(Lösungshinweis: Zur Zentripetalbeschleunigung der Loopingbewegung kommt noch die Erdbeschleunigung mit g = 9,81 m/s².)

---

14. Mit welcher Geschwindigkeit müßte eine Kugel horizontal vom Mount Everest (h = 8880 m , Erdradius : r = 6370 km) aus abgeschossen werden, damit sie bei totaler Windstille die Erde umkreisen würde?
[v = 28 460 km/h]

(Lösungshinweis: Wenn der Körper so abgeschossen wird, daß er auf seiner Umlaufbahn mit einer Bahngeschwindigkeit rotiert, die groß genug ist, daß er während seiner Kreisbewegung eine nach außen gerichtete Zentrifugalbeschleunigung $\mathbf{a_z}$ entwickeln kann, die genau so groß ist wie die Erdbeschleunigung **g**, so wird er auf der Kreisbahn bleiben und nicht auf den Boden fallen.)



1. Definition der **Bahnbeschleunigung a**

- **Änderung** des **Betrages** der **Bahngeschwindigkeit** bei der *gleichmäßig* beschleunigten Kreisbewegung **:**

  $\Delta \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{n-1}$ mit n = 1, 2, 3 ...

- **Zeitabschnitte**, in denen die Änderung erfolgt :

  $\Delta \mathbf{t}_n = \mathbf{t}_n - \mathbf{t}_{n-1}$ mit n = 1, 2, 3 ...

- **Definition** der **Bahnbeschleunigung** für den **Sonderfall** der *gleichmäßig* beschleunigten Kreisbewegung :

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

- **Allgemeine Definition** der **Bahnbeschleunigung** :

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}}$$

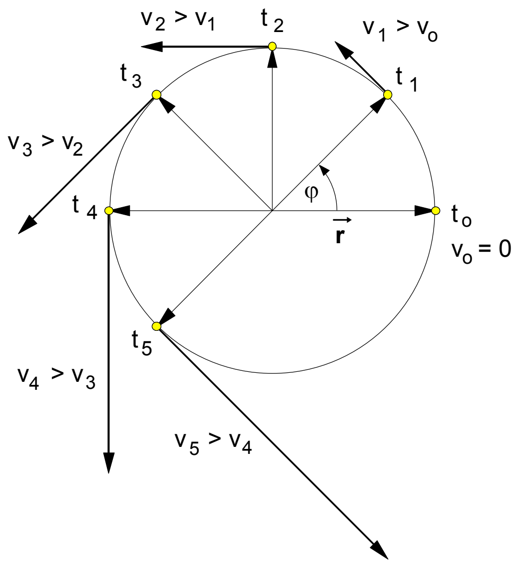


Bild 1 : Massepunkt, der auf einer Kreisbahn beschleunigt wird

2. Definition der **Winkelbeschleunigung α**

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{mit} \quad v = \omega \cdot r \;\Rightarrow\; dv = d(\omega \cdot r) \quad \text{bzw.} \quad dv = r \cdot d\omega$$, da der Radius **r** *konstant* ist.

$$\left. a = r \cdot \frac{d\omega}{dt} \right\} * \;\Rightarrow$$ Der Quotient $\frac{d\omega}{dt}$ ist definiert als die sog. "**Winkelbeschleunigung α**".

- **Allgemeine Definition** der **Winkelbeschleunigung α** :

$$\boxed{\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}}$$

Maßeinheit: $[\alpha] = \frac{[d\omega]}{[dt]} = \frac{1/s}{1s} = \frac{1}{s^2}$

- Für diesen **Sonderfall** der *gleichmäßig* beschleunigten Kreisbewegung gilt:

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}}$$

- Allgemein gilt für die **Beziehung** zwischen **Bahn- und Winkelbeschleunigung**:

  Gemäß ***** gilt $a = r \cdot \frac{d\omega}{dt}$ und mit $\frac{d\omega}{dt} = \alpha \;\Rightarrow\; \boxed{a = r \cdot \alpha}$

- **Beispiel**: Der Läufer eines Elektromotors (Durchmesser **d** = **30** cm) wird aus dem Stillstand heraus innerhalb von **30** Sekunden auf eine Drehzahl von **2500** Umdrehungen pro Minute gleichmäßig beschleunigt. Berechnen Sie **a)** die Winkelbeschleunigung und **b)** die Bahngeschwindigkeit, die ein Massepunkt am Läuferumfang in dieser Zeit erreicht. [8,73 1/s²; 39,27 m/s]

Kurs : **PRINZIPIEN der MECHANIK**	Name: Phy-16f2.Doc - 14.06.10	
Arbeitsblatt Nr. **16** :	Die gleichförmig **beschleunigte Kreisbewegung**	Seite **2**

3. Die **Gesetze** der gleichmäßig **beschleunigten Kreisbewegung** (Sonderfall: a = const.)

a) **Winkelgeschwindigkeit**-Zeit-Gesetz

$$\text{Winkelbeschleunigung: } \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\omega = \alpha \cdot dt$$

$$\int d\omega = \int \alpha \cdot dt \quad \text{mit } \alpha = \text{const.}: \ \omega = \alpha \int 1 \cdot dt \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t}$$

Wo ... Anfangswinkelgeschwindigkeit

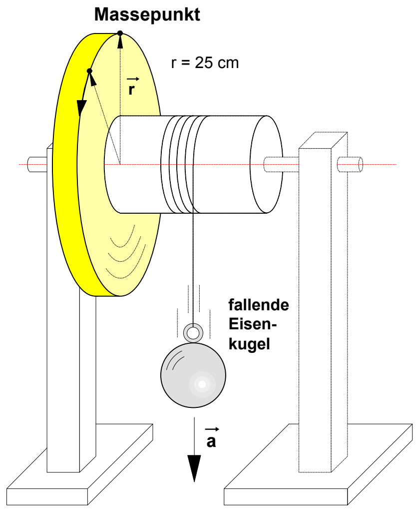


Bild 1: Beispiel für eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung, hervorgerufen durch eine fallende Kugelmasse

b) **Drehwinkel**-Zeit-Gesetz

$$\text{Winkelgeschwindigkeit: } \omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \omega \cdot dt$$

$$\int d\varphi = \int \omega \cdot dt \quad \text{mit } \omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad \varphi = \int (\omega_0 + \alpha \cdot t) \cdot dt$$

$$\varphi = \int \omega_0 \cdot dt + \int \alpha \cdot t \cdot dt = \omega_0 \int 1 \cdot dt + \alpha \int t \cdot dt \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 + \varphi_0}$$

j o ... Anfangsdrehwinkel

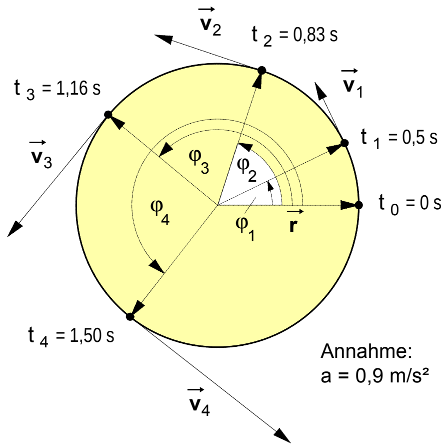


Bild 2: Kreisbewegung eines Massepunktes am Radumfang des Schwungrades

4. **Analogien** zwischen **geradliniger Bewegung** (*Translation*) und **Kreisbewegung** (*Rotation*)

Die Beträge sämtlicher Grundgrößen der Kreisbewegung lassen sich aus den entsprechenden Größen der geradlinigen Bewegung berechnen, indem man letztere einfach durch den Bahnradius **r** dividiert, d.h.:

$$\boxed{\varphi = \frac{s}{r} \qquad \omega = \frac{v}{r} \qquad \alpha = \frac{a}{r}}$$

Geradlinige Bewegung (*Translation*)		**Kreisbewegung** (*Rotation*)	
• Definitionen		• Definitionen	
Geschwindigkeit	$v = \frac{ds}{dt}$	*Winkelgeschwindigkeit*	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt}$	*Winkelbeschleunigung*	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
• Gleichförmige Bewegung mit v = const.		• Gleichförmige Kreisbewegung mit ω = const.	
Weg-Zeit-Gesetz	$s = v \cdot t$	*Drehwinkel-Zeit-Gesetz*	j = w · t
• Beschleunigte Bewegung mit a = const.		• Beschleunigte Kreisbewegung mit α = const.	
Weg-Zeit-Gesetz	$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	*Drehwinkel-Zeit-Gesetz*	$\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$
Geschwindigkeit	$v = v_0 + a \cdot t$	*Winkelgeschwindigkeit*	w = w0 + a · t

Beispiel: Ein Schwungrad von **0,5** m Durchmesser und der anfänglichen Drehzahl von **500** min^{-1} läuft in **15** s bis zum Stillstand aus. Wie groß ist die **Bahnverzögerung a** am Radumfang und wieviel **Umdrehungen** macht das Rad noch während des Auslaufens?