OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 11.

UNTERREDUNGEN

UND

MATHEMATISCHE DEMONSTRATIONEN

ÜBER ZWEI NEUE WISSENSZWEIGE, DIE MECHANIK UND DIE FALLGESETZE BETREFFEND,

VON

GALILEO GALILEI.

ERSTER UND ZWEITER TAG.

(1638)

QC123
G1315
1907
v.1
ENG

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG

OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 11.

UNTERREDUNGEN

UND

MATHEMATISCHE DEMONSTRATIONEN

ÜBER ZWEI NEUE WISSENSZWEIGE, DIE MECHANIK UND
DIE FALLGESETZE BETREFFEND,

VON

GALILEO GALILEI.

ERSTER UND ZWEITER TAG.

(1638)

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.
Leipzig 1890

Ankündigung.

Die Klassiker der exakten Wissenschaften umfassen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie und enthalten Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie (einschliesslich Krystallkunde) und Physiologie.

Die allgemeine Redaktion führt **Dr. W. Ostwald**, o. Professor an der Universität Leipzig; die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt. Für die Leitung der einzelnen Abtheilungen sind gewonnen worden: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Physik Prof. Dr. Arth. von Oettingen (Dorpat).

Der Preis für den Druckbogen à 16 Seiten ohne etwaige textliche Abbildungen ist auf *M* –.25 festgesetzt.

Erschienen sind:

Nr. 1. H. Helmholtz, Erhaltung der Kraft. (1847.) (60 S.) 80 *Pf.*

Nr. 2. C. F. Gauss, Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehnngs- und Abstossungskräfte. (1840.) Herausg. von A. Wangerin. (60 S.) 80 *Pf.*

Nr. 3. J. Dalton u. W. H. Wollaston, Abhandlungen zur Atomtheorie. (1803–1808). Herausg. v. W. Ostwald. Mit 1 Taf. (30 S.) 50 *Pf.*

Nr. 4. Gay-Lussac, Jod. (1814.) Herausg. v. W. Ostwald. (52 S.) 80 *Pf.*

Nr. 5. C. F. Gauss, Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. (62 S.) 80 Pf.

Nr. 6. E. H. Weher, Über die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreisläufe des Blutes etc. (1850.) Herausg. v. M. v. Frey. Mit 1 Taf. (46 S.) *M* 1.–.

Nr. 7. F. W. Bessel, Länge d. einfachen Secundenpendels. Herausg. von H. Bruns. Mit 2 Taf. (171 S.) M 3.–.

Nr. 8. A. Avogadro u. Ampére, Abhandlungen zur Molekulartheorie. (1811 u. 1814.) Mit 3 Taf. Herausg. v. W. Ostwald. (50 S.) M 1.20.

Nr. 9. H. Hess, Thermochemische Untersuchungen. (1839—1842.) Herausg. v. W. Ostwald. (102 S.) M 1.60.

Nr. 10. F. Neumann, D. mathem. Gesetze d. inducirten elektrischen Ströme. (1845.) Herausg. v. C. Neumann. (96 S.) M 1.50.

Nr. 11. Galileo Galilei, Unterredungen u. mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige etc. (1638.) 1. Tag mit 13 u. 2. Tag mit 26 Fig. im Text. Aus d. Italien. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. (142 S.) M 3.–.

Hinweise zu den Seitenzahlen

Die auf den Buchseiten (jeweils in der Kopfzeile außen) und in den pdf-Lesezeichen angegebenen Seitenzahlen stimmen überein mit denen in dem jeweiligen Heft der Ostwald's Klassiker, hier Heft 11, Leipzig 1890.

Die auf jeder Buchseite in der Fußzeile und in den pdf-Lesezeichen jeweils in eckigen Klammern [...] angegebenen Seitenzahlen stimmen überein mit den Seitenzahlen der folgenden einbändigen deutschen Ausgaben der *Discorsi*:

(1) Galileo Galilei: Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend. Erster bis sechster Tag, Arcetri, 6. März 1638, Herausgegeben von Arthur von Oettingen, Nachdruck Darmstadt 1973 (Wissenschaftliche Buchgesellschaft).

(2) Ostwald's Klassiker der exakten Naturwissenschaften, Reprint der Bände 11, 24 und 25: Galileo Galilei: Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend, Erster bis sechster Tag, Arcetri 6. März 1638, aus dem Italienischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Arthur von Oettingen, Vorwort von Jürgen Hamel, Hann-Gruiten 2007 (Verlag Europa)

Nur in dem vorliegenden Heft 11 der Ostwald's Klassiker sind die Seitenzahlen in der Kopfzeile und die jeweils in der Fußzeile und den Lesezeichen in eckigen Klammern angegebenen identisch. Das ist anders als in den folgenden Heften Nr. 24 und 25. Dort beginnt die Pagnierung jeweils auf der ersten Seite neu mit der Seite 1. Die oben genannten einbändigen Ausgaben geben diese Seitenzahlen ebenfalls in eckigen Klammern an.

Ursprüngliche Quelle dieser pdf-Datei:
https://archive.org/download/unterredungenun05galigoog/unterredungenun05galigoog.pdf

143

Alexander Ziwet

QC
17
.G155
1890
V.1

UNTERREDUNGEN

und

MATHEMATISCHE DEMONSTRATIONEN

über

zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend,

von

GALILEO GALILEI.

Arcetri, 6. März 1638.

Erster Tag mit 13 und zweiter Tag mit 26 Holzschnitten.

Aus dem Italienischen übersetzt und herausgegeben

von

Arthur von Oettingen.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1890.

https://archive.org/download/unterredungenun05galigoog/unterredungenun05galigoog.pdf

UNTERREDUNGEN

und

MATHEMATISCHE DEMONSTRATIONEN

über

zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und
Die Fallgesetze betreffend,

von

GALILEO GALILEI.

Arcetri, 6. März 1638.

Erster Tag mit 13 und zweiter Tag mit 26 Holzschnitten.

Aus dem Italienischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben

von

Arthur von Oettingen

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1890

05-14-23V.W.

Unterredungen u. mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend,

von

Galileo Galilei.

Erster Tag.

Discurse
zwischen den Herren
Salviati, Sagredo und Simplicio.

Salv. Die unerschöpfliche Thätigkeit Eures berühmten Arsenals, Ihr meine Herren Venetianer, scheint mir den Denkern ein weites Feld der Speculation darzubieten, besonders im Gebiete der Mechanik: da fortwährend Maschinen und Apparate von zahlreichen Künstlern ausgeführt werden, unter welch letzteren sich Männer von umfassender Kenntniss und von bedeutendem Scharfsinn befinden.

Sagr. Sie haben vollkommen Recht, mein Herr; und ich, der ich [von Natur] wissbegierig bin, komme häufig hierher, und die Erfahrung derer, die wir wegen ihrer hervorragenden Meisterschaft »die Ersten« [Proti] nennen, hat meinem Verständniss oft den Causalzusammenhang wunderbarer Erscheinungen eröffnet, die zuvor für unerklärbar und unglaublich gehalten wurden: und wirklich war ich oft verwirrt und verzweifelt darüber, dass so viele Dinge der Erfahrung nicht erklärt werden konnten, Dinge, die sogar sprichwörtlich bekannt sind, wie denn manche vulgäre Meinung geäussert wird, um etwas über Dinge zu sagen, die die guten Leute selbst nicht fassen können.

Salv. Sie denken vielleicht an jenen Satz, den ich Ihnen neulich vortrug, als wir ein Verständniss dafür suchten, weshalb

417126

man ein so viel grösseres Gerüste erbaut, um jene grosse Galeere vom Stapel zu lassen, während man sie lange nicht in demselben Maasse kleiner für kleinere Schiffe gebraucht, wobei Sie bemerkten, es geschehe das, um die Gefahr des Zerbrechens durch den Druck der ungeheuren Last zu vermeiden, ein Umstand, dem die kleinen Holzmassen nicht ausgesetzt seien.

Sagr. Deshalb und besonders aus Ihrem letzten Argument, welches das gewöhnliche Volk falsch auffasst, habe ich nun eingesehen, dass in diesen und anderen ähnlichen Fällen man nicht ohne Weiteres vom kleinen Maassstab auf den grossen schliessen dürfe; manche Maschine gelingt im Kleinen, die im Grossen nicht bestehen könnte. Indess alle Begründung der Mechanik basirt auf Geometrie. In dieser aber gelten die Sätze von der Proportion aller Körper. Wenn nun eine grosse Maschine in allen Theilen ähnlich der kleinen gebaut wird, und die letztere als fest und widerstandsfähig erwiesen ist, so sehe ich doch nicht ein, warum dennoch eine Gefahr gefürchtet wird.

Salv. Die Meinung des Volkes ist hier völlig irrig, und sogar so sehr falsch, dass man das Gegentheil behaupten kann, ich meine, dass viele Maschinen weit vollkommener in grossem Maassstabe ausgeführt werden können. Zum Beispiel eine Uhr mit Zifferblatt und Schlagwerk wird leichter in einem gewissen grösseren Maassstabe gefertigt werden. Mit mehr Recht wird jener Satz von Intelligenteren vertreten, indem sie aus dem leichteren Gelingen grösserer Maschinen dazu geführt werden, von den abstracten Sätzen der Geometrie abzusehen, und den wahren Grund einer Abweichung in der Beschaffenheit der Materie, ihrer Veränderlichkeit und Unvollkommenheit zu suchen. Indess hoffe ich in diesem Falle, ohne arrogant zu erscheinen, versichern zu dürfen, dass die Unvollkommenheit der Materie, die ja allerdings die schärfsten mathematischen Beweise zu Schanden machen kann, nicht genüge, den Ungehorsam der wirklichen Maschinen gegen ideale zu erklären. Denn ich will von aller Unvollkommenheit absehen, und will die Materie als ideal vollkommen annehmen, und als unveränderlich, und will zeigen, dass bloss, weil es eben Materie ist, die grössere Maschine, wenn sie aus demselben Material und in gleichen Proportionen hergestellt ist, in allen Dingen der kleinen entsprechen wird, ausser in Hinsicht auf Festigkeit und Widerstand gegen äussere Angriffe: je grösser, um so schwächer wird sie sein. Und da ich die Unveränderlichkeit der Materie voraussetze, kann man völlig klare, mathematische Betrachtungen darauf bauen. Geben Sie daher, Herr

Sagredo, Ihre von vielen anderen Mechanikern getheilte Meinung auf, als könnten Maschinen aus gleichem Material, in genauester Proportion hergestellt, genau gleiche Widerstandsfähigkeit haben. Denn man kann geometrisch beweisen, dass die grösseren Maschinen weniger widerstandsfähig sind als die kleineren: sodass schliesslich nicht bloss für Maschinen und für alle Kunstproducte, sondern auch für Objecte der Natur eine nothwendige Grenze besteht, über welche weder Kunst noch Natur hinausgehen kann: wohlverstanden, wenn stets das Material dasselbe und völlige Proportionalität besteht.

Sagr. Ich fühle bereits meinen Sinn sich ändern, und wie eine Wolke vom Blitze erleuchtet wird, so ahnde ich ein plötzliches Licht, das mich wie aus weiter Ferne erleuchtet, und sofort wieder verwirrt, indem es mir fremde und undurchdachte Vorstellungen erweckt. Aus dem, was Sie gesagt haben, scheint mir zu folgen, dass es unmöglich sei, zwei Maschinen aus gleichem Stoff zu construiren, die dabei ungleich gross und von gleicher Widerstandskraft seien; und ferner, dass man nicht zwei Stäbe finden wird aus derselben Holzart gleich in Stärke, aber von ungleicher Grösse.

Salv. So ist es, Herr *Sagredo*, und um auf dieses Beispiel einzugehen, füge ich hinzu, dass, wenn wir einen Holzstab in horizontaler Stellung in eine senkrechte Mauer einlassen, denselben aber von solcher Länge und Breite wählen, dass er sich gerade noch erhalten kann, um eines Haares Dicke aber verlängert, schon zerbrechen müsste durch das eigene Gewicht — ein Unicum freilich —: wenn ferner die Länge gleich der hundertfachen Breite wäre, so würde man keinen andern Stab aus demselben Material finden, der bei hundertfacher Länge gegen seine Breite geeignet sei, gerade sich selbst zu tragen und nicht mehr: aber alle von grösseren Dimensionen werden zerbrechen, und die kleineren werden noch belastet werden dürfen. Zudem gilt das, was ich von der Fähigkeit sich selbst zu tragen sage, ebenso für jede andere Construction, wie z. B. wenn eine Latte 10 andere ihr gleiche tragen kann, ein Balken, welcher der Latte ähnlich wäre, nicht mehr 10 andere ihm gleiche tragen könnte. Möchten Sie aber, meine Herren alle Beide, bemerken, wie sehr diese Behauptungen wahr sind, obwohl sie zunächst unwahrscheinlich erscheinen. Aber nach einiger Ueberlegung fällt der die Wahrheit verhüllende Schleier, und einfach und nackt erblicken wir ihre schöne Gestalt. Ist es nicht klar, dass ein Pferd, welches 3 oder 4 Ellen hoch herabfällt, sich die Beine brechen kann, während ein Hund keinen Schaden erlitte, desgleichen eine Katze selbst von 8 oder 10 Ellen Höhe, ja eine Grille von einer Thurmspitze und eine Ameise, wenn sie vom Monde herabfiele? Kleine Kinder erleiden beim Fall keinen Schaden, wo Bejahrte sich Arm und Bein zerbrechen. Und wie kleinere Thiere verhältnissmässig kräftiger und stärker sind, als die grossen, so halten sich die kleinen Pflanzen besser: und nun glaube ich, versteht Ihr alle Beide, meine Herren, dass eine 200 Ellen hohe Eiche ihre Aeste in voller Proportion mit einer kleinen Eiche nicht halten könnte, und dass die Natur ein Pferd nicht so gross wie 20 Pferde werden lassen kann, noch einen Riesen von zehnfacher Grösse, ausser durch Wunder oder durch Veränderungen der Proportionen aller Glieder, besonders der Knochen, die weit über das Maass einer proportionalen Grösse verstärkt werden müssten. — Die gemeine Annahme, dass grosse und kleine Maschinen gleich ausdauernd seien, ist offenbar irrig: beispielsweise werden kleine Obelisken und Säulen und anderes mit Sicherheit gehandhabt werden können, sie würden gedehnt und aufgerichtet werden können ohne irgend welche Gefahr des Zerbrechens, während sehr grosse bei jedem Zufall Gefahr laufen zu bersten und zwar bloss wegen der eigenen grossen Last. Ich möchte Ihnen einen Fall erzählen, der denkwürdig ist, wie alle jene Ereignisse, die gegen die Erwartung eintreten und bei denen die getroffenen Vorsichtsmaassregeln die grösste Unordnung selbst veranlassen. Eine sehr grosse Marmorsäule war mit ihren Enden auf zwei Balken aufgelegt; ein Mechaniker dachte nach einiger Zeit, es wäre besser, um einen Bruch in der Mitte zu vermeiden, auch hier eine Balkenstütze anzubringen: der Rath gefiel Allen, der Ausgang lehrte das Gegentheil: nach wenigen Monaten war die Säule gebrochen und zwar genau über der mittleren Stütze.

Simp. Das ist wahrhaftig merkwürdig, und durchaus »praeter spem«, damals als man die mittlere Stütze anbrachte.

Salv. Sicher war letztere die Veranlassung, und der erkannte Causalzusammenhang lässt alles Wunderbare schwinden: denn als man die beiden Säulenstücke auf die ebene Erde niederlegte, bemerkte man, dass die eine Endstütze faul war und sich gesenkt hatte. Da nun die mittlere Stütze fest und stark war, so war sie die Ursache dafür, dass das eine Säulenende in der Luft schwebte; das eigene Uebergewicht bewirkte das, was mit nur zwei Endstützen nicht geschehen wäre, denn bei der Senkung der einen wäre die Säule mitgefolgt. Zweifellos wäre dieses

Alles bei einer kleinen Säule gar nicht eingetreten, selbst bei demselben Material, bei proportionaler Länge und Breite.

Sagr. Von der Wahrheit der Sache bin ich zwar völlig überzeugt, kann aber den Grund noch nicht einsehen, warum bei verhältnissmässiger Vergrösserung aller Theile nicht in demselben Maasse die Resistenz zunimmt; und um so schwieriger erscheint mir die Frage, als oft gerade im Gegentheil die Bruchfestigkeit mehr zunimmt als die Verdickung der Substanz; wie z. B. bei zwei Nägeln in einer Mauer, von denen der eine nur doppelt so dick als der andere, während seine Tragfähigkeit ums Dreifache, ja Vierfache wächst.

Salv. Sagen Sie, bitte, ums Achtfache, und Sie werden's nahe getroffen haben. Aber auch dieses Factum widerspricht nicht jenem, trotz allen Anscheines.

Sagr. Jetzt, Herr *Salviati*, erklären Sie uns die Sache, wenn Sie's können, denn ich glaube, der Gegenstand ist interessant und nützlich, und wenn wir heute das Problem besprechen könnten, wäre ich, und wohl auch Herr *Simplicio* äusserst dankbar.

Salv. Ich stehe Ihnen zu Diensten, wenn mein Gedächtniss mir nur das wieder vorführt, was ich bereits von unserem Akademiker gelernt habe, der über ähnliche Fragen viel nachgedacht hatte, und zwar stets seiner geometrischen Methode entsprechend, so dass mit gutem Recht man von einer neuen Wissenschaft hätte reden können; denn, wenn auch einige Sätze von anderen, und zwar zuerst von Aristoteles aufgestellt waren, so sind doch die schönsten und vornehmsten hier zu finden, zweifellose Fundamentalsätze mit allen Beweisstücken. Und daher kann ich auch Sie überzeugen, und brauche nicht mit Wahrscheinlichkeiten Sie zu unterhalten, denn Sie kennen ja die Elemente der Mechanik, soweit wir dieselben voraussetzen müssen. Vor allem werden wir untersuchen, was eigentlich geschieht, wenn man ein Stück Holz zerbricht oder einen andern festen Körper; denn hier finden wir das erste und einfachste Princip, auf dem das übrige beruht. Zu näherem Verständniss denken wir uns einen Cylinder oder ein Prisma AB, aus Holz oder anderem Material, befestigt oben bei A, vertical herabstrebend und bei B mit dem Gewichte C belastet. Welches nun auch die Festigkeit sei,

Fig. 1.

man kann stets C so gross denken, dass der Körper zerbricht. Denn lassen wir die Last anwachsen, so muss schliesslich der Körper wie ein Strick zerreissen. Wie wir aber beim Strick die Festigkeit den vielen Hanffäden, die den Strick bilden, zuschreiben, so wird das Holz von Fasern gebildet, namentlich sind es die Längsfasern, die das Holz gegen Streckung widerstandsfähig machen, und zwar in höherem Grade als solches bei Hanffasern stattfände: im Cylinder aus Stein oder aus Metall hängt die Festigkeit der Theile von einem andern Bindemittel ab; aber auch hier giebts eine Bruchfestigkeitsgrenze.

Simp. Wenn die Sache sich so verhält, wie Ihr sagt, so verstehe ich wohl, dass im Holze die Fasern, die ebenso lang sind, wie das Holz selbst, dem letzteren Festigkeit verleihen können: aber ein Hanfseil, dessen einzelne Fasern höchstens 2 oder 3 Ellen lang sind, wie kann ein solches 100 Ellen lang werden und dennoch so fest sein? Ausserdem würde ich gern Ihre Ansicht kennen lernen über die Cohärenz der Theile eines Metalles, oder eines Steines, oder irgend welcher anderen Stoffe, die keine Fasern haben, welche trotzdem, wenn ich nicht irre, noch fester sein können.

Salv. In neue Speculationen, die unserem Ziele ferner stehen, können wir eingehen, wenn wir die bereits angedeuteten Schwierigkeiten völlig gelöst haben.

Sagr. Aber wenn unser Abschweifen uns zur Erkenntniss neuer Wahrheiten führt, was sollte uns, die wir nicht gezwungen sind in gedrängter conciser Methode vorzugehen, sondern zu unserer eigenen Freude unsere Zusammenkünfte veranstalten, was sollte uns hindern abzuschweifen, um Fragen zu erörtern, denen wir zufällig begegnen, während sich möglichenfalls ein anderes Mal keine Gelegenheit dazu böte? Und ferner: wer weiss, ob wir nicht recht oft auf Dinge verfallen, die schöner und interessanter sind als die ursprünglich aufgestellten Sätze? Ich bitte Euch deshalb, Herrn *Simplicio's* Wunsche nachzukommen, und zugleich dem meinigen, da ich dringend zu wissen wünsche, welch Bindemittel gedacht werden kann, welches so fest die Theile der festen Körper verbindet, dass sie schliesslich unlöslich erscheinen: wobei ich übrigens bemerke, dass die Festigkeit jener Fasern selbst auch dem Verständniss näher zu führen sein wird.

Salv. Wohlan denn, weil Sie es wünschen. Die erste Schwierigkeit war die, wie 100 Ellen lange Seile so fest sein können, obgleich ihre Fasern nur 2—3 Ellen lang sind. Aber sagt mir, Herr *Simplicio*, könntet Ihr nicht eine einzelne Hanffaser zwischen Euren Fingern so fest halten an einem Ende, dass ich, zerrend am anderen, sie eher zerrisse, als Euch entrisse? Gewiss doch: wenn nun die Hanffäden nicht bloss an ihren Enden, sondern längs der ganzen Strecke von ihrer Umgebung stramm gehalten würden, ist es nicht klar, dass das Loszerren von dieser Umgebung viel schwieriger wäre, als sie zu zerreissen? Aber beim Seile bewirkt gerade das Drehen desselben ein Zusammendrängen der Fäden, so dass bei starker Zerrung die Fäden wohl zerreissen, aber sich von einander nicht trennen; wie man sich leicht überzeugen kann, da beim Reissen ganz kurze Enden, und nicht etwa eine Elle lange erhalten werden, wie doch geschehen müsste, wenn die Zertheilung des Strickes nicht durch das Zerreissen der Fäden, sondern durch ihre gegenseitige Lostrennung erfolgte.

Sagr. Zur Bestätigung dessen möchte ich bemerken, wie oft ein Seil nicht durch Streckung, sondern durch starke Verdrehung reisst: hier sind die Fäden gegenseitig so sehr gedrückt, dass die drückenden den gedrückten nicht gestatten, um jenes Minimum auszuweichen, welches nöthig wäre, um die Fäden zu verlängern, so dass sie ringsum das Seil einschliessen könnten, da letzteres bei der Torsion sich verkürzt und daher ein wenig verdickt.

Salv. Ganz richtig: aber bemerken Sie nebenbei, wie eine Erkenntniss die andere nach sich zieht. Jener Faden zwischen den Fingern, der nicht folgte, mit welcher Kraft man ihn auch fassen wollte, er widersteht, weil die verdoppelte Compression ihn zurückhält; denn sowohl der obere drückt gegen den unteren Finger, wie auch umgekehrt der untere gegen den oberen. Und zweifelsohne wenn von diesen beiden Drucken der eine allein behalten werden könnte, so würde noch immer dasselbe beobachtet werden: da man aber nicht einseitig den Druck aufheben kann, ohne auch den anderen zu vernichten, so muss man darauf bedacht sein, durch einen neuen Kunstgriff die einseitige Kraft zu erhalten, und eine Weise ersinnen, wodurch der Faden sich selbst an den Finger andrückt, oder an einen andern festen Körper, auf dem er ruht, um so zu erreichen, dass dieselbe Kraft, die den Faden strammt, ihn um so mehr andrückt, je stärker sie wirkt: und das lässt sich erreichen, wenn man in Spiralform den Faden um den festen Körper schlingt. Zum besseren Verständniss diene eine Zeichnung: Seien AB und CD zwei Cylinder und zwischen beiden ein Faden EF, z. B. eine

Schnur: offenbar wird beim starken Zusammendrücken der beiden Cylinder die Schnur *EF*, wenn man sie vom Ende *F* aus zerrt, einer bedeutenden Kraft widerstehen, ehe sie zwischen den beiden Cylindern hingleitet: Entfernen wir aber den einen von beiden, so wird die Schnur, obwohl sie noch den anderen Cylinder berührt, nicht mehr durch diese Berührung zurückgehalten. Halten wir dagegen die Schnur, wenn auch ganz schwach, am oberen Ende des Cylinders *A* fest, winden sie ferner um den Cylinder spiralförmig herum *AFLOTR*, und zerren am Ende *R*, so ist es klar, dass die Schnur den Cylinder zusammendrücken wird, und wenn es der Spiralen und Windungen viele gäbe, so wird bei stärkerem Ziehen die Schnur immer stärker gegen den Cylinder gepresst: und indem durch Vervielfältigung der Spiralen die Berührung eine innigere und mithin weniger leicht zu überwindende sein wird, wird andererseits das Gleiten immer schwieriger und damit zugleich das Nachgeben gegen die Zugkraft. Uebrigens sieht man leicht ein, dass solcher Art der Widerstand der Fasern ist, die mit 1000 und aber 1000 ähnlichen Windungen das grosse Seil bilden. Das Zusammendrängen in gleichem krummen Lauf sammelt alles so fest, dass aus nicht vielen und nicht sehr langen Binsen, obwohl nur wenig Spiralen vorhanden sind, die sich durchsetzen, doch sehr feste Seile verfertigt werden, wie solche, wie ich gehört habe, auf griechischen Kaperschiffen im Gebrauch sind.

Fig. 2.

Sagr. Durch Eure Auseinandersetzung schwindet mir alles Wunderbare in zwei Erscheinungen, die ich früher nicht klar erfasst hatte. Erstens die Thatsache, dass 2 oder 3 Windungen eines Taues, um die Welle einer Winde geschlungen, die letztere nicht bloss zurückhalten konnten, so dass dasselbe gezerrt von einer grossen Last doch nicht ausglitt und nachgab, sondern auch dass die sich umwälzende Winde durch blosse Berührung mit dem Taue mittelst der wenigen Windungen riesige Steine heben konnte, während ein kleiner schwacher Knabe das andere Ende des Taues zurückhielt. Das zweite, was ich erwähnen wollte, war ein einfaches aber sinnreiches Werkzeug, das einer meiner Verwandten erfand, um mittelst eines Strickes aus einem Fenster sich herablassen zu können, ohne sich die Hände zu schinden, wie ihm kürzlich in schlimmster Weise geschehen war. Zu leichterem Verständniss entwerfe ich Ihnen eine kleine Skizze. Um einen Holzcylinder AB (Fig. 3) so dick wie ein Spazierstock und eine Spanne lang grub er einen spiralförmigen Canal von anderthalb Windungen und nicht mehr und zwar so tief, dass der Strick, den er gebrauchen wollte, gerade hinein passte; letzterer trat bei A ein und bei B aus. Dann umgab er den Cylinder mitsammt dem Strick mit einem Rohr aus Holz oder auch aus Blech. Das Rohr aber war in Hälften der Länge nach gespalten und dann verhakt, so dass es bequem geöffnet und geschlossen werden konnte: dieses Rohr umfasste er mit beiden Händen, nachdem er oben das Seil eingeführt hatte, dann hing er sich mit den Armen an und es entstand solch eine Compression des Seiles zwischen Cylinder und Holzrohr, dass er nach Belieben durch festeres Andrücken der Hände sich halten konnte ohne hinabzugleiten, und indem er etwas nachliess, ebenso nach Belieben sich hinablassen konnte.

Fig. 3.

Salv. Wahrhaftig eine schöne Erfindung, aber zur vollständigen Erklärung, deucht mir, liesse sich eine weitere Ueberlegung hinzufügen: doch möchte ich jetzt nicht weiter auf diese Specialität eingehen, da Ihr meine Gedanken hören wolltet über den Zugwiderstand der anderen Körper, die nicht aus Fasern bestehen, wie etwa Stricke und die meisten Hölzer, deren Cohärenz also in anderen Umständen ihren Grund hat; dieselbe ist nach meinem Bedünken auf zwei Stücke zurückzuführen; das eine ist das viel besprochene Widerstreben der Natur, einen leeren Raum zuzulassen: andererseits muss ein Bindemittel gedacht werden, welches zäh und klebrig ist und die Theilchen des Körpers fest mit einander verbindet. Zuerst handeln wir vom Vacuum, und ich will experimentell Ihnen zeigen, welcher Art und wie gross seine Kraft sei. Nehmen Sie gefälligst zwei Platten aus Marmor oder Metall, oder aus Glas, völlig plan, glatt und polirt. Legt man die eine auf die andere, so lassen sie sich leicht gegen einander verschieben, offenbar ein Beweis, dass kein Bindemittel sie vereinigt; gegen jede Trennung aber tritt ein

Widerstand auf, so dass die obere Platte die untere tragen kann, auch wenn letztere gross und schwer ist. Offenbar beweist uns das den Abscheu der Natur, selbst auf kurze Zeit den leeren Raum zu verlassen, der zwischen beiden entstehen würde, bevor die umgebende Luft denselben ausfüllen konnte. Auch sieht man, dass, wenn die beiden Platten nicht sehr glatt polirt wären, so dass ein mangelhafter Contact stattfände, dass dann bei langsamer Trennung gar kein Widerstand bemerkbar wäre, ausser dem durch das Eigengewicht der Platte bedingten; aber bei schneller Erhebung der oberen Platte folgt die untere doch, um allerdings alsobald wieder zu fallen, denn sie folgt nur so lange Zeit hindurch, als nöthig erscheint, um die kleine Quantität Luft, die zwischen den Platten vorhanden war, auseinanderzuziehen, (denn die Platten passten nach unserer Voraussetzung nicht gut zusammen), um neuer Luft den Eintritt zu gestatten. Solch ein Widerstand, der so fühlbar zwischen den Platten sich zeigt, ist ohne Zweifel auch zwischen den Theilen eines festen Körpers vorhanden, und ist zum Theil wenigstens ein mitwirkender Umstand ihres Zusammenhaftens.

Sagr. Bitte, haltet ein, und gestattet mir eine Betrachtung mitzutheilen, die mir gerade soeben beifällt: nämlich da die untere Platte der oberen folgt, und zwar bei sehr schneller Bewegung der letzteren, so scheint es mir klar, dass, entgegen den Behauptungen der Philosophen und vielleicht gar des Aristoteles, eine Bewegung im Vacuum nicht momentan stattfinden würde; denn wäre letzteres der Fall, so müssten beide Platten ohne jeglichen Widerstand sich trennen, weil derselbe Zeitmoment genügen müsste, sie zu trennen und durch den Zutritt der umgebenden Luft das Vacuum auszufüllen, das zwischen den Platten entstehen könnte. Daraus, dass thatsächlich die untere Platte folgt, ist zu schliessen, dass im Vacuum die Bewegung nicht momentan sein könne, und zugleich, dass zwischen beiden Platten ein Vacuum entsteht, für kurze Zeit wenigstens, nämlich für diejenige, die in der Bewegung der Umgebung verstreicht zwischen dem Entstehen und Vergehen des Vacuums; dass ferner, wenn kein Vacuum entstünde, man weder vom Zutritte noch von der Bewegung der Umgebung zu reden brauchte. Man muss also sagen, dass geradezu durch die Vehemenz der Bewegung, oder aber entgegen allem Naturgesetz sich das Vacuum bildet (obwohl, wie ich meine, kein Ding gegen die Natur sein kann, ausgenommen das Unmögliche, welches eben deshalb nie vorkommt). Hier aber finde ich eine andere Schwierigkeit, nämlich die, dass zwar der Versuch mich von der Richtigkeit der Schlussfolgerung überzeugt, mein Intellect aber nicht völlig befriedigt ist hinsichtlich der Ursache, welcher solche Wirkung zuzuschreiben sei. Denn die Wirkung der Lostrennung der beiden Platten geht der Bildung des Vacuums voraus, und letzteres folgt jener: und da, wie mir scheint, die Ursache, wenn sie nicht gleichzeitig mit der Wirkung auftritt, ihr durchaus voraufgehen und einem positiven Effect auch eine positive Ursache entsprechen muss, so begreife ich nicht, wie von der Adhäsion der beiden Platten und ihrem Widerstreben, sich von einander zu trennen, also von Wirkungen, die schon actuell sind, die Ursache das Vacuum sein soll, das noch gar nicht ist, sondern erst erfolgen müsste. Und Dinge, die nicht sind, können auch keine Wirkung haben, gemäss allen zuverlässigen Meinungen der Philosophen.

Simpl. Wenn Ihr dem Aristoteles diesen Grundsatz zugesteht, so hoffe ich, dass Ihr ihm einen andern auch sehr schönen Satz nicht bestreiten werdet: und zwar folgenden: Die Natur unternimmt Nichts zu thun, was zu geschehen sich sträubt: und in diesem Satze steckt die Lösung unseres Räthsels, denn von sich selber widerstrebt ein leerer Raum zu entstehen, die Natur verbietet mithin das auszuführen, wodurch nothwendigerweise ein Vacuum entstünde; und dieser Art wäre die Trennung der beiden Platten.

Sagr. Meine Frage wird durch das, was Herr *Simplicio* vorgebracht hat, erledigt, und auf den Ausgangspunkt unseres Gespräches zurückblickend, scheint mir dasselbe Widerstreben, einen leeren Raum zu erzeugen, der zureichende Grund für das Zusammenhalten der Theile eines festen Körpers, sei es, dass es sich um einen Stein, ein Metall, oder andere Substanzen, die noch fester sind, handelt. Denn wenn eine Wirkung stets nur eine Ursache hat, wie ich stets geglaubt habe, oder falls viele Ursachen sich finden lassen, sie sämmtlich auf eine zurückzuführen sind: warum sollte hier das Vacuum, welches doch sicher entsteht, nicht für alle Festigkeitswiderstände der zureichende Grund sein?

Salv. Ich möchte jetzt nicht auf die Frage eingehen, ob das Vacuum ohne jegliches andere Mittel allein genüge die Theile eines festen Körpers zusammenzuhalten, aber ich kann versichern, dass diese Ursache, welche zwar vorhanden ist und hinreicht zum Verständniss der Adhäsion der Platten, nicht genügt, die Festigkeit der Theile eines Marmorcylinders zu erklären, oder eines Metalles, die nach heftiger Zerrung schliesslich auseinander weichen und zerbrechen. — Und wenn ich ein Mittel entdecke zu unterscheiden jene schon wohlerkannte Resistenz, die vom Vacuum herrührt, von jedweder anderen Art Widerstandsfähigkeit, die zu jener noch hinzukommt, und wenn ich Euch zeigen kann, wie jener erste Grund keineswegs allein genügt zur Erklärung der Wirkung, werdet Ihr mir dann nicht einräumen, dass wir eine andere Ursache einzuführen genöthigt seien? — Helft ihm doch, Herr *Simplicio*, da Herr *Sagredo* nicht weiss, was er antworten soll. —

Simp. Sicherlich beruht das Schweigen des Herrn *Sagredo* auf einem andern Grunde, da man gegen eine so nothwendige und klare Consequenz sich nicht auflehnen kann.

Sagr. Ihr habt's errathen, Herr *Simplicio*. Ich dachte darüber nach, ob, wenn eine Million Goldes jährlich, die aus Spanien kommt, um das Militär zu besolden, nicht genügt, — ob es dann nöthig sei einen andern Gehalt festzusetzen, um die Soldaten zu bezahlen. Aber fahrt fort, Herr *Salviati*, und nehmt an, ich lasse Eure Schlussfolgerung gelten, zeigt uns die Möglichkeit, die Bildung eines Vacuums zu sondern von andern Ursachen, und indem Ihr jene messet, lasset uns sehen, warum sie die fragliche Wirkung nicht erklären könne.

Salv. Mögen denn Eure guten Geister Euch beistehen. Ich will Euch mittheilen die Art und Weise, wie die Kraft des Vacuums von anderen Kräften gesondert, und dann wie sie gemessen werden könne. Um sie abzutrennen, denken wir uns eine Substanz, die keine andere Widerstandskraft gegen die Trennung der Theile besitzt, als das Vacuum, und schon lange hat unser Akademiker bewiesen, dass das Wasser solch ein Körper sei. Wenn man in geeigneter Weise auf einen Cylinder aus Wasser wirkt, und beim Zerren desselben eine Resistenz der Theilchen empfände, so könnte solche aus keiner anderen Ursache erfolgen, als aus dem Widerstande des Vacuums. Um das bezügliche Experiment auszuführen, habe ich ein Triebwerk ersonnen, das ich mit einer Zeichnung leichter als mit blossen Worten erläutern kann. Sei *CABD* der Querschnitt eines Cylinders, aus Metall oder aus Glas, nur innen accurat und schön geformt, in dessen Innerem in vollkommenstem Contact sich ein Cylinder aus Holz befände, *EFGH*, der auf und ab gleiten könne, und der in der Mitte durchbohrt sei, um einen am Ende *K* gekrümmten Eisendraht hindurchgehen zu lassen, während das andere Ende *J* sich kegelförmig verdicke, so dass die mittlere Durchbohrung im Holze im oberen Theile erweitert sei zu einer conischen Ausbohrung, die genau einem conischen Eisenstück sich anschmiegt, sobald man unten bei K anzieht. Im Hohlcylinder AD steckt ein Kolben EH aus Holz, der nicht das untere Ende des Cylinders erreichen, sondern 2—3 Finger breit abstehen soll. Dieser Raum werde mit Wasser angefüllt, das man eingiesst, indem man das Gefäss mit der Oeffnung CD nach oben hält, und auf den Kolben EH Wasser giesst, während man den Stöpsel J etwas von der conischen Erweiterung im Holz entfernt, um der Luft den Austritt zu gestatten durch die Durchbohrung im Kolben, welche letztere deshalb reichlichen Spielraum giebt dem Eisenstabe JK. Nachdem alle Luft aus dem Hohlraume ausgetreten, zieht man das Eisen mit seinem conischen Ende straff an und bewirkt dadurch einen festen Verschluss mit dem Kolben, nun kehrt man das Gefäss um und befestigt an den Haken K ein Geschirr mit Sand und schüttet so viel auf, dass schliesslich die Oberfläche EF des Kolbens von der Wasserfläche sich trennt. Bisher waren beide nur durch das Widerstreben des Vacuums mit einander vereinigt: wägt man nun den Kolben mit dem Eisenstabe, dem Gefässe und seinem Inhalte, so haben wir die Kraft des Vacuums: wenn wir nun an einen Cylinder aus Marmor soviel anhängen, wie der Cylinder voll Wasser wiegt, dazu noch soviel, dass zusammen mit dem Gewicht des Marmors selbst man ebensoviel erhält wie alle vorhin genannten Dinge zusammen wiegen, und wenn dann der Bruch erfolgen sollte, so können wir ohne Zweifel annehmen, dass das Vacuum der einzige Grund sei für die Festigkeit des Marmors: da dieses Gewicht aber keineswegs genügt und zum Zerbrechen des Marmors noch das vierfache Gewicht hinzugefügt werden muss, so müssen wir behaupten, dass zur Festigkeit die Vacuumbildung nur den fünften Theil beiträgt, der übrige Antheil aber vier mal grösser ist.

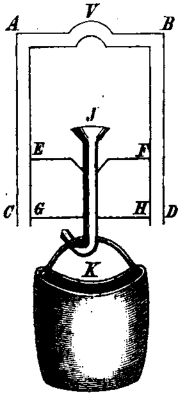

Fig. 4.

Simpl. Man kann nicht leugnen, dass die Erfindung scharfsinnig sei, aber ich bemerke viele schwierige Punkte, die mir die Sache noch zweifelhaft erscheinen lassen; denn wer sagt uns, dass Luft nicht durch Glas und durch den Kolben hindurch-dringen könne, seien dieselben auch noch so gut mit Werch oder anderem weichen Stoffe umgeben? Und folglich, wenn auch der Stöpsel gut die conische Oeffnung verschliesst, würde es vielleicht gut sein mit Wachs oder Terpentin den Verschluss zu schmieren. Warum ferner könnten nicht die Wassertheilchen sich von einander trennen und eine weniger dichte Masse bilden? Warum dringt die Luft nicht ein, oder andere Dünste und Substanzen, die noch feiner sind als die Poren des Holzes, ja selbst als die Poren des Glases?

Salv. Mit grosser Gewandtheit legt Herr *Simplicio* uns die Schwierigkeiten vor, und zum Theil giebt er uns selbst die Mittel zur Hebung derselben, namentlich hinsichtlich des Eindringens der Luft in Holz und Glas. Aber ich füge hinzu, dass wir ihn widerlegen und zugleich Neues entdecken werden, wenn die vorgeführten Schwierigkeiten wirklich vorhanden sind. Denn wenn Wasser von Natur ausdehnbar ist, wenn auch mit Anwendung einer gewissen Kraft, wie das bei der Luft der Fall ist, so wird der Kolben sich senken, und wenn wir am oberen Theile des Gefässes ein kleines Stück hervorragen lassen, wie hier bei *V*, so würde man an dieser Stelle jene zarte Materie sich sammeln sehen, welche die Poren des Glases oder des Holzes durchsetzt hätte, oder Luft, die am Kolben vorbeistreichen könnte. Wenn aber all solche feine Materie nicht sich zeigt, so dürfen wir das Experiment als mit allen Cautelen ausgeführt betrachten; und wir werden zugeben, dass das Wasser nicht dehnbar sei, und dass das Glas undurchdringlich sei selbst für die allerfeinste Substanz.

Sagr. Ich aber freue mich auf Grund dieser Discussion die Ursache einer Erscheinung gefunden zu haben, die mir lange Zeit wunderbar und unerklärbar erschien. Ich sah einmal einen Brunnen, in welchem, um Wasser zu schöpfen, ein Pumpenstock angebracht war von Jemandem, der wohl vergeblich gehofft hatte das Wasser mit weniger Anstrengung zu erhalten, oder der eine grössere Menge zu gewinnen gedachte, als mit den gewöhnlichen Eimern: und dieser Pumpenstock hatte einen Kolben mit einem Ventil, so dass das Wasser durch Anziehung emporstieg, und nicht durch Druck wie in den Pumpen, welche solch eine Vorrichtung unten haben. Der Apparat schaffte das Wasser gut und reichlich, sobald dasselbe im Brunnen eine gewisse Höhe erreichte, sobald aber das Wasser unter eine gewisse Höhe sank, arbeitete die Pumpe nicht mehr. Als ich das zum erstenmale sah, glaubte ich, die Pumpe sei verdorben, ich suchte den Meister auf, damit er sie zurecht mache, dieser aber versicherte, es fehle nichts, als dass das Wasser, welches zu tief stehe, nicht auf solche Höhe gehoben werden könne; und er fügte hinzu, dass weder mit Pumpen, noch mit anderen Maschinen, die das Wasser durch Attraction heben, es möglich sei, dasselbe ein Haar breit mehr als 18 Ellen ansteigen zu lassen, und seien die Pumpen weit oder eng, es bleibe dieses die äusserste Hubhöhe. Und ich habe bisher nicht erkannt, dass ebenso wie ein Strick, eine Holzmasse und ein Eisenstab so stark verlängert gedacht werden können, bis schliesslich das eigene Gewicht sie zerreisst, dass dasselbe auch viel leichter bei einer Säule aus Wasser eintreten muss. Denn was ist es anderes, was man anzieht in der Saugpumpe, als ein Cylinder voll Wasser, der oben seine Befestigung hat und nun fort und fort verlängert wird, bis diejenige Grenze erreicht wird, über welche hinaus bei noch weiterer Verlängerung die Wassersäule zerreisst, wie ein Seil?

Salv. Genau so verhält sich die Sache, und weil diese Höhe von 18 Ellen eben jene Grenze angiebt, bis zu welcher jede beliebige Wassermenge, in weiten, engen oder sehr engen Röhren, so eng wie ein Strohhalm, sich erheben kann, so werden wir stets, wenn wir dieses Wasser wägen, welches in 18 Ellen Höhe enthalten war, einerlei ob der Querschnitt gross oder klein war, wir werden, sage ich, stets den Werth des Widerstandes haben, den das Vacuum darbietet in einem festen Cylinder aus irgend welcher Materie, wenn letzterer nur ebenso dick ist, wie das innere Lumen der Röhre. Und obgleich wir schon so viel darüber verhandelt haben, wollen wir doch noch zeigen, wie von all den Metallen, Steinen, Hölzern, Gläsern etc. man leicht finden könne, bis zu welcher Länge man einen jeden Cylinder bringen kann, seien es Drähte oder Stäbe von beliebiger Dicke; über welchen Betrag hinaus dieselben in Folge der eigenen Last brechen müssten. Nehmen Sie z. B. einen kupfernen Draht von beliebiger Länge, befestigen Sie das obere Ende an irgend etwas, und belasten Sie das untere Ende immer mehr und mehr, bis der Draht reisst, und sei das Maximalgewicht 50 Pfund gewesen, so ist es klar, dass 50 Pfund Kupfer zum Eigengewicht des Drahtes, welches etwa $^1/_8$ Unze betrage, hinzugefügt, und in Draht der gewählten Sorte ausgezogen, die Maximallänge desjenigen Kupferdrahtes ergäbe, der sich gerade noch halten kann. Messen Sie alsdann, wie lang der Faden war, welcher zerriss, es sei z. B. 1 Elle: und da er $^1/_8$ Unze wog und da er sich selbst und 50 Pfund dazu trug, welches = 4800 Achtelunzen sind, so folgt daraus, dass jeder Kupferdraht von beliebiger Dicke sich selbst tragen kann bis zu einer Länge von 4800 Ellen, und nicht mehr; und daher wird ein Kupferstab, da er sich selbst bis zu dieser Länge tragen kann, eine Festigkeit haben, die soviel mal grösser ist, als der Widerstand des Vacuums, als sein Gewicht das eines Wassercylinders von gleicher Dicke wie der Kupferdraht und von 18 Ellen Länge übertrifft; da nun Kupfer 9 mal schwerer ist, so beträgt der Widerstand des Vacuums soviel, wie das Gewicht eines 2 Ellen langen Drahtes gleicher Dicke; und ähnlich kann die Länge eines jeden Fadens berechnet werden, der sich selbst gerade noch tragen kann, und den Antheil des Vacuums dazu.

Sagr. Jetzt erübrigt noch, dass Ihr uns erklärt, worin der übrige Theil Festigkeit bestehe, oder, was jenes Bindemittel oder jenes Zähe sei, das die Theile des festen Körpers zusammenhält, ausser der Kraft, die vom Vacuum herrührt; denn ich kann mir nicht denken, welch ein Leim nicht im heftigsten Feuer verbrannt und verzehrt werden sollte, im Laufe von 2, 3 oder 4 Monaten, ja selbst in 10 oder 100; denn wenn Silber, Gold oder Glas so lange im geschmolzenen Zustande gestanden haben, kehren die Theile bei der Abkühlung in den früheren Zustand zurück und werden fest. Dieselbe Schwierigkeit, die ich finde in der Festigkeit des Glases, kehrt überdies wieder bei der Festigkeit des Leimes oder jenes gedachten Bindemittels selbst.

Salv. Vor kurzem sagte ich Euch, Eure guten Geister mögen Euch beistehen: jetzt hege ich dieselbe Besorgniss. Da ich mit der Hand fühle, wie der Widerstand des Vacuums es ist, welcher zwei Platten nur mit grosser Vehemenz zu trennen gestattet, und da noch stärker die beiden Theile der Marmorsäule zusammenhalten, und ich nicht einsehe, wie dasselbe statt haben könne bei der Cohärenz der kleinsten Theile, bis zu den allerkleinsten derselben Materie; und da doch eine Wirkung nur eine wahre und völlig reine Ursache haben kann, ich aber kein anderes Bindemittel finde, warum sollten wir nicht versuchen zu ergründen, ob nicht vielleicht doch das Vacuum allein zur Erklärung genügt?

Simpl. Da Ihr nun schon bewiesen habt, dass der Widerstand des grossen Vacuums bei der Trennung grosser Theile eines festen Körpers sehr klein sei im Vergleich mit der Festigkeit der kleinsten Theile, warum wollt Ihr es nicht für ausgemacht halten, dass dieser Widerstand ganz anderer Art sei?

Salv. Hierauf antwortete bereits Herr *Sagredo*, dass man einfach alle einzelnen Soldaten bezahlt mit dem Gelde, welches durch allgemeine Steuern in Hellern und Pfennigen beigetrieben ward, wenn auch mehr als eine Million in Gold nöthig ist, das ganze Heer zu bezahlen. Wer weiss denn, ob nicht andere, ganz kleine Hohlräume für die kleinsten Theilchen wirksam sind, sodass überall aus derselben Münze das vorhanden sei, womit sie sich alle zusammenhalten? Ich will Euch sagen, was mir soeben beifällt: ich theile es Euch mit nicht als absolute Wahrheit, sondern als einen noch unverdauten Gedanken, den ich gern einer tieferen Betrachtung empfehlen möchte. Sehet nun zu, ob Euch etwas gefällt; das Uebrige beurtheilt, wie Ihr wollt. So oft ich zusah, wie das Feuer sich schlängelt durch die kleinsten Theilchen eines Metalles, welche so fest zusammenhielten und doch schliesslich getrennt wurden; und wie nachher, wenn sie aus dem Feuer genommen worden, sie mit derselben Zähigkeit in den früheren Zustand zurückkehren, ohne dass im Geringsten das Gewicht des Goldes sich mindere, so oft dachte ich, dass das dadurch geschehen könne, dass die kleinsten Theilchen des Feuers in die engen Poren des Metalles hineintreten (in welche wegen ihrer Kleinheit weder Luft noch viele andere Flüssigkeiten eindringen können); hierdurch könnten die kleinsten Vacuums zwischen denselben erfüllt werden, sodass die kleinsten Theilchen von der Kraft, mit welcher eben diese Vacuums sich gegenseitig anziehen und eine Trennung verhindern, befreit werden; und da sie sich nun frei bewegen können, wird die Masse flüssig, und bliebe so, so lange die Feuertheilchen zwischen ihnen blieben; sobald letztere aber abziehen, hinterlassen sie die früheren leeren Räume; damit kehrt die gewöhnliche Attraction wieder und damit das Festhalten der Theilchen. Und auf den Einwand des Herrn *Simplicio*, scheint mir, kann man erwidern, dass, wenn auch solche Vacuums sehr klein sein sollten und folglich jedes einzelne leicht zu überwinden wäre, dennoch die unzählbare Menge derselben den Widerstand gleichsam multiplicirt: und welcher Art und wie gross die Kraft sei, die aus einer immensen Zahl äusserst schwacher vereinigter Momente entstehen könne, dafür erhalten wir eine evidente Analogie, wenn wir sehen, wie ein Gewicht von Millionen Pfund, welches von sehr dicken Hanftauen getragen wird, sich senkt und schliesslich doch überwunden wird, wenn in das Tau unzählige Wassertheilchen eindringen, die entweder der Südwind herbeiführt, oder die auch nur zerstreut als feinster Nebel durch die Luft streichen. Sie treiben einander von einer Faser zur anderen auch im gestrecktesten Seil, und

2*

selbst das enorme Gewicht, welches angehängt ist, vermag ihnen den Eingang nicht zu wehren; sodass sie durch die engen Wege eindringen und die Seile verdicken, daher auch dieselben verkürzen, wodurch die schwerste Last gehoben werden kann.

Sagr. Sie zweifeln nicht daran, dass, wenn ein Widerstand nicht unendlich gross ist, er stets von einer Menge sehr kleiner Kräfte überwunden werden könne; sodass auch eine gewisse Anzahl von Ameisen ein Schiff, das mit Korn belastet ist, ans Land ziehen könnte; denn wir können täglich beobachten, wie eine Ameise ein Körnchen trägt; im Schiffe aber ist die Anzahl der Körnchen nicht unendlich, aber da sie in gewisser Anzahl vorhanden sind, die auch vier oder sechs mal grösser gedacht werden kann, so wird auch eine gewisse Anzahl von Ameisen das Schiff sammt den Körnern ans Land ziehen können. Freilich wird die Zahl sehr gross sein, wie meiner Meinung nach auch die Hohlräume im Metalle sehr zahlreich sind.[1])

Salv. Aber wenn sie nun unendlich an Zahl sein sollten, haltet Ihr es dann für unmöglich?

Sagr. Nein, wenn nur das Metall eine endliche Masse ist: sonst . . .

Salv. Sonst? Nun was? Wohlan, da wir bei Paradoxen angelangt sind, wollen wir untersuchen, ob man nicht irgendwie beweisen könnte, wie in einer continuirlichen endlichen Strecke nicht vielleicht unendlich viele Vacuums sein könnten: zugleich wird sich zeigen, ob, wenn nicht anderes, so doch eine angenäherte Lösung des erstaunlichsten Problems sich finden könnte, welches von Aristoteles zu denen gerechnet wird, die er selbst mit Bewunderung betrachtet, wenn man sich auch auf Mechanik beschränkt; die Lösung könnte vielleicht nicht weniger zutreffend sein als die seinige, und zugleich abweichend von der scharfsinnigen Betrachtung des Herrn *di Guevara*. Aber zunächst müssen wir einen Satz betrachten, der von anderen nicht hervorgehoben worden ist, von welchem die Lösung der Aufgaben abhängt, und auf welchem andere neue und bemerkenswerthe Erscheinungen beruhen. Zu besserem Verständniss zeichnen wir eine Figur: Es sei ein gleichseitiges gleichwinkliges Polygon mit beliebig vielen Seiten gegeben, das Centrum sei G. Es sei z. B. ein Sechseck $ABCDEF$, dem wir ein zweites ähnliches concentrisch einschreiben $HIKLMN$. Vom grösseren Polygon verlängern wir eine Seite AB nach S hin, und entsprechend vom kleineren die Seite HI nach derselben Richtung hin, so dass HT parallel AS wird, endlich durch das Centrum G eine äquidistante Parallele nach GV. Das grössere Polygon mitsammt dem kleineren wälze sich auf der Linie AS. Es ist klar, dass, wenn B festbleibt beim Beginn der Wälzung, der Punkt A sich erheben und C sich senken wird, indem C den Bogen CQ beschreibt, bis die Seite BC sich der Linie AS anlegt als $BQ = BC$: bei dieser Drehung aber wird der Winkel I in dem kleineren Polygon sich über die Linie IT erheben, da IB gegen AS geneigt ist: und nicht eher wird I sich gegen die Parallele IT anlegen, als bis C in Q angelangt ist: alsdann wird I auf O fallen, nachdem der Bogen IO ausserhalb der Linie HT beschrieben worden, und IK wird auf OP gefallen sein.

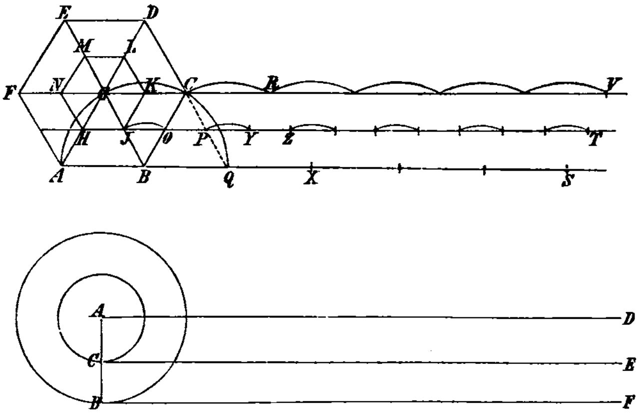

Fig. 5.

Das Centrum G aber wird unterdess stets oberhalb GV gewandert sein, und nicht eher dieselbe erreichen, als bis der Bogen GC zurückgelegt ist. Nach diesem ersten Schritt wird das grössere Polygon mit der Seite BC auf BQ liegen, die Seite IK des kleineren auf OP, indem die ganze Strecke IO übersprungen und nicht berührt worden ist, und das Centrum G wird in C angelangt sein, ohne GV zu berühren. Und schliesslich wird die ganze Figur in eine Lage gerathen, die der ersten ähnlich ist, so dass, wenn man die Wälzung fortsetzt, und den zweiten Schritt ausgeführt hat, die Seite des grösseren Polygons DC auf QX liegen wird, die Seite KL des kleineren (nach Auslassung der Strecke PY) auf YZ, und das Centrum, stets ausserhalb

GV fortschreitend, nur in R letztere erreichen wird nach dem grossen Sprunge CR [s. S. 23, Fig. 5]. Zuletzt nach Vollendung einer ganzen Umwälzung, wird das grössere Polygon auf AS sechs gleiche Linien beschrieben haben, welche seinem eigenen Umfange gleich sind, ohne irgend welche Auslassung, das kleinere Polygon wird gleichfalls sechs gleiche Strecken bedeckt haben, deren Längen seinem Umfange gleich sind, aber 5 Bogenstrecken werden eingeschaltet sein, unterhalb welcher die Sehnen unberührt bleiben, Theile von HT, die das Polygon nicht berührt; endlich wird G niemals die Parallele GV treffen, ausser in 6 Punkten. Hieraus könnt Ihr entnehmen, wie die vom kleineren Polygon zurückgelegte Strecke fast gleich ist der vom grösseren Polygon durchlaufenen, nämlich HT mit AS verglichen, gegen welch letzteres es nur um soviel kleiner ist, als die Sehne eines dieser Bögen kürzer ist, wenn man nämlich HT mitsammt den Strecken unter den Bögen meint. Nun wünsche ich, dass Ihr das, was ich Euch an unserem Beispiele erklärt habe, Euch ähnlich vorstellt hinsichtlich aller anderen Polygone, aus wieviel Seiten sie auch bestehen mögen, vorausgesetzt nur, dass sie ähnlich, concentrisch und mit einander verbunden seien; ferner dass bei der Wälzung des grössten auch das beliebig kleiner gedachte sich mitbewege; dass Ihr, ich betone es, festhaltet, dass die beschriebenen Wege nahezu einander gleich, wenn die vom kleineren Polygon zurückgelegten Strecken so verstanden werden, dass die unter den Bögen liegenden Intervalle mitgezählt werden, obwohl die Parallellinien von keinem Punkte unterdess berührt worden. Sei nun das grosse Polygon ein solches von 1000 Seiten und lege dasselbe eine seinem Umfange gleiche Strecke zurück; und wandere das kleine durch eine nahe ebenso lange Strecke, indem es 1000 kleine Strecken berührt, und 1000 leere Räume dazwischen bleiben, denn so können wir letztere bezeichnen im Gegensatz zu den ersten. Das bisher Vorgetragene hat weder Schwierigkeit, noch erscheint es zweifelhaft. Aber sagt mir, wenn um irgend ein Centrum, z. B. um A herum, wir 2 concentrische Kreise beschreiben, die mit einander verbunden sind, und wenn wir am Ende ihrer Halbmesser von C und B aus Tangenten ziehen CE, BF, und durch das Centrum A die Parallele AD, und wenn wir den grossen Kreis auf der Linie BF rollen lassen (und BF gleich dem Umfang des Kreises machen, wie auch die anderen Linien CE, AD), und wenn endlich eine Umwälzung vollendet ist, was werden der kleinere Kreis und das Centrum gemacht haben? Letzteres wird sicher die ganze Strecke AD durchlaufen haben, und der Umfang jenes wird mit seinen Punkten die ganze Linie CE berührt haben, mit einem ähnlichen Vorgange, wie oben an den Polygonen gezeigt worden: mit dem einzigen Unterschiede, dass HT nicht in allen Punkten vom kleineren Polygon berührt wurde, weil viele kleine Strecken übersprungen waren, hier aber bei den Kreisen kann der Umfang des kleineren niemals die Linie CE verlassen, so dass etwa kein Theil desselben die letztere berührte, und stets wird irgend ein Punkt des Umfanges auf der Geraden sich befinden. Wie kann nun der kleinere Kreis ohne Sprünge einen soviel grösseren Weg beschreiben als sein Umfang beträgt?

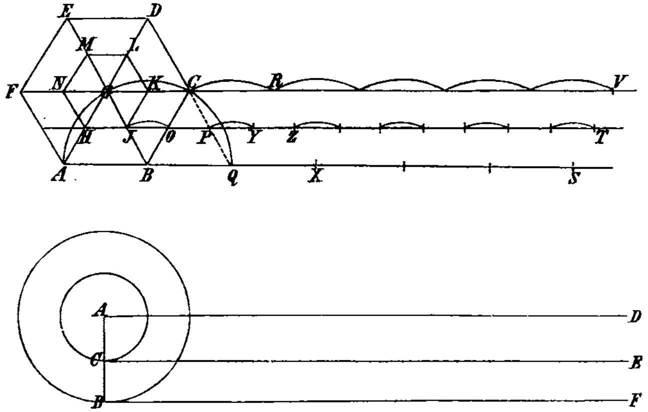

Fig. 5.

Sagr. Ich glaube, man könnte sagen, dass, sowie der Kreismittelpunkt, über AD hinweggezogen, diese Linie stets berührt, obwohl es doch nur ein Punkt ist, so auch die Punkte des kleineren Kreises, fortgezogen durch die Bewegung des grösseren, gleitend über die Theile der Linie CE fortrücken könnten.

Salv. Das kann nicht sein, aus zwei Gründen: erstens weil nicht mehr Grund vorhanden wäre dafür, dass eine Berührung ähnlich der in C gleitend vor sich ginge durch eine gewisse Strecke längs CE, und durch eine gewisse andere Strecke nicht: und wenn dieses geschähe, so müsste es unendlich viele solcher gleitenden Berührungen geben (da der Punkte unendlich viele sind), die Gleitstrecken auf CE wären also unendlich an Zahl, und da sie einen Werth haben, müssten sie eine unendlich lange Linie bilden, während CE endlich ist. Zweitens, da der grosse Kreis bei einer Umwälzung stets den Berührungspunkt wechselt, so muss auch der kleine Kreis den Berührungspunkt fortwährend wechseln, da man nicht von einem anderen Punkte als von B eine Gerade nach dem Centrum A ziehen kann, die zugleich durch den Punkt C hindurchgeht, sodass, wenn der grosse Kreis seinen Berührungspunkt ändert, sofort auch der kleine dasselbe thut, und kein Punkt des kleinen Kreises berührt mehr als einen Punkt seiner Geraden CE. Ueberdies schmiegt sich auch bei der Umwälzung jener kleineren Polygone kein Punkt des Umfanges in mehr als einem Punkte an jene Linie, die vom selben Umfange aus gezogen war, wie man leicht einsehen kann, wenn man bedenkt, dass IK parallel BC ist, und daher, solange als BC noch nicht BQ bedeckt, die Linie IK erhoben bleibt über IP und sie nicht eher erreicht, als bis in demselben Augenblick BC auf BQ fällt, und dann vereinigt sich die ganze Strecke IK mit OP, um sich sogleich wieder zu erheben.

Sagr. Der Vorgang ist wahrhaftig sehr verzwickt, auch finde ich keine Lösung, darum sagt uns das Erforderliche.

Salv. Ich möchte zu den oben betrachteten Polygonen zurückkehren, deren Vorgang verständlich war und schon erfasst wurde, und sagen, dass, sowie in den Polygonen von 100 000 Seiten, die zurückgelegte Strecke gleich dem Umfange des grossen Polygons war, d. h. gleich den 100 000 Seiten, die einander continuirlich folgen, und ebenso gleich den 100 000 Seiten des kleinen, aber mit Einschaltung von 100 000 leeren Stellen; so würde ich hier bei den Kreisen (welche Polygone mit unendlich vielen Seiten sind) sagen, die zurückgelegte Linie sei gleich den unendlich vielen Seiten des grossen Kreises, mit continuirlichem Anschluss, und gleich den unendlich vielen Seiten des kleinen Kreises, bei letzteren aber würde ich ebensoviele leere Strecken einschalten; und da die Seiten nicht endlich, sondern unendlich an Zahl sind, so sind auch die Zwischenstrecken nicht endlich, sondern unendlich; jene unendlich vielen Punkte nämlich erfüllen die Linie ohne Lücken, diese nicht. Und hier bitte ich zu bemerken, wie es nicht möglich ist durch Theilung einer Linie in endliche und folglich zählbare Theile, die letzteren in eine Strecke wieder zusammen zu ordnen, die grösser wäre als die ursprüngliche, noch ungetheilte Linie, wenn man nicht leere Strecken dazwischenschiebt, aber aufgelöst in unendlich viel, d. h. in die untheilbaren unendlich kleinen Theile, können wir die Linie ins Weite ausgestreckt uns vorstellen ohne Zwischenschaltung endlicher leerer, wohl aber mit Einschiebung unendlich kleiner untheilbarer Strecken. Was aber von Linien ausgesagt wird, wird sich auf die Oberfläche fester Körper beziehen, wenn man dieselben aus einer unendlichen Anzahl von Atomen zusammengesetzt betrachtet; denn wollten wir die Körper theilen in eine endliche Anzahl von Theilen, so ist es unzweifelhaft, dass wir sie nicht zusammensetzen könnten zu Körpern, die mehr Raum einnehmen als früher, wenn nicht leere Räume dazwischen geschoben werden, d. h. also Räume, in denen keine Theile des festen Körpers vorhanden sind; aber wenn wir die allerhöchste und letzte Auflösung in die Urbestandtheile als Zertheilung in unendlich viele unendlich kleine Parcellen erfassen, dann können wir solche zusammensetzen zu sehr grossen Körpern, ohne Einschaltung endlicher leerer Räume, wohl aber mit Zwischenlagerung unendlich vieler unendlich kleiner Räume; und in dieser Weise kann z. B. eine kleine Goldkugel in einen sehr grossen Körper ausgedehnt werden ohne Einschaltung endlicher Räume: immerhin können wir annehmen, dass das Gold aus unendlich kleinen Atomen bestehe.[2])

Simpl. Mir scheint, Ihr seid jenen Hohlräumen auf der Spur, die ein alter Philosoph aufgestellt hat.

Salv. Ihr unterlasst hinzuzufügen: ein Philosoph, der die göttliche Vorsehung leugnete, wie in einem sehr ähnlichen Falle ein Gegner unseres Akademikers ziemlich wenig passend bemerkte.

Simpl. Ich bemerkte wohl, und nicht ohne Verdruss, den Groll des schlimm gesonnenen Widersachers; aber nicht nur aus Rücksicht gegen den Glauben würde ich diese Fragen zu berühren vermeiden, sondern auch weil ich weiss, wie wenig dieselben passen zu Eurer Mässigung und hohen Bildung, da Ihr nicht nur religiös und fromm, sondern auch katholisch und gottesfürchtig seid. Aber um auf unser Problem zurückzukommen, ich finde noch viele schwierige Punkte in unserem Gespräch, von denen ich nicht loskomme. Vor Allem, wenn die beiden Kreisumfänge gleich sind den beiden Geraden CE, BF, die letztere in völligem Anschluss, jene mit Einschaltung unendlich vieler leerer Punkte, in welcher Weise kann dann die vom Centrum beschriebene Gerade AD, da sie von einem Punkte beschrieben worden, eben diesem Punkte gleich gesetzt werden, da doch AD unendlich viele Punkte enthält? Ueberdies scheint mir dieses Zusammensetzen der Linie aus Punkten, des Theilbaren aus Untheilbarem. des Endlichen aus Unendlichem, eine harte Nuss zu sein: und die Annahme eines Vacuums, welches so treffend von Aristoteles widerlegt worden ist, hat ebendieselben Schwierigkeiten.

Salv. Deren giebt es hier gewiss, und wohl noch andere mehr: aber besinnen wir uns darauf, dass wir im Gebiete des unendlich Grossen und des kleinsten Untheilbaren uns befinden, jenes unbegreiflich wegen der Grösse und dieses wegen der Kleinheit; aus all dem erkennen wir, dass die menschliche Sprache nicht genügt, es entsprechend auszudrücken, doch werde ich mir die Freiheit nehmen, einige Gedanken vorzuführen, die, wenn sie auch nicht vollständig die Frage abschliessen, doch wenigstens ihrer Neuheit wegen bemerkenswerth sind: indess, fürchte ich, erscheint Ihnen die häufige Abschweifung inopportun und unangenehm.

Sagr. Bitte, gönnen Sie uns die Wohlthat und den Gewinn, der aus der lebendigen Unterhaltung zu schöpfen ist; wir sind unter Freunden, und behandeln freie zwanglose Themata; welch ein Unterschied gegen todte Bücher, die tausend Zweifel erregen, deren keiner gehoben wird. Theilt uns also Eure Gedanken mit, die im Lauf unseres Gespräches Euch aufleuchten; wir werden Zeit genug haben, da keine nothwendigen Geschäfte uns hindern fortzusetzen und andere berührte Fragen zu erledigen, insbesondere müssen die von Herrn *Simplicio* geäusserten Bedenken erledigt werden.

Salv. Wohlan denn, wie es Euch gefällig ist. Vom ersten zu beginnen, fragten wir, wie es komme, dass ein einziger Punkt einer Linie gleich sein könne. Da sehe ich für jetzt keinen andern Ausweg, als eine Unwahrscheinlichkeit durch eine andere ähnliche oder grössere geringer erscheinen zu lassen, wie so oft eine wunderbare Sache durch eine noch wunderbarere abgeschwächt wird. Denkt Euch zwei gleiche Flächen und zugleich zwei gleiche Körper, auf jenen Flächen stehend, lasset ferner beide allmählich und stetig kleiner werden, so zwar, dass beide einander stets gleich bleiben, bis schliesslich der eine der beiden Körper zugleich mit seiner Basis in eine lange Linie zusammenschrumpft, der andere Körper nebst seiner Fläche dagegen in einen einzigen Punkt, mit andern Worten also, diese Fläche gehe in e i n e n Punkt, jene in unendlich viele über.

Sagr. Das scheint in der That ein wunderbares Verhalten, lasst uns die Erklärung und den Beweis anhören.

Salv. Wir brauchen eine Figur, denn der Beweis ist rein geometrisch. *AFB* sei ein Halbkreis (Fig. 6) mit dem Centrum *C* und dem umschriebenen Rechteck *ADEB*; von *C* nach den Ecken *D* und *E* seien Gerade gezogen. Die Linie *CF*, senkrecht gegen *AB* und *DE*, bleibt fest, während die ganze Figur sich um diese Linie *CF* als Axe herumbewege. Offenbar wird vom Rechteck *ADEB* ein Cylinder beschrieben, vom Halbkreise *AFB* dagegen eine Halbkugel und vom Dreiecke *CDE* ein Kegel. Nun denken wir uns die Halbkugel herausgenommen, während wir den Kegel belassen, sowie den Ueberschuss des Cylinders über die Halbkugel, ein napfähnliches Stück, das wir »Napf« nennen wollen. Dass der Napf und der Kegel gleich gross sind, wollen wir zuerst beweisen; legen wir alsdann irgend eine Ebene parallel dem Kreise, welcher die Napfbasis mit dem Durchmesser *DE* und dem Centrum in *F* bildet, so wollen wir beweisen, dass solch eine Ebene, z. B. die durch *GN* gehende, den Napf in *GION* und den Kegel in *HL* schneiden wird, so dass der Restkegel *CHL* stets dem Reste des Napfes gleich bleibt, dessen Profil aus den Dreiecken *GAI*, *BON* bestehen wird; ferner lässt sich zeigen, dass die Basis desselben Kegels, also der Kreis mit dem Durchmesser *HL* stets gleich sei jener Fläche, die die Basis des Napfrestes bildet, und die wie ein Band von der Breite *GI* gestaltet ist. (Bemerket übrigens, wie nützlich die Definitionen der Mathematiker sind, die terminologischen Charakter haben und abgekürzte Redeweisen sind, zur Vermeidung der Mühsal, die wir soeben empfinden, da wir versäumten, die letztbetrachtete Fläche ein kreisförmiges »Band« zu nennen, und den obersten Rest des Napfes ein »Rasirmesserrund«). Wie Ihr es nun nennen möget, es genügt zu erkennen, dass, in welcher Stelle auch eine Parallelebene gedacht werde, stets der Kegelrest *CHL* gleich dem Rasirmesserrund sei: gleicherweise sind die beiden Grundflächen dieser Körper, d. h. das obengenannte Band und der Kreis *HL* einander völlig gleich. Hieraus folgt der merkwürdige Satz: dass, wenn die Schnittebene allmählich emporgehoben wird gegen *AB*, sowohl die abgeschnittenen Körper-

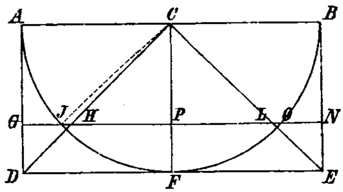

Fig. 6.

theile, wie auch die Grundflächen derselben einander stets gleich bleiben, bis schliesslich der eine Körper in einen Kreisumfang der andere in einen blossen Punkt übergeht: denn so ist einerseits der Gipfel des Napfes, andererseits die Spitze des Kegels beschaffen. Ferner, da bei der Verkleinerung beider Körper man bis ans Ende gelangt, bei steter Gleichheit beider, so muss man wohl sagen, dass auch die höchsten und letzten Verminderungen einander gleich bleiben, und dass keineswegs der eine unendlich viel mal grösser sei als der andere: es scheint mithin, dass ein grosser Kreis einem Punkte gleich genannt werden könne. Und was für die Körper gilt, findet ebenso für ihre Grundflächen statt, welche gleichfalls bei Erhebung der Schnittebene ihre Gleichheit einhalten, bis sie in demselben Momente einschrumpfen, die eine Fläche in einen Kreis, die andere in einen Punkt. Warum sollten wir letztere nicht einander gleich nennen, da sie doch die letzten Ueberbleibsel und Spuren sind, die gleiche Grössen hinterlassen haben? Und nun bemerket, dass, wenn solche Gefässe so gross wären wie immense Himmelshalbkugeln, dennoch Napfrester und die Spitzen der Kegel einander stets gleich bleiben würden, indem schliesslich jene in Kreise ausliefen, deren Umfang gleich einem grössten Kreis des Himmelsgewölbes wäre, diese dagegen in einzelne Punkte. Auf Grund solcher Speculationen erkennen wir, dass alle Kreisumfänge, seien sie auch noch so verschieden, einander gleich genannt werden können, und ein jeder gleich einem Punkte.[3])

Sagr. Diese Darlegung erscheint mir so fein und neu, dass ich beim besten Willen mich nicht dagegen sträuben kann, ja dass es mir wie ein Frevel vorkäme, ein so schönes Gefüge zu verletzen durch pedantisch plumpe Einwürfe; aber zur weiteren Befriedigung vollendet die Untersuchung; welchen geometrischen Beweis habt Ihr für die Gleicheit jener Körper und deren Basis? er kann nicht schwierig sein, der Gedankengang ist so zierlich, dass der Abschluss uns nicht fehlen darf.

Salv. Der Beweis ist leicht und kurz. Kehren wir zu unserer Figur (s. S. 29) zurück, in welcher der Winkel JPC ein Rechter ist, das Quadrat des Halbmessers JC gleich den beiden Quadraten der Seiten JP, PC. Nun ist der Halbmesser JC gleich AC und AC gleich GP, und CP gleich PH; folglich ist das Quadrat der Linie GP gleich den beiden Quadraten über JP, PH, und das Vierfache ist gleich dem Vierfachen; d. h. das Quadrat über dem Durchmesser GN ist gleich den beiden Quadraten über JO, HL; und da Kreisflächen sich zu einander verhalten wie die Quadrate der Durchmesser, so wird die Kreisfläche mit dem Durchmesser GN gleich sein den beiden Kreisflächen, deren Durchmesser JO, HL; beiderseits JO abgezogen, bleibt der Ueberschuss der Kreise GN und JO gleich dem Kreise mit dem Durchmesser HL. Den anderen Theil des Beweises können wir fortlassen, da derselbe zu finden ist in der Proposition XII. des II. Buches über den Schwerpunkt von *Luca Valerio*, dem neuen Archimedes unserer Zeit, der denselben Satz für ein anderes Problem brauchte; daher uns das zu wissen jetzt genügt und Ihr erkannt habt, dass die Grundflächen einander stets gleich sind; und dass bei fortschreitender Verkleinerung die eine in einen blossen Punkt, die andere in einen Kreis von beliebiger Grösse übergeht, denn in dieser Consequenz allein lag das Wunderbare.

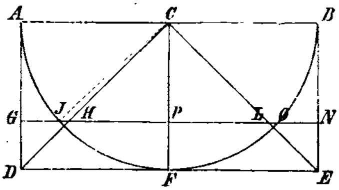

Fig. 6.

Sagr. Ein schöner Beweis entsprechend der wunderbaren Betrachtung. Jetzt gebt uns etwas über die andere von Herrn *Simplicio* angeregte Frage, wenn Ihr etwas Besonderes darüber zu sagen habt, was, wie ich glaube, nicht der Fall sein kann, da die Controverse so viel discutirt worden ist.

Salv. Ich habe allerdings einen besonderen Gedanken, ich wiederhole zunächst, dass das Unendliche an sich uns unbegreifbar ist, wie das letzte Untheilbare: versucht einmal, beide zu combiniren: wollen wir die Linie aus Punkten zusammensetzen, müssen letztere unendlich klein sein; wir müssen daher zugleich das Unendliche und das Untheilbare erfassen. Bei solchen Aufgaben sind mir verschiedene Gesichtspunkte aufgetaucht, deren wichtigste mir vielleicht nicht sogleich beifallen, die aber im Laufe des Gespräches zur Geltung kommen, wenn ich den von Euch und besonders von Herrn *Simplicio* angeregten Einwänden begegnen muss, denn ohne solche Anregung würde manches in meiner Phantasie vergraben bleiben; mit gewohnter Freiheit wollen wir sie anbringen, wenn unsere menschlich gearteten Grillen auftauchen, denn so dürfen wir das bezeichnen, angesichts der übernatürlichen Lehren, die allein wahr sind und unsere Streitfragen sicher erledigen, die uns sichere Führer sind in unserem dunklen und unsicheren Gedankenlabyrinth.

Der Haupteinwurf, den man gegen diejenigen erhebt, welche das Continuirliche aus Untheilbarem zusammensetzen, ist der, dass ein Untheilbares zu einem anderen hinzugefügt keine theilbare Grösse hervorbringt; denn wenn dieses der Fall wäre, so würde daraus folgen, dass auch das Untheilbare theilbar wäre, denn wenn 2 Untheilbare, wie z. B. zwei Punkte, zusammen eine Quantität ergäben, so würde letztere eine theilbare Linie sein, eine solche aber wäre auch aus 3, 5, 7 und anderen ungeraden Mengen zusammengesetzt zu denken; diese Linien, da 2 gleiche Theile abgetheilt werden können, lassen jenes Untheilbare, welches in der Mitte lag, theilbar erscheinen. Dieser Art begegnet man dem Einwande dadurch, dass man sagt, nicht nur 2, sondern auch 10, 100, 1000 unendlich kleine Theile können keine endliche theilbare Grösse zusammensetzen, wohl aber unendlich viele.

Simpl. Hier wird sofort ein wie mir scheint unwiderlegbares Bedenken wachgerufen; da wir nämlich sicherlich Linien ungleicher Länge haben können, die unendlich viel Punkte enthalten sollen, so müssen wir bekennen, dass wir in derselben Gattung Dinge finden können, die grösser sind, als ein Unendliches; denn die Unendlichkeit der Punkte der grösseren Linien wird doch grösser sein als die Unendlichkeit der Punkte der kleineren. Also ein Unendliches grösser als das Unendliche, das scheint mir in keiner Weise begreifbar.

Salv. Das sind die Schwierigkeiten, die dadurch entstehen, dass wir mit unserem endlichen Intellect das Unendliche discutiren, indem wir letzterem die Eigenschaften zusprechen, die wir an dem Endlichen, Begrenzten kennen, das geht aber nicht an, denn die Attribute des Grossseins, der Kleinheit und Gleichheit kommen dem Unendlichen nicht zu, daher man nicht von grösseren, kleineren oder gleichen Unendlichen sprechen kann. Ein Beispiel fällt mir ein, das ich in Fragen Herrn *Simplicio* vorlegen werde, da er die Discussion angeregt hat.

Ich setze voraus, Ihr wisset, welche Zahlen Quadratzahlen sind, und welche nicht.

Simpl. Mir ist sehr wohl bekannt, dass eine Quadratzahl aus der Multiplication einer beliebigen Zahl mit sich selbst entsteht, so sind 4, 9 Quadratzahlen, die aus 2 und 3 gebildet sind.

Salv. Vortrefflich; Ihr erinnert Euch auch, dass ebenso wie die Producte Quadrate heissen, die Producenten, d. h. diejenigen Zahlen, welche mit sich selbst multiplicirt werden, Seiten oder Wurzeln genannt werden; die anderen Zahlen, welche nicht aus zwei gleichen Factoren bestehen, sind nicht Quadrate. Wenn ich nun sage, alle Zahlen, Quadrat- und Nichtquadratzahlen zusammen, sind mehr, als die Quadratzahlen allein, so ist das doch eine durchaus richtige Behauptung; nicht?

Simpl. Dem kann man nicht widersprechen.

Salv. Frage ich nun, wieviel Quadratzahlen es giebt, so kann man in Wahrheit antworten, eben soviel als es Wurzeln giebt, denn jedes Quadrat hat eine Wurzel, jede Wurzel hat ihr Quadrat, kein Quadrat hat mehr als eine Wurzel, keine Wurzel mehr als ein Quadrat.

Simpl. Vollkommen richtig.

Salv. Wenn ich nun aber frage, wieviel Wurzeln giebt es, so kann man nicht leugnen, dass sie eben so zahlreich seien, wie die gesammte Zahlenreihe, denn es giebt keine Zahl, die nicht Wurzel eines Quadrates wäre. Steht dieses fest, so muss man sagen, dass es ebensoviel Quadrate als Wurzeln gäbe, da sie an Zahl ebenso gross als ihre Wurzeln sind, und alle Zahlen sind Wurzeln; und doch sagten wir anfangs, alle Zahlen seien mehr als alle Quadrate, da der grössere Theil derselben Nichtquadrate sind. Und wirklich nimmt die Zahl der Quadrate immer mehr ab, je grösser die Zahlen werden; denn bis 100 giebt es 10 Quadrate, d. h. der 10. Theil ist quadratisch; bis 10 000 ist der 100. Theil bloss quadratisch, bis 1 000 000 nur der 1000. Theil; und bis zu einer unendlich grossen Zahl, wenn wir sie erfassen könnten, müssten wir sagen, giebt es soviel Quadrate, wie alle Zahlen zusammen.

Sagr. Was ist denn zu thun, um einen Abschluss zu gewinnen?

Salv. Ich sehe keinen andern Ausweg als zu sagen, unendlich ist die Anzahl aller Zahlen, unendlich die der Quadrate, unendlich die der Wurzeln; weder ist die Menge der Quadrate kleiner als die der Zahlen, noch ist die Menge der letzteren grösser; und schliesslich haben die Attribute des Gleichen, des Grösseren und des Kleineren nicht statt bei Unendlichem, sondern sie gelten nur bei endlichen Grössen. Als Herr *Simplicio* mir mehrere ungleiche Linien vorlegte und mich fragte, wie es denkbar sei, dass die grössere nicht mehr Punkte habe, als die kleinere, da antwortete ich, dass sie weder mehr, noch weniger, noch gleichviel habe; aber in beiden Strecken gäbe es unendlich viele Punkte. Wahrlich aber, wenn ich ihm gesagt hätte, die eine habe soviel Punkte als es Quadratzahlen giebt, eine andere grössere soviel, als Zahlen vorhanden sind; in einer dritten kleinen soviel als es Cubikzahlen giebt; hätte ich ihm wohl eine befriedigendere Antwort ertheilt, indem ich der einen Linie mehr Punkte als der anderen zusprach, und doch beiden unendlich viele? — Das ist es, was ich auf das erste Bedenken zu sagen habe.

Sagr. Wartet ein wenig, ich bitte; und gestattet mir hinzuzufügen einen Gedanken, der mir eben einfällt; mir scheint aus dem Bisherigen zu folgen, dass weder gesagt werden könne, ein Unendliches sei grösser als ein anderes, noch auch dass ein Unendliches grösser sei als ein Endliches; denn wenn eine unendliche Zahl grösser wäre als z. B. Million, so müsste daraus folgen, dass, wenn man von der Million zu immer grösseren Zahlen fortschritte, man zur Unendlichkeit gelangen könnte; was indess unmöglich ist: im Gegentheil wenn wir zu immer grösseren Zahlen fortschreiten, so entfernen wir uns um so mehr vom Unendlichen; denn in den Zahlen, je grösser wir sie nehmen, um so seltener werden die Quadratzahlen: aber in einer unendlichen Zahl können die Quadratzahlen nicht in geringerer Menge vorhanden sein als alle Zahlen, wie wir soeben erschlossen: wenn wir also zu immer grösseren Zahlen fortschreiten, so entfernen wir uns von der unendlich grossen Zahl.

Salv. Und so folgern wir aus Eurem sinnreichen Falle, dass die Attribute »Gross«, »Klein«, »Gleich« weder zwischen unendlichen noch zwischen Unendlichem und Endlichem statt haben.

Ich gehe nun zu einer anderen Betrachtung über. Da jede Linie wie überhaupt jedes Stetige theilbar erscheint in wiederum Theilbares, so kann man der Folgerung nicht entgehen, dass die Linie aus unendlich vielen Untheilbaren bestehe, denn eine Theilung und eine weitere Theilung ohne Ende setzt voraus, dass die Theile unendlich seien, weil sonst die Theilung ein Ende hätte; und aus der Unendlichkeit der Theile folgt, dass dieselben nicht in bestimmter Anzahl vorhanden sind, denn unendlich viele endliche Grössen geben eine unendliche Grösse; und so haben wir die stetige Zusammensetzung von unendlich vielen Untheilbaren.

Simpl. Aber wenn wir die Theilung in endliche Theile fortsetzen können, wozu sollen wir da das nicht Endliche einführen?

Salv. Gerade dieses Fortsetzenkönnen der Theilung, ohne Ende, zwingt uns zur Zusammensetzung aus unendlich Kleinem. Denn, um dem Streite ein Ende zu machen, sagt mir mit Entschiedenheit, sind die Theile eines Stetigen nach Eurer Meinung endlich oder unendlich?

Simpl. Ich behaupte, sie sind unendlich und endlich: potentiell sind sie unendlich, actuell endlich. Unter »potentiell« verstehe ich »vor aller Theilung«; »actuell« heisst »nach vollführter Theilung«, denn die Theile können in Wirklichkeit nicht eher gedacht werden als nach geschehener Theilung (oder Bezeichnung); sonst sagt man, sind sie potentiell.

Salv. Also eine Linie von 20 Ellen z. B. soll nicht 20 Linien von einer Elle actuell enthalten, es sei denn dass sie in 20 Theile getheilt worden sei, vorher solle sie dieselbe nur potentiell enthalten. Nun meinetwegen, sagt mir nur, wenn nun actuell die Theilung vorgenommen worden, wächst dadurch etwa die ganze anfänglich gegebene Linie, oder schrumpft sie ein, oder bleibt sie sich an Grösse gleich?

Simpl. Weder wächst sie, noch nimmt sie ab.

Salv. Das meine ich auch. Also die Theile eines Stetigen, potentiell oder actuell, lassen die Grösse unverändert; aber es ist klar, dass die endlichen Theile, die actuell im Ganzen vorhanden sind, dasselbe unendlich gross machen, wenn sie unendlich an Zahl sind; nun können die endlichen Theile, wenn sie auch nur potentiell unendlich an Zahl sind, nur in einer unendlichen Grösse enthalten sein; also können in der endlichen Grösse die unendlich vielen Theile weder actuell noch potentiell enthalten sein.

Sagr. Wie kann denn das richtig sein, dass das Stetige ohne Ende theilbar sei?

Salv. Deshalb weil die Unterscheidung von potentiell und actuell Euch das auf eine Art betrachtet leicht erscheinen lässt, was von anderem Gesichtspunkte aus unmöglich erscheint. Ich will aber die Sache ins Reine zu bringen versuchen durch folgende Ueberlegung: Auf die Frage, ob die Theile eines begrenzten Stetigen endlich oder unendlich seien, will ich genau das Gegentheil von dem, was Herr *Simplicio* aufstellte, behaupten, nämlich dass die Theile weder endlich noch unendlich seien.

Simpl. Auf so etwas wäre ich nie verfallen, da ich keinen Mittelbegriff zwischen »Endlich« und »Unendlich« kenne; so dass die Behauptung, ein Ding sei entweder endlich oder unendlich, unrichtig und mangelhaft sein könne.

Salv. Und doch verhält sich die Sache so. Sprechen wir von unstetigen Grössen, so giebt es zwischen Endlichem und Unendlichem noch ein Drittes, nämlich das jeder beliebigen Zahl Entsprechenkönnen; sodass im vorliegenden Falle auf die Frage, ob die Theile eines Stetigen endlich oder unendlich seien, die beste Antwort sein wird, sie seien weder endlich noch unendlich, sondern besser ist es zu sagen, sie seien soviel als irgend einer angegebenen Zahl entspricht; nur ist es hinzuzufügen nöthig, dass die Theile nicht unter einer gewissen Grenze liegen, weil sie sonst einer grösseren Zahl nicht entsprechen könnten: aber es erscheint nicht nöthig, dass sie unendlich gross sei, denn eine angegebene Zahl ist und kann nie unendlich gross sein. Und so können wir nach Belieben des Fragestellers einer gegebenen Linie 100 Theile, 1000, 100 000 anweisen; aber eine Theilung in unendlich viel Theile ist nicht möglich. Ich räume daher den Philosophen ein, dass ein Stetiges soviel Theile enthält, als ihnen beliebt, und ich gebe zu, dass es dieselben actuell enthalte, oder potentiell. Dann aber füge ich hinzu: gerade so, wie eine Linie von 10 Faden, 10 Linien von je einem Faden hat, und zugleich 40 Linien von je einer Elle, und 80 Linien von einer halben Elle, so hat sie unendlich viele Punkte; letztere möget Ihr actuell oder potentiell nennen, wie Ihr wollt; ich, Herr *Simplicio*, unterwerfe mich in dieser Hinsicht Ihrer Ansicht und Ihrem Urtheil.

Simpl. Ich kann nicht umhin, Euch Beifall zu zollen: aber ich fürchte sehr, dass das gleichzeitige Enthalten vieler Punkte und andererseits endlicher Theile widerspruchsvoll sei; auch wird es Euch nicht so leicht sein die gegebene Linie in unendlich viele Punkte zu theilen, als jenen Philosophen in 10 Faden oder in 40 Ellen: endlich scheint es mir unmöglich jene Theilung wirklich auszuführen, sodass dieselbe ein potentieller Vorgang sein wird, ohne je actuell werden zu können.

Salv. Wenn eine Sache schwierig ist und nur mit Mühe, Anstrengung oder in langer Zeit ausgeführt werden kann, so wird sie dadurch nicht unmöglich, denn ich denke, Sie würden auch nicht leicht eine Linie in 1000 Theile oder in 937 — oder eine andere grosse Primzahl — theilen. Wenn ich aber das, was Ihr eine unmögliche Theilung nennt, Euch auf einen ganz kurzen Process reducire, gerade so einfach, wie wenn andere 40 Theile aufsuchen, würdet Ihr sie dann eher gelten lassen?

Simpl. Diese Art der Behandlung würde mir allerdings sehr gefallen; und auf Eure Frage kann ich nur erwidern, dass die in Aussicht gestellte Leichtigkeit mir mehr als genügend sein soll, wenn sie auch nur der einer Theilung in 1000 Theile gleich käme.

Salv. Jetzt will ich Euch etwas sagen, worüber Ihr erstaunen werdet: wenn Jemand eine Linie in ihre unendlich vielen Punkte auflösen will und wenn er sein Ziel zu erreichen hofft, indem er denselben Weg einschlägt, wie Jener, der 40, 60 oder 100 Theile sucht, d. h. wenn er etwa erst in 2 Theile sie theilt, dann in 4, u. s. f., und wenn er so seine unendlich vielen Punkte zu erhalten hofft, so würde derselbe sich gröblich irren, denn durch solchen Process müsste man bis in die Ewigkeit theilen; aber zum Untheilbaren kann dieser Weg nie führen, da man eher sich von demselben entfernt; während man die Theilung fortsetzt und die Zahl der Theile vermehrt, in der Meinung sich der Unendlichkeit zu nähern, entfernt man sich eher von derselben: und zwar aus folgendem Grunde. Wir fanden vorhin, dass in einer unendlichen Zahl es ebenso viel Quadrate oder Cuben gäbe, als es Zahlen giebt, weil die Zahlen jener gleich der Zahl der Wurzeln sein müsse, und Wurzeln alle Zahlen selbst sind. Darauf sahen wir, dass, je grössere Zahlen wir nahmen, um so weniger Quadrate unter denselben vorkamen, und noch weniger Cuben: nun ist es klar, dass, zu je grösseren Zahlen wir fortschreiten, wir uns um so mehr von der Unendlichkeit entfernen; woraus folgt, dass, wenn irgend eine Zahl das Attribut der Unendlichkeit haben sollte, es die Einheit sei. Und wirklich findet man in derselben die Bedingungen und die nöthigen Requisite der Unendlichkeit, sofern sie in sich ebensoviel Quadrate enthält, wie es Cuben und wie es Zahlen überhaupt giebt. Cf. G. Cantor

Simpl. Ich begreife nicht recht, wie das zu verstehen sei.

Salv. Die Sache ist gar nicht zweifelhaft, denn die Einheit ist ein Quadrat, sie ist ein Cubus, sie ist ein Biquadrat, und so fort; und haben Quadrate und Cuben keinerlei Eigenschaften, die nicht der Einheit zukämen; z. B. die zweier Quadratzahlen, stets eine mittlere Proportionale zwischen sich zu haben? Nehmt irgend eine Quadratzahl und nebenbei auch die Einheit, Ihr werdet stets eine mittlere Proportionale finden. Zwischen 9 und 1 ist es die 3, zwischen 4 und 1 die 2, zwischen 9 und 4 ist es die 6. Cuben haben zwischen sich zwei mittlere Proportionale, z. B. haben 8 und 27 zwischen sich 12 und 18, während 1 und 8 die 2 und die 4 haben, 1 und 27 dagegen 3 und 9. Daher ist die Einheit die einzige unendliche Zahl. Das sind wunderbare Dinge, die über unsere Einbildungskraft hinausgehen, die uns aber belehren sollten, wie sehr man irrt, wenn man dem Unendlichen dieselben Attribute zuspricht, wie dem Endlichen, während beide keinerlei Uebereinstimmung aufweisen. Als Beleg will ich Euch einen merkwürdigen Fall erzählen, der mir eben einfällt, der die unendliche Verschiedenheit, ja sogar das Widerstreben

3*

der Natur kundthut, wenn eine endliche Grösse unendlich werden soll. Diese Linie von beliebiger Länge heisse AB; ein Punkt C theile dieselbe in ungleiche Stücke: wenn man nun von

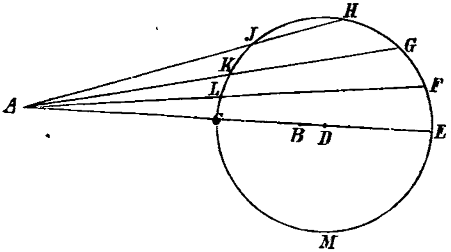

Fig. 7.

den Endpunkten $A\ B$ Kreise beschreibt mit Radien, die proportional den Strecken AC, CB sind, so werden die Schnittpunkte sämmtlich in der Peripherie eines und desselben Kreises liegen: z. B. wenn $AL:LB = AC:CB$, und $AK:KB = AJ:JB = AC:CB$ u. s. f., so liegen L, K, J, H, G, F, E alle in demselben Kreise, so dass man sagen kann, dass, wenn der Punkt C sich so bewegt, dass seine Entfernungen von A, B stets in demselben Verhältnisse stehen, ein Kreis beschrieben werde. Der so entstandene Kreis wird um so grösser sein, je näher C zur Mitte O zwischen A und B liegt, und um so kleiner, je näher C zu B liegt; so dass von den unendlich vielen Punkten, die in OB gedacht werden können, Kreise allverschiedener Grösse entstehen, schliesslich so kleine, wie das Auge eines Flohes, aber auch so grosse wie der Aequator am Himmel (del primo Mobile). Von allen Punkten zwischen O, B werden Kreise erzeugt, und sehr grosse in der Nähe von O, und setzen wir die Annäherung an O noch weiter fort, bis wir C in O selbst annehmen, welche Linie wird jetzt nach dem beschriebenen Gesetz erzeugt? Offenbar ein Kreis, der grösser als alle anderen ist, mithin ein unendlich grosser Kreis; zugleich ist es aber eine gerade Linie, senkrecht zu AB im Punkte O, unendlich lang und nie umkehrend, um das obere Ende mit dem unteren zu vereinigen, wie alle anderen Linien thaten, denn der obere Halbkreis CHE vereinigte sich mit dem unteren EMC[4]). Aber vom Punkte O aus erhob sich ein Kreis (wie auch von allen Punkten auf der anderen Seite OA Kreise erzeugt werden, die grössten von denen bei O), der grösste von allen und folglich unendlich gross; derselbe kann nicht umkehren zum Anfange und beschreibt eine gerade Linie als Peripherie eines unendlich grossen Kreises. Welcher Unterschied besteht nun zwischen einem endlichen und einem unendlichen Kreise, denn letzterer ändert derart sein Wesen, dass er seine Wesenhaftigkeit total einbüsst; möchten wir nicht zugeben, dass es keinen unendlich grossen Kreis geben könne; und consequenter Weise auch keine unendlich grosse Kugel, noch irgend einen anderen unendlichen Körper, noch eine unendlich grosse Fläche. Was sollen wir nun sagen zu solchen Metamorphosen beim Uebergange aus dem Endlichen ins Unendliche? Und warum sollen wir uns dagegen sträuben, da wir beim Aufsuchen des Unendlichen bei den Zahlen sie schliesslich bei der Einheit fanden? Wenn wir nun beim Zerbröckeln eines festen Körpers in viele Theile denselben aufs feinste zerpulvern bis in seine unendlich kleinen Atome (infiniti suoi atomi), die nicht mehr theilbar sind, warum sollen wir nicht sagen können, dieser Körper sei in ein einziges Continuum zurückgekehrt, vielleicht in eine Flüssigkeit, wie Wasser oder Quecksilber? Und sehen wir nicht, dass Steine zerschmelzen in Glas, und festes Glas durch starkes Feuer flüssiger als Wasser wird?

Sagr. Sollen wir denn annehmen, das Flüssige sei ein solches, weil es in seine unendlich kleinen untheilbaren Componenten aufgelöst sei?

Salv. Ich finde keinen besseren Ausweg, um einige Erscheinungen zu erklären, wie z. B. folgende. Nehme ich einen harten Körper, einen Stein oder ein Metall, und mit einem Hammer oder einer äusserst feinen Feile zertheile ich ihn in das allerfeinste Pulver, so ist es klar, dass die kleinsten Theile, trotzdem dass wir sie einzeln weder sehen noch fühlen können, doch noch endlich, gestaltet und zählbar sind; daher kommt es, dass sie, angehäuft, sich gegenseitig zusammenhalten; und höhlen wir das Häufchen bis zu einem gewissen Grade aus, so bleibt eine Höhlung nach, ohne dass die umgebenden Theile dieselbe ausfüllen; schütteln wir, so schliesst sich das Ganze sofort. Dieselben Erscheinungen finden wir bei der Anhäufung immer grösserer Körperchen, jeder Gestalt, selbst bei kugelförmiger, wie z. B. bei einem Haufen Hirse, Weizen, Schrot oder jedem anderen Stoffe. Wenn wir aber solches beim Wasser anzustellen versuchen, so wird es uns nicht gelingen, da dasselbe, erhoben, sofort wieder sich ebnet, wenn es von einem Gefäss oder einem anderen äusseren Körper eingeschlossen und gehalten wird; ausgehöhlt schliesst sich sofort die Höhlung, und längere Zeit bewegt, fluctuirt es, durch lange Zeit die Wellenbewegung fortsetzend. Daraus kann man wohl schliessen, dass die kleinsten Theile des Wassers, aus welchen dasselbe zu bestehen scheint (denn es ist feiner als das feinste Pulver, ohne jegliche Consistenz), etwas ganz anderes sind, als die endlichen kleinsten, zudem theilbaren Theile; und ich finde keinen anderen Unterschied, als den des Untheilbaren. Mir scheint auch seine exquisite Transparenz dafür zu sprechen; denn nehmen wir den durchsichtigsten Krystall und fangen an ihn zu zerbrechen, zu stampfen, zu pulvern, so verliert er die Transparenz, und das um so mehr, je feiner er zerrieben ist; aber Wasser, welches völlig zerrieben ist, ist auch völlig diaphan. Gold und Silber werden durch Säuren (acqua forte) aufs feinste zertheilt, während sie mittelst irgend welcher Feile stets Pulver bleiben und nicht flüssig werden: ja sie verflüssigen sich nicht eher, als bis die kleinsten Theile (gl'indivisibili) des Feuers oder der Sonnenstrahlen sie auflösen, und zwar, wie ich meine, in ihre letzten unendlich kleinen Componenten, nämlich untheilbare.

Sagr. Was Sie soeben über das Licht bemerkten, habe ich oft mit Erstaunen beobachtet, ich habe gesehen, wie mit einem Concavspiegel von 3 Spannen Durchmesser Blei augenblicklich geschmolzen wurde; deshalb meinte ich, werde ein sehr grosser, glatter, parabolischer Spiegel ebenso jedes andere Metall in kürzester Zeit schmelzen, da jener, von sphärischer Krümmung, ohne sehr gross und glänzend zu sein, mit solcher Kraft das Blei schmolz und alle brennbare Materie entzündete: Wirkungen, die mir die Wunder der Archimedischen Spiegel erklärlich machen.

Salv. *Archimedes'* Spiegeln gegenüber erscheint mir jedes Wunder glaubwürdig, das man in so manchem Schriftsteller liest; die Werke des *Archimedes* selbst habe ich mit grossem Staunen gelesen und studirt: und wenn mir Zweifel nachgeblieben wären, so würde das, was betreffs des Brennspiegels Herr *Bonaventura Cavaleri* gebracht hat und was ich mit Bewunderung gelesen habe, mir alle Schwierigkeit benehmen.

Sagr. Auch ich habe das Werk gesehen und mit grosser Befriedigung gelesen, und da ich den Autor schon kannte, so befestigte sich die Meinung, die ich vorher über ihn hatte, dass er nämlich einer der bedeutendsten Mathematiker unserer Zeit werden dürfte. Um aber auf die Wirkung der Sonnenstrahlen zurückzukommen und auf das Schmelzen der Metalle, so möchte ich fragen, ob Wirkungen dieser Art, noch dazu von solcher

Heftigkeit, ohne Bewegung zu denken seien, oder wenn mit Bewegung, dann wohl mit einer sehr schnellen?

Salv. Andere Verbrennungen und Auflösungen sehen wir mit Bewegung, und zwar mit sehr geschwinder, geschehen. Hierher gehören die Erscheinungen des Blitzes, des Pulvers in den Minen und Petarden, überhaupt Alles, was im Kohlenfeuer mit dem Blasebalge angefacht, mit dichten unreinen Gasen gemischt die Metalle flüssig werden lässt: daher ich nicht annehmen mag, dass die Wirkung des Lichtes, auch des allerreinsten, ohne Bewegung geschehe, wenn auch mit sehr grosser Geschwindigkeit.

Sagr. Aber welcher Art und wie gross dürfen wir die Lichtgeschwindigkeit schätzen? Ist die Erscheinung instantan, momentan, oder wie andere Bewegungen zeitlich? liesse sich das experimentell entscheiden?

Simpl. Die alltägliche Erfahrung lehrt, dass die Ausbreitung des Lichtes instantan sei; wenn in weiter Entfernung die Artillerie Schiessübungen anstellt, so sehen wir den Glanz der Flamme ohne Zeitverlust, während das Ohr den Schall erst nach merklicher Zeit vernimmt.

Sagr. Ei, Herr *Simplicio*, aus diesem wohlbekannten Versuche lässt sich nichts anderes schliessen, als dass der Schall mehr Zeit gebraucht, als das Licht; aber keineswegs, dass das Licht momentan und nicht zeitlich, wenn auch sehr schnell sei. Auch eine andere ähnliche Beobachtung lehrt nicht mehr: sofort wenn die Sonne am Horizonte erscheint, erblicken wir ihre Strahlen; aber wer sagt mir, dass die Strahlen nicht früher am Horizont, als in meinen Augen ankommen?

Salv. Die geringe Entscheidungskraft dieser und anderer ähnlicher Vorgänge brachte mich auf den Gedanken, ob man nicht auf irgend eine Weise sicher entscheiden könne, ob die Illumination, d. h. die Ausbreitung des Lichtes wirklich instantan sei: denn schon die ziemlich rasche Fortpflanzung des Schalles lässt voraussetzen, dass die des Lichtes nur sehr schnell sein könne. Und der Versuch, den ich ersann, war folgender: Von zwei Personen hält eine jede ein Licht in einer Laterne oder etwas dem ähnlichen, so zwar, dass ein jeder mit der Hand das Licht zu- und aufdecken könne; dann stellen sie sich einander gegenüber auf in einer kurzen Entfernung und üben sich, ein jeder dem anderen sein Licht zu verdecken und aufzudecken: so zwar, dass, wenn der Eine das andere Licht erblickt, er sofort das seine aufdeckt; solche Correspondenz wird wechselseitig mehrmals wiederholt, so dass bald ohne Fehler beim Aufdecken des Einen sofort das Aufdecken des Andern erfolgt und, wenn der eine sein Licht aufdeckt, er auch alsobald das des anderen erblicken wird. Eingeübt in kleiner Distanz, entfernen sich die beiden Personen mit ihren Laternen bis auf 2 oder 3 Meilen; und indem sie Nachts ihre Versuche anstellen, beachten sie aufmerksam, ob die Beantwortung ihrer Zeichen, in demselben Tempo wie zuvor, erfolge, woraus man wird erschliessen können, ob das Licht sich instantan fortpflanzt; denn wenn das nicht der Fall wäre, so müsste in 3 Meilen Entfernung, also auf 6 Meilen Weg hin und her, die Verzögerung ziemlich gut bemerkbar sein. Und wollte man den Versuch in noch grösserer Entfernung anstellen, in 8 oder 10 Meilen, so könnte man Teleskope benutzen, indem man die Experimentatoren da aufstellt, wo man Nachts Lichter anzuwenden pflegt, die zwar in so grosser Entfernung dem blossen Auge nicht mehr sichtbar erscheinen, aber mit Hülfe fest aufgestellter Teleskope bequem zu- und aufgedeckt werden können.[5])

Sagr. Ein schöner sinnreicher Versuch, aber, sagt uns, was hat sich bei der Ausführung desselben ergeben?

Salv. Ich habe den Versuch nur in geringer Entfernung angestellt, in weniger als einer Meile, woraus noch kein Schluss über die Instantaneität des Lichtes zu ziehen war; aber wenn es nicht momentan ist, so ist es doch sehr schnell, ja fast momentan, und ich würde es vergleichen mit dem Blitze, den wir 8 bis 10 Meilen weit zwischen den Wolken sehen; hier können wir den Anfang unterscheiden, ja geradezu die Quelle, an einem bestimmten Orte zwischen den Wolken; und wenn auch unmittelbar darauf die rascheste Ausbreitung statthat in den umgebenden Wolken, so erkennt man doch einen zeitlichen Vorgang; denn wenn die Erleuchtung überall zugleich und nicht folgweise stattfände, so könnten wir schwerlich den Ursprung unterscheiden, das Centrum seiner Bahnen und der Ausläufer. Aber in welch ein Meer sind wir aus Unachtsamkeit gerathen? Zwischen Vacuum, Unendlichem, Untheilbarem, Momentanbewegungen, um nach 1000 Dingen nie am Ufer zu landen?

Sagr. Freilich entspricht das nicht unserer Absicht. Beim Suchen der Unendlichkeit unter den Zahlen schien dieselbe in den Begriff der Einheit aufzugehen: das Untheilbare erzeugt das stets Theilbare: das Vacuum schien untrennbar in das Erfüllte eingebettet zu sein: überhaupt wandeln sich unsere ursprünglichen Anschauungen der Art, dass sogar der Kreis zu einer unendlich langen Geraden ward, was, wenn ich mich recht erinnere, jener Satz war, den Ihr, Herr *Salviati*, uns geometrisch erklären solltet. Wenn's Euch recht ist, lasst uns ohne Abschweifung den Beweis hören.

Salv. Ich stehe zu Diensten, und stelle Euch folgende Aufgabe: Eine gerade Linie sei irgendwie in ungleiche Theile getheilt; man soll einen Kreis beschreiben, so dass die Entfernungen von den Endpunkten der Linie nach den Peripheriepunkten des Kreises dasselbe Verhältniss haben, wie die beiden Theile der Linie; die von je einem Ende ausgehenden Strecken seien einander »homolog«.

Wir nehmen C zwischen A und B an und beschreiben mit der kürzeren Strecke CB einen Kreis um C, von A aus werde eine Tangente an diesen Kreis gelegt und verlängert nach E hin. D sei der Berührungspunkt; man ziehe CD, welches senkrecht zu AE sein wird; in B errichte man das Loth BE bis zum Durchschnitt mit der Tangente in E. Von E aus errichte man wiederum ein Loth auf AE, welches die verlängerte Linie AB in F treffe.

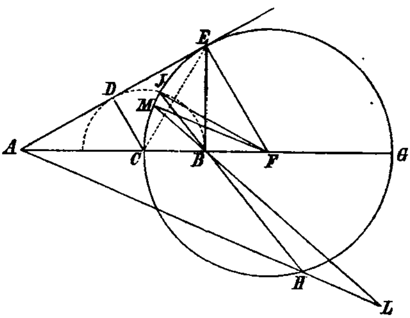

Fig. 8.

Ich behaupte nun, die Geraden FE, FC seien einander gleich; denn ziehen wir EC, so sind in den Dreiecken DEC, CEB die Seiten ED, EC des einen gleich EB, EC des andern, weil DE, EB Tangenten am Kreise DB sind, ausserdem sind die Grundlinien DC, CB als Radien einander gleich, folglich ist Winkel DEC gleich Winkel BEC.

$$\begin{aligned} \text{Nun ist Winkel } BCE + CEB &= \text{einem Rechten} \\ \text{und } CEF + CED &= \text{einem Rechten} \\ \text{und da } CEB &= CED, \\ \text{auch } FCE &= CEF, \end{aligned}$$

folglich ist CEF gleichschenklig und $FE = FC$; beschreibt man mit FE einen Kreis CEG, so muss derselbe mithin durch C hindurchgehen. Ich behaupte nun, dieses sei der Kreis, dessen Punkte die gesuchte Eigenschaft haben. Für den Punkt E ist die Sache klar, weil $AE : EB = AC : CB$, denn der Winkel

E ist halbirt durch die Linie CE. Dasselbe ergiebt sich für die Strecken AG, BG, denn da die Dreiecke AFE, EFB einander ähnlich sind, ist

$$AF : FE = EF : FB,$$
d. h. $AF : FC = CF : FB$, folglich, wenn man halbirt,
$$AC : CF = CB : BF,$$
$$AC : FG = CB : BF,$$
$$AB + CB : FG + BF = CB : BF,$$
folglich $AB : BG = CB : BF,$
und da $AG : BG = CF : FB,$
$$= EF : FB,$$
$$= AE : EB,$$
$$= AC : CB \text{ q. e. d.}$$

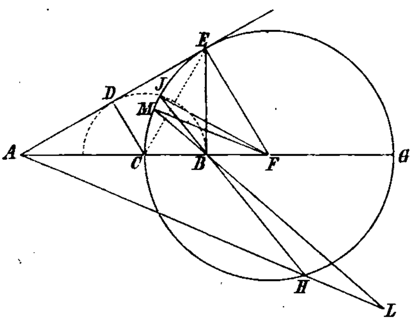

Fig. 8.

Ueberdies, behaupte ich, können die von A und B ausgehenden in bekanntem Verhältniss stehenden Linien weder innerhalb noch ausserhalb des Kreises CEG sich schneiden. Denn schnitten sie sich in L, ausserhalb des Kreises, so ziehe man AL, BL, verlängere letztere bis M und verbinde M mit F.

Wenn nun $AL : BL = AC : BC,$
$$= MF : FB,$$

so hätten wir 2 Dreiecke ALB, MFB, die, weil $\measuredangle ALB = \measuredangle MFB$, proportionale Seiten haben, während die Scheitelwinkel bei B einander gleich sind. Die Winkel FMB, LAB, sind spitz. (Denn das rechtwinklige Dreieck bei M hat CG zur Basis und nicht nur den Theil BF und der andere Winkel bei A ist spitz, weil AL homolog AC ist und grösser als BL, welches homolog BC sein soll), folglich ist $ABL \sim MBF$ und da $AB : BL = MB : BF$

so ist $AB : BF = LB : BM,$
aber es war $AB : BF = CB : BG;$

folglich $LB : BM = CB : BG$, was unmöglich ist.

Aehnlich wird bewiesen, dass auch innen kein Schnittpunkt liegen kann; mithin liegen sie alle auf der Kreisperipherie.

Aber es ist Zeit, dem Wunsche des Herrn *Simplicio* nachzukommen; ich will ihm zeigen, dass das Auflösen einer Linie in ihre unendlich vielen Punkte nicht nur nicht unmöglich, sondern ebenso leicht zu bewerkstelligen sei, wie die endliche Theilung, falls Ihr, Herr *Simplicio*, eine Voraussetzung zugesteht; nämlich, dass Ihr von mir keine Sonderung aller Punkte verlangt, und fordert, dass ich dieselben Euch einzeln auf diesem Papier vorweise, denn ich würde mich auch mit Eurer Theilung begnügen in 4 oder 6 Theile, wenn Ihr mir die Theilungspunkte zeigtet, oder wenn Ihr die Linie knicken wolltet, indem ihr daraus ein Quadrat oder Sechseck bildetet; ich überzeugte mich dann leicht von der Richtigkeit.

Simpl. Einverstanden.

Salv. Wenn nun das Einknicken einer Linie zum Quadrat, Achteck oder Polygon von 40, 100 oder 1000 Seiten uns genügt, die Theilung, die früher nach Ihrem Ausdruck potentiell war, actuell werden zu lassen, kann ich dann nicht ebenso ein Polygon von unendlich vielen Seiten formen, indem ich die Linie um die Peripherie eines Kreises wickele und sage, die Theilung in unendlich viel Theile sei actuell geworden, während dieselbe vorher in der gegebenen Geraden potenziell war? Und die Lösung ist ebenso geglückt wie jene, bei welcher ein Quadrat gebildet wurde oder ein Tausendeck; denn es fehlt keine von den verlangten Eigenschaften hier oder da, und wie das Tausendeck mit einer seiner Seiten mit der gegebenen Geraden zusammenfallen kann, so wird der Kreis, der ein Polygon von unendlich vielen Seiten ist, mit einer seiner Seiten die Gerade berühren; das ist aber bloss ein Punkt, der von allen anderen unterschieden ist und zwar nicht weniger, als eine Polygonseite von den übrigen. Und wie ein Polygon über eine Ebene gewälzt werden kann, indem stets neue Seiten dieselbe berühren, und eine Linie gleich dem Umfange beschrieben wird; so wird der rollende Kreis seinen Umfang als Spur hinterlassen. Nun weiss ich nicht, Herr *Simplicio*, ob die Herren Peripatetiker, denen ich zugestehe, dass das Theilbare in Theilbares zerfallen könne, so dass bei Fortsetzung einer solchen Theilung man nie ein Ende erreichen werde, ob die Herren auch eingestehen werden, dass keine ihrer Theilungen eine letzte sein könne; aber dass allerdings die letzte Theilung die in unendlich viele Untheilbare sei, von welcher ich behaupte, sie werde sich nie durch wirkliche Theilung in weitere

Unterabtheilung ausführen lassen; bei der von mir vorgeschlagenen Methode, die Unendlichkeit in einem Zuge zu unterscheiden und aufzulösen (ein Kunstgriff, den man mir zugestehen muss), da meine ich, müssten auch jene sich beruhigen und diese Zusammensetzung des Stetigen aus absolut untheilbaren Atomen zugeben. Hier liegt eine Methode vor, die uns aus viel verwirrenden Labyrinthgängen befreit und uns ein Verständniss eröffnet von der schon besprochenen Cohäsion, von der Verdünnung und Verdichtung ohne Annahme leerer Räume, und der Durchdringung der Körper: alles Schwierigkeiten, denen wir entgehen durch Annahme der Zusammensetzung aus Untheilbarem.

Simpl. Ich weiss nicht, was die Peripatetiker gesagt hätten, denn Eure Betrachtungen wären ihnen ganz neu gewesen, und als solche müssen sie angesehen werden; es wäre denkbar, dass sie Antworten und Mittel fänden, Räthsel zu lösen, die ich wegen der Kürze der Zeit und wegen meines Mangels an Kritik bestehen lassen muss. Doch lassen wir das, ich wünschte dringend zu wissen, wie die Einführung des letzten Untheilbaren uns das Verständniss der Verdichtung und Verdünnung erleichtern könnte, indem wir zugleich die Vacuumbildung und die Durchdringung der Körper umgehen.

Sagr. Ich meinerseits werde mit lebhaftem Interesse der Sache folgen, da sie mir noch völlig unklar ist, und da ich, wie Herr *Simplicio* auch seinerseits kürzlich bemerkte, gern die Gründe erführe, die *Aristoteles* zur Widerlegung des Vacuums beibringt, während wir Eure Lösung, die zugleich gegen *Aristoteles* gerichtet ist, kennen lernen.

Salv. Wohlan, wollen wir beides ausführen. Was das erste betrifft, so ist es nothwendig, dass, so wie wir um Verdünnung zu erhalten, uns jener Linie bedienten, die der kleinere Kreis beschrieb, und welche grösser war, als die Peripherie des letzteren, während die Bewegung durch Rollen des grossen Kreises bestimmt wurde, so jetzt wir zum Verständniss der Condensation zeigen wollen, wie beim Rollen des kleinen Kreises der grosse eine Gerade beschreibt, welche kürzer ist als seine Peripherie; zum besseren Verständniss betrachten wir Polygone. Aehnlich der früheren Zeichnung seien zwei Sechsecke concentrisch um L (Fig. 9) gegeben ABG, HJK mit den Parallelen HOM, ABC, über welchen die Polygone sich wälzen sollen; indem man die Ecke J des kleineren Polygones festhält, wälze sich letzteres, bis die Seite JK auf die Gerade fällt, wobei K den Bogen

KM beschreibt und JK auf JM fällt Was thut unterdessen die Seite GB des grösseren Polygones? Die Linie JB wird rückwärts sich bewegen und den Bogen Bb beschreiben unter der Parallele AC, sodass, wenn JK auf JM gefallen sein wird, die Seite BG die Strecke bC bedeckt, indem sie nur um den Betrag BC fortgerückt erscheint, während sie um Bb zurückweicht. Setzt man die Umwälzungen fort, so wird das kleine

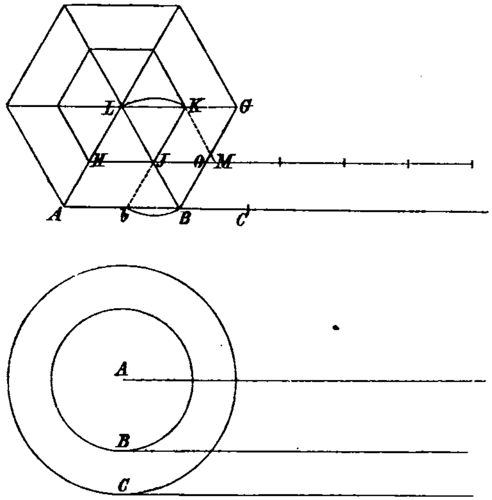

Fig. 9.

Polygon eine Linie, an Länge gleich dem eigenen Umfange, beschreiben, indess das grössere eine kürzere Strecke zurücklegt als sein Umfang beträgt, und zwar um so viel Strecken bB, als es selbst Seiten hat; die beschriebene Linie wird nahezu gleich der vom kleinen Polygon beschriebenen sein, denn sie übertrifft letztere nur um bB. Hier nun sieht man ein, weshalb das grössere Polygon (da es regiert wird vom kleinen) nicht grössere Linien beschreibt; denn jede Seite des grösseren Polygons überdeckt einen Theil der von der vorigen eingenommenen Strecke.

Betrachten wir aber die beiden concentrischen Kreise um A, welche auf ihren Parallelen ruhen, in den Berührungspunkten B und C, so wird beim Rollen des kleinen Kreises der Punkt nicht mehr eine Zeitlang verharren, sodass Bg den Punkt C

nach rückwärts versetzt, wie solches bei den Polygonen der Fall war, als J fest blieb, bis KJ auf JM fiel, während JB das Ende B rückwärts fortbewegte bis nach b, wobei BG auf bC fiel, und Bb einen Theil von AB überdeckte, sodass die Fortrückung nur $BC = JM$ betrug; durch diese Ueberdeckungen erklärte es sich, wie das grössere Polygon eine Linie gleich dem Umfange des kleineren beschreibt. Aber hier, wenn wir eine analoge Discussion anstellen bei der Fortrückung der Kreise, müssen wir sagen, dass im Gegensatz zu der endlichen Anzahl von Polygonseiten es deren nun unendlich viele giebt; jene sind endlich, theilbar, diese unendlich, untheilbar; die Polygonecken verharren beim Umwälzen eine gewisse Zeit, bis eine neue Seite sich auflegt, und zwar ist diese Zeit gleich einer vollen Umwälzung dividirt durch die Anzahl von Seiten; ähnlich sind beim Kreise die Verzüge seiner unendlich vielen Seiten momentane, denn ein unendlich kleiner Theil einer endlichen Zeit ist analog dem Punkte in einer Linie; in beiden Fällen ist die Anzahl unendlich; die Rückwärtsbewegungen des grösseren Polygones sind nicht so gross, wie die ganze Seite, sondern sie sind gleich dem Ueberschuss über die kleine Polygonseite, während die Fortrückung gleich der der kleinen Polygonseite ist; bei den Kreisen wird nun der entsprechende Punkt oder die Seite C bei dem momentanen Verzuge des Punktes B sich auch um soviel zurückbewegen, als der Excess über die Seite B beträgt, und ebensoviel fortrücken, wie B selbst. In Summa werden die unendlich vielen Seiten des grösseren Kreises mit ihren unendlich vielen unendlich kleinen Rückwärtsbewegungen, die sie in den unendlich vielen instantanen Verzügen der unendlich kleinen Seiten des kleinen Kreises ausführen mitsammt ihren unendlich vielen Fortrückungen, welche denen des kleinen Kreises gleich sind, eine Linie beschreiben, welche gleich der vom kleinen Kreise zurückgelegten Strecke ist, indem sie unendlich viele unendlich kleine Superpositionen enthalten, die eine Verdickung herbeiführen, oder besser eine Verdichtung, ohne irgend eine Durchdringung endlicher Theile; letzteres kann man nicht behaupten von der in endliche Theile getheilten Linie, die gleich dem Umfang irgend eines Polygones ist, da letztere, in eine Gerade ausgebreitet, nicht auf kleinere Längen reducirt werden kann, ohne theilweise Uebereinanderlagerung und Durchdringung der Seiten. Diese Verdichtung unendlich vieler unendlich kleiner Theile ohne Durchdringung endlicher Strecken und die früher erörterte Auseinanderzerrung derunendlich vielen unendlich kleinen mit Einschaltung unendlich kleiner oder untheilbarer leerer Stellen (vacui indivisibili), das ist, glaube ich, das Wichtigste, was über Verdichtung und Verdünnung der Körper zu sagen wäre, ohne Annahme einer Uebereinanderlagerung von Körpertheilen oder einer Bildung von leeren Räumen endlicher Grösse. Wenn Euch dieses gefällt, so nutzt es aus, wenn nicht, so haltet es für eitel, und meine Erklärung noch obendrein, schaffet aber eine andere, besser befriedigende. Nur zwei Worte rufe ich Euch ins Gedächtniss zurück, wir forschen nach Unendlichem und nach Untheilbarem.

Sagr. Ich bekenne frei, dass Euer Gedanke scharfsinnig und meinen Ohren ganz neu und fremd war: wenn die Natur selbst in Wirklichkeit solche Gesetze befolgt, so kann ich nicht umhin zu sagen: das ist wahr, was, wenn ich es nicht sinnlich erfasse, mich am meisten befriedigt, und um nicht stumm und sprachlos zu bleiben, halte ich daran fest. Aber vielleicht kann Herr *Simplicio* die Erklärung beleuchten, die in so verworrener Materie die Philosophen gebracht haben (bis jetzt ist mir solches noch nicht vorgekommen); denn wahrlich Alles, was ich bisher über Verdichtung gefunden, ist mir so dick, und Alles über Verdünnung ist mir so dünn vorgekommen, dass mein schwacher Kopf jenes nicht erfasste und dieses nicht durchdrang.

Simpl. Ich aber bin nun ganz verwirrt, ich finde harten Anstoss bald in dieser, bald in jener Richtung und ganz besonders in dieser neuen Anschauung, dergemäss man eine Unze Goldes verdünnen könnte und ausziehen in einen Körper, grösser als die Erde, und andererseits die ganze Erde verdichten könnte und zusammenbringen in eine Masse so gross wie eine Nuss: das sind Dinge, die ich nicht glaube, ja ich glaube nicht einmal, dass Ihr selbst daran glaubt; Eure Betrachtungen und Beweise sind mathematische Abstractionen, von aller Materie abgetrennt, ich glaube, dass bei der Anwendung auf Physik und auf Dinge der Natur diese Gesetze gar nicht mehr befolgt werden.

Salv. Euch das Unsichtbare sichtbar zu machen würde ich weder verstehen, noch würdet Ihr solches von mir verlangen; soviel aber unsere Sinne erfassen können, da Ihr doch schon das Gold genannt habt, — sollten wir eine starke Dehnung derselben nicht bewerkstelligen können? Ich weiss nicht, habt Ihr gesehen, wie die Künstler Golddraht ziehen, wobei nur die Oberfläche aus Gold, das Innere aus Silber besteht? Das geschieht so: Sie nehmen einen Cylinder, oder besser einen eine halbe Elle langen Stab aus Silber, drei bis vier Zoll dick; diesen Stab vergolden sie mit gewalztem Blattgold, welches bekanntlich so fein ist, dass es in der Luft geweht wird; solcher Blätter werden 8 bis 10 und nicht mehr, übereinandergelagert. So vergoldet, fangen sie den Stab zu strecken an mit grosser Kraft, indem sie ihn durch die Löcher des Zieheisens hindurchzwängen, und diese Manipulation wiederholen sie mit Anwendung immer engerer Oeffnungen, bis es schliesslich so dünn wird wie ein Frauenhaar; die Vergoldung beharrt dabei an der Oberfläche. Ich überlasse es Euch, die Feinheit und Dehnung des Goldes zu schätzen.

Simpl. Ich sehe nicht ein, wie hiedurch eine Verfeinerung der Substanz des Goldes von irgend welcher Wunderbarkeit entstehen könne, wie Ihr zu glauben scheint: erstens weil schon bei der ersten Vergoldung 10 Blätter verwandt waren, wodurch eine ansehnliche Dicke entsteht; zweitens, wenn auch das Silber beim Drahtziehen und Strecken an Länge zunimmt, so schwindet es dafür auch in der Dicke, so dass die Verlängerung durch die Verdünnung compensirt wird, während die Oberfläche nur so vergrössert wird, dass das Silber immer noch bedeckt bleibt, daher das Gold nur bis zur Dicke der ersten Blättchen wieder verdünnt zu werden braucht.

Salv. Ihr irrt Euch sehr, Herr *Simplicio*, denn die Vergrösserung der Oberfläche beträgt die Quadratwurzel aus der Verlängerung, wie ich Euch geometrisch beweisen könnte.

Sagr. Ich für mein Theil und in Herrn *Simplicio*'s Namen bitte um den Beweis, wenn Ihr meint, dass wir demselben folgen können.

Salv. Wollen wir sehen, ob ich denselben sofort wieder improvisiren kann. Zunächst ist es klar, dass der erste dicke Cylinder aus Silber und der letzte längste Draht aus Silber gleichen Inhalt haben, da es dieselbe Masse ist; wenn ich nun beweisen kann, in welchem Verhältniss die Oberflächen gleicher Cylinder stehen, so werden wir unser Ziel erreichen. Ich behaupte also:

Die Oberflächen zweier Cylinder gleichen Inhaltes (abgesehen von den Grundflächen) stehen im Verhältniss zur Quadratwurzel aus dem Verhältniss ihrer Längen.

Es seien zwei gleiche Cylinder gegeben, deren Höhen AB, CD (Fig. 10) seien, die mittlere Proportionale sei E. Ich behaupte, die Oberfläche von AB verhalte sich zu der von CD (beide ohne Grundfläche), wie die Linie AB zur Linie E, welche gleich der Wurzel aus dem Verhältniss von $AB : CD$ ist. Man theile den Cylinder AB bei F, so dass die Höhe AF

$= CD$ sei. Und da die Grundflächen gleicher Cylinder sich umgekehrt wie ihre Höhen verhalten (die wir H und h nennen wollen), so ist

$$\frac{\text{Basis } B}{\text{Basis } D} = \frac{h}{H} ,$$

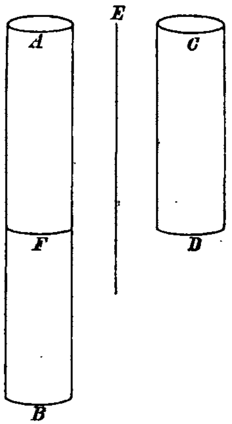

Fig. 10.

und da die Kreisflächen sich wie die Quadrate der Radien verhalten, werden auch die genannten Quadrate dasselbe Verhältniss haben

$$\left(\frac{R^2}{r^2} = \frac{h}{H}\right) ,$$

aber

$$BA : CD = BA^2 : E^2$$

(das heisst:

$$H : h \quad = H^2 \quad : H . h) ,$$

folglich sind die 4 Quadrate einander proportional

$$(r^2 : R^2 = H^2 : H . h) ,$$

folglich werden auch ihre Seiten einander proportional sein

$$(r : R = H : \sqrt{H . h})$$
$$= H : E$$

und wie AB zu E, so verhält sich der Radius von C zum Radius von A

$$(H : E = r : R) \;;$$

aber wie die Diameter, so verhalten sich die Umfänge

$$(2\pi r : 2\pi R = r : R)$$

und wie die Peripherien, so verhalten sich die Cylinderoberflächen gleicher Höhe

$$(2\pi r . h : 2\pi R . h = r : R) ,$$

folglich wie $AB : E$, so die Oberfläche von CD zur Oberfläche von AF $(H : E = 2\pi r . h : 2\pi R . h)$.

Da nun die Höhen AF zu AB wie die Oberfläche AF zur Oberfläche AB

$$(h : H = 2\pi R . h : 2\pi R . H)$$

und wie die Höhe AB zu E, so Oberfläche CD zur Oberfläche AF

$$(H : E = 2\pi r \,.\, h : 2\pi R \,.\, h)$$

so wird umgekehrt Höhe $AF : E =$ Oberfläche CD zu Oberfläche AB

$$(h : E = 2\pi r \,.\, h : 2\pi R \,.\, h)$$

und umgekehrt wie Oberfläche AB zur Oberfläche CD, so E zu AF

$$(2\pi R \,.\, h : 2\pi r \,.\, h = E : h)$$

oder wie AB zu E $\quad (= H : E)$,

welches die Wurzel ist von $AB : CD$

$$\left(= \sqrt{\frac{H}{h}}\right) \text{ q. e. d.}$$[6])

Wenden wir dieses auf unsere Aufgabe an, auf den Silbercylinder von $^1/_2$ Elle Länge und 3—4 Zoll Dicke, der in der Dicke eines Frauenhaares 20 000 Ellen lang wird, so finden wir, dass seine Oberfläche um das 200fache gewachsen sein wird: folglich werden die Goldblätter, davon 10 auf einander gelagert waren, in 200facher Ausdehnung sicherlich nicht mehr als $^1/_{20}$ der Goldblattdicke haben. Bedenkt, welch eine Feinheit das ist und ob dieselbe denkbar sei ohne bedeutende Ausdehnung der Theile, und ob diese nicht einer Zusammensetzung aus unendlich kleinen Parcellen physischer Materie nahe kommt; übrigens giebt es hierfür noch andere kräftigere und zutreffendere Beispiele.

Sagr. Der Beweis ist so schön, dass, wenn er auch nicht unserem zuerst aufgestellten Zwecke entspräche (was er übrigens wohl zu leisten scheint), er jedenfalls aufs Beste die kurze Zeit, die er uns kostete, gelohnt hat.

Salv. Da ich sehe, dass Ihr die geometrischen Beweise, die uns stets sicher fördern, so sehr schätzet, so theile ich Euch den reciproken Satz mit, der einer merkwürdigen Thatsache gerecht wird. Wir haben Cylinder gleichen Inhalts mit verschiedener Höhe betrachtet: jetzt untersuchen wir Cylinder gleicher Oberfläche, aber verschiedener Höhe; wobei wir stets von den Grundflächen absehen. Ich behaupte nun:

Der Inhalt zweier gerader Cylinder, deren Mantelflächen einander gleich sind, steht im umgekehrten Verhältniss zu ihren Höhen.

Seien AE, CF (Fig. 11) zwei Cylinder mit gleicher Oberfläche, aber die Höhe des letzteren CD sei grösser als die Höhe AB des anderen. Ich behaupte, der Cylinder AE verhalte sich zum Cylinder CF, wie die Höhe CD zur Höhe AB. Da nämlich die Oberfläche CF gleich ist der Oberfläche AE, so wird der Cylinder CF kleiner sein als AE, denn wenn sie gleich wären, so müsste die Oberfläche grösser als die von AE sein, und das um so mehr, wenn derselbe Cylinder CF grösser wäre als AE. Angenommen nun, der Cylinder JD sei gleich dem AE, folglich nach dem vorigen Satze die Oberfläche von JD zur Oberfläche von AE wie die Höhe JF zur mittleren Proportionale von JF und AB. Da aber Oberfläche AE gleich der Oberfläche CF, und da Oberfläche JD und CF, wie die Höhe JF zu CD, so ist CD die mittlere Proportionale zwischen JF und AB. Da überdies der Cylinder JD gleich dem Cylinder AE, so werden diese beiden Cylinder ein und dasselbe Verhältniss zum Cylinder CF haben, aber JD zu CF wie die Höhe JF zu CD, folglich verhält sich der Cylinder AE zum Cylinder CF, wie die Linie JF zu CD, d. h., wie CD zu AB, q. e. d[7]).

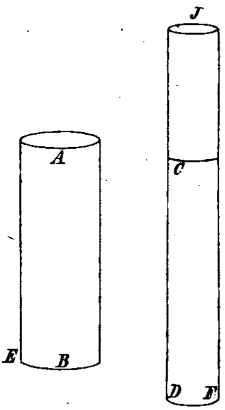

Fig. 11.

Hieraus erklärt sich eine Erscheinung, über welche die Leute stets erstaunt sind; wenn man nämlich aus einem Stück Zeug, welches mehr lang als breit ist, einen Kornsack machen will, und zwar wie gewöhnlich mit einer Bodenplatte aus Holz, so fragt es sich, wie es kommen könne, dass der Sack mehr fasst, wenn man die kurze Seite des Zeuges zur Höhe wählt, und mit der andern die Bodenplatte umgiebt, als umgekehrt. Sei z. B. das Zeug 6 Ellen breit und 12 Ellen lang, so wird der Sack mehr fassen, wenn man mit der Länge von 12 Ellen die Bodenplatte umgiebt, so dass er 6 Ellen hoch wird, als wenn man mit 6 Ellen den Boden umgiebt, und den Sack 12 Ellen hoch macht. Ausser der Thatsache, dass der Inhalt in dieser oder jener Art mehr fasse, lässt sich specieller zeigen, wieviel mehr die eine Art enthält, nämlich in dem Verhältniss mehr, als die Höhe kleiner, und weniger, als die Höhe grösser ist: im

4*

vorliegenden Falle ist das Zeug doppelt so lang als breit, also der Sackinhalt in einem Falle doppelt so klein, als wenn er der Breite nach zusammengenäht wird. Und ebenso, wenn man eine Matte von 25 Ellen Länge und 7 Ellen Breite hat und aus derselben einen Korb verfertigen will, so werden die Inhalte sich wie 7 zu 25 verhalten.

Sagr. Und so lernen wir mit besonderem Vergnügen Neues und Nützliches zugleich. Aber in Betreff der gestellten Aufgabe glaube ich, dass unter denen, die mit der Geometrie weniger vertraut sind, sich nicht vier Procent befänden, die im ersten Augenblick sich nicht irren würden und meinen, dass Körper mit gleichen Oberflächen auch in allen anderen Stücken gleich seien: so wird ebenderselbe Irrthum begangen beim Vergleichen der Grösse der Städte, da man dieses Maass zu kennen glaubt, wenn man den Umfang derselben misst, ohne zu beachten, dass die Umfänge gleich und die eingeschlossenen Plätze sehr verschieden sein können; solches gilt nicht nur für unregelmässige, sondern auch für regelmässige Figuren, da die Polygone mit mehr Seiten grösseren Inhalt haben, als die mit weniger Seiten, bei gleichem Umfange: sodass schliesslich der Kreis, als Polygon von unendlich vielen Seiten, mehr umfasst, als alle anderen Polygone gleichen Umfanges; ich erinnere mich mit besonderem Vergnügen des Beweises, den ich beim Studium der Kugel des *Sacrobosco* nebst hochgelehrtem Commentar fand.

Salv. Das ist vollkommen richtig; bei derselben Gelegenheit habe ich bemerkt, wie durch einen kurzen Beweis man zeigen könne, wie von allen isoperimetrischen regelmässigen Figuren der Kreis den grössten Inhalt habe, und zudem das Polygon von mehr Seiten mehr Inhalt als alle anderen von weniger Seiten.

Sagr. Da ich äusserst gern solche ausgewählte Aufgaben behandelt sehe, bitte ich Euch dringend, Euren Beweis uns mitzutheilen.

Salv. Das kann in wenigen Worten geschehen, auf Grund folgenden Lehrsatzes:

Der Kreis ist die mittlere Proportionale zwischen zwei regelmässigen ähnlichen Polygonen, von denen das eine demselben umschrieben, das andere mit dem Kreise isoperimetrisch ist. Indem er überdies kleiner ist, als alle umschriebenen, ist er im Gegentheil grösser als alle isoperimetrischen. Unter den umschriebenen ferner sind diejenigen, die mehr Winkel oder Seiten haben, kleiner als die, die weniger haben, aber im Gegentheil sind unter den isoperimetrischen die mit mehr Winkeln die grösseren.

Von den beiden ähnlichen Polygonen A, B (Fig. 12) sei A

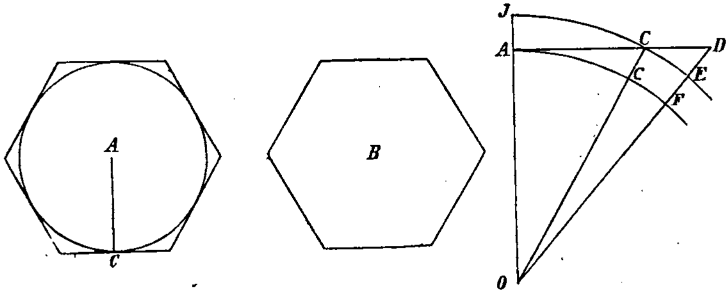

Fig. 12.

dem Kreise A umschrieben und das andere B sei von gleichem Umfange, wie der Kreis. Ich behaupte, dieser letztere sei die mittlere Proportionale zwischen beiden Polygonen. Denn (sei der Halbmesser AC) da der Kreis gleich ist dem rechtwinkligen Dreiecke, dessen eine Kathete gleich AC, und dessen andere gleich der Peripherie des Kreises; und da das Polygon A gleich ist einem Rechtecke, dessen eine Kathete wiederum gleich AC, während die andere gleich dem Polygonumfange ist, so verhält sich der Inhalt des umschriebenen Polygones zum Inhalt des Kreises, wie der Umfang des Polygones zum Umfange des Kreises, oder zum Umfange des anderen Polygones B, welches isoperimetrisch zum Kreise war: aber A zu B wie die Quadrate der Peripherien beider (da die Figuren ähnlich sind), folglich ist A die mittlere Proportionale zwischen beiden Polygonen A, B; und da A grösser als der Kreis A, so muss der Kreis A grösser sein als sein isoperimetrisches Polygon, und mithin grösser, als alle seine regelmässigen isoperimetrischen Polygone[8]).

Den zweiten Theil betreffend, demgemäss unter den umschriebenen Polygonen das mit weniger Seiten den grösseren Inhalt, und im Gegentheil unter den isoperiometrischen das mit mehr Seiten den grösseren Inhalt habe, verfahren wir so: Im Kreise mit dem Centrum O und Radius OA sei eine Tangente AD gezogen, und AD sei die Hälfte der Seite eines umschriebenen Fünfeckes, sowie AC die Hälfte der Seite des Siebeneckes. Man ziehe die Geraden OGC, OFD und um O beschreibe man mit OC den Bogen ECJ. Da das Dreieck DOC grösser ist als der Sector EOC, und der Sector COJ grösser als das Dreieck COA, so steht das Dreieck DOC in grösserem Verhältniss zum Dreieck COA, als der Sector COE zum Sector COJ

$$\left(\begin{array}{ll} & \triangle DOC > \text{Sect. } COE \\ & \text{Sect. } COJ > \triangle COA \\ \text{folglich} & \dfrac{\triangle DOC}{\triangle COA} > \dfrac{\text{Sect. } COE}{\text{Sect. } COJ} \end{array}\right)$$

und folglich
$$\frac{\triangle DOC}{\triangle COA} > \frac{\text{Sect. } FOG}{\text{Sect. } GOA}$$

und durch Summieren und Umstellen, Dreieck DOA zum Sector FOA grösser als $\triangle COA$ zum Sector GOA.

$$\left(\frac{\triangle DOA}{\text{Sect. } FOA} > \frac{\triangle COA}{\text{Sect. } GOA}\right)$$

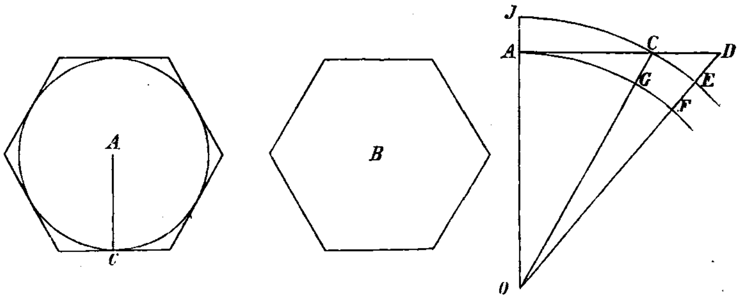

Fig. 12.

und 10 Dreiecke DOA zu 10 Sectoren FOA grösser als 14 Dreiecke COA zu 14 Sectoren GOA, d. h. das umschriebene Fünfeck wird ein grösseres Verhältniss zum Kreise haben, als das Siebeneck: folglich ist das Fünfeck grösser, als das Siebeneck. Denken wir uns nun die isoperimetrischen Fünf- und Siebenecke. Ich behaupte das Siebeneck sei grösser, als das Fünfeck. Da der Kreis die mittlere Proportionale zwischen dem umschriebenen und dem isoperimetrischen Fünfeck, und ebenso zwischen dem umschriebenen und dem isoperimetrischen Siebeneck ist; da ferner das umschriebene Fünfeck grösser, als das

Siebeneck, so hat dieses Pentagon ein grösseres Verhältniss als dieses Heptagon; folglich hat der Kreis ein grösseres Verhältniss zu einem isoperimetrischen Pentagon als zum isoperimetrischen Heptagon; folglich ist das Pentagon kleiner als das isoperimetrische Heptagon; was zu beweisen war.

Sagr. Ein sehr hübscher Beweis, und sehr scharfsinnig. Aber wohin sind wir gerathen. Tief in die Geometrie! Wir wollten doch die Schwierigkeiten erörtern, die Herr *Simplicio* angeregt hat, und die sehr beachtenswerth erscheinen; besonders das Problem der Condensation scheint mir sehr heikel (durissimo) zu sein.

Salv. Wenn Verdichtung und Verdünnung entgegengesetzte Erscheinungen sind, so wird man, wenn es eine immense Verdünnung giebt, auch eine nicht minder grosse Verdichtung zugestehen müssen; ich meine, sowohl die starken Verdünnungen an sich, wie auch der Umstand, dass wir dieselben täglich fast plötzlich entstehen sehen, vermehren unser Erstaunen. Eine fast gänzliche Verdünnung ist die einer geringen Quantität Schiesspulver, die in eine ungeheure Feuermenge sich auflöst? Und wie gewaltig ist noch dazu die fast endlose Ausdehnung des dabei entstehenden Lichtes? Und wenn dieses Feuer, und dieses Licht sich vereinigten, was nicht unmöglich erscheint, welch' eine Verdichtung wäre das, wenn sie nachher einen ganz kleinen Raum einnehmen? Sucht nur, und Ihr werdet tausendfach ähnlichen Verdünnungserscheinungen begegnen, da solche weit häufiger als Verdichtungen vorkommen: denn die dichte Materie ist handlicher und unsern Sinnen zugänglicher, sei es dass wir Holz nehmen und dasselbe im Feuer auflösen und in Licht, während wir nicht so das Feuer und das Licht wieder zu Holz verdichten können; sei es dass wir Früchte, Blüthen und 1000 andre solche Körper zum Theil in Düfte sich auflösen sehen, während es nicht gelingt, die duftenden Atome zu duftenden Körpern zu verdichten. Wenn aber die fassbare Beobachtung uns entgeht, müssen wir das Fehlende durch Ueberlegung ergänzen, wodurch uns nicht nur die Bewegung, die zur Verdünnung und die zur Auflösung fester Körper führt, verständlich wird, sondern auch die Verdichtung der zarten Körper, selbst der allerfeinsten. Wollen wir nun untersuchen, wie die Verdichtung und Verdünnung der Körper bewerkstelligt werden könne, ohne Zuhilfenahme des Vacuums und der Durchdringung der Körper; was nicht ausschliesst, dass in der Natur es Stoffe geben könne, bei denen die Erscheinung nicht vorkommt und bei denen das, was Ihr unmöglich genannt habt, auch wirklich nicht geschieht. Und schliesslich, Herr *Simplicio*, habe ich mich, Euch, Ihr Herrn Philosophen zu Trotz, ermüdet im Nachdenken darüber, wie die Verdichtung und die Verdünnung gedacht werden könne ohne Annahme der Durchdringbarkeit der Körper und ohne Einführung leerer Räume: Vorkommnisse, die Ihr ableugnet und abweiset, während, wenn Ihr sie zugestehen wolltet, ich Euch kein so hartnäckiger Widersacher wäre. Entweder nun lasset gelten das Schwierige oder billigt meine Speculationen, oder endlich gebet Besseres.

Sagr. Die Durchdringung möchte ich in Uebereinstimmung mit den Peripatetikern vollständig leugnen. Betreffs des Vacuums möchte ich abwägen den Aristotelischen Beweis, durch den er dasselbe bekämpft, gegen Eure gegentheilige Ansicht. Ich bitte Herrn *Simplicio*, den Beweis der Philosophen uns zu bringen, und Sie Herr *Salviati* werden gütigst antworten.

Simpl. Aristoteles bekämpft, soviel ich mich entsinne, die Meinung einiger älterer Philosophen, die das Vacuum als nothwendig einführten, damit eine Bewegung zu Stande komme, da ohne dasselbe eine Bewegung unmöglich sei. Im Gegensatz hierzu beweist Aristoteles, dass gerade die Thatsache der Bewegung die Annahme eines Vacuums widerlege; sein Beweis ist folgender. Er discutirt zwei Fälle: erstens lässt er verschiedene Massen in ein und demselben Medium sich bewegen: zweitens ein und dieselbe Masse in verschiedenen Medien. Im ersten Falle behauptet er, dass verschiedene Körper in ein und demselben Medium mit verschiedener Geschwindigkeit sich bewegen, und zwar stets proportional den Gewichten (le gravità); so dass z. B. ein 10 mal grösseres Gewicht sich 10 mal schneller bewege. Im anderen Falle nimmt er an, dass die Geschwindigkeiten ein und derselben Masse in verschiedenen Medien sich umgekehrt wie die Dichtigkeiten verhalten; so dass, wenn z. B. die Dichtigkeit des Wassers 10 mal so gross ist als die der Luft, die Geschwindigkeit in der Luft 10 mal grösser sei, als die Geschwindigkeit im Wasser. Die zweite Behauptung weist er folgender Art nach: Da die Feinheit des Vacuums um ein unendlich kleines Intervall sich unterscheidet von dem körperlich mit allerfeinster Masse erfüllten Raume, so wird jeder Körper, der im erfüllten Medium in einiger Zeit eine gewisse Strecke zurücklegt, im Vacuum sich momentan bewegen; aber eine instantane Bewegung ist unmöglich; mithin ist es unmöglich, dass in Folge der Bewegung ein Vacuum sich bilde.

Salv. Der Beweis ist, wie man sieht, »ad hominem«, d. h. gegen diejenigen gerichtet, welche das Vacuum als für die Bewegung nothwendig erachteten. Wenn ich nun die Schlussfolgerung anerkenne, indem ich zugleich zugebe, dass eine Bewegung im Vacuum nicht statthabe, so wird damit die Annahme eines Vacuums im absoluten Sinne, ohne Rücksicht auf Bewegung, keineswegs widerlegt. Um etwa im Sinne jener Alten zu reden und um besser zu durchschauen, wieviel *Aristoteles* beweist, scheint mir, könnte man alle beide Meinungen verwerfen. Zunächst zweifele ich sehr daran, dass *Aristoteles* je experimentell nachgesehen habe, ob zwei Steine, von denen der eine ein 10 mal so grosses Gewicht hat, als der andere, wenn man sie in ein und demselben Augenblick fallen liesse, z. B. 100 Ellen hoch herab, so verschieden in ihrer Bewegung sein sollten, dass bei der Ankunft des grösseren der kleinere erst 10 Ellen zurückgelegt hätte.

Simpl. Man sieht's aus Ihrer Darstellung, dass Ihr darüber experimentirt habt, sonst würdet Ihr nicht reden vom Nachsehen. ?!?

Sagr. Aber ich, Herr *Simplicio*, der ich keinen Versuch angestellt habe, versichere Euch, dass eine Kanonenkugel von 100, 200 und mehr Pfund um keine Spanne vor einer Flintenkugel von einem halben Pfund Gewicht die Erde erreichen wird, wenn beide aus 200 Ellen Höhe herabkommen.

Salv. Ohne viel Versuche können wir durch eine kurze, bindende Schlussfolgerung nachweisen, wie unmöglich es sei, dass ein grösseres Gewicht sich schneller bewege, als ein kleineres, wenn beide aus gleichem Stoff bestehen; und überhaupt alle jene Körper, von denen Aristoteles spricht. Denn sagt mir, Herr *Simplicio*, gebt Ihr zu, dass jeder fallende Körper eine von Natur ihm zukommende Geschwindigkeit habe; so dass, wenn dieselbe vermehrt oder vermindert werden soll, eine Kraft angewandt werden muss oder ein Hemmniss.

Simpl. Unzweifelhaft hat ein Körper in einem gewissen Mittel eine von Natur bestimmte Geschwindigkeit, die nur mit einem neuen Antrieb vermehrt, oder durch ein Hinderniss vermindert werden kann.

Salv. Wenn wir zwei Körper haben, deren natürliche Geschwindigkeit verschieden sei, so ist es klar, dass, wenn wir den langsameren mit dem geschwinderen vereinigen, dieser letztere von jenem verzögert werden müsste, und jener, der langsamere, müsste vom schnelleren beschleunigt werden. Seid Ihr hierin mit mir einverstanden?

Simpl. Mir scheint die Consequenz völlig richtig.

Salv. Aber wenn dieses richtig ist, und wenn es wahr wäre, dass ein grosser Stein sich z. B. mit 8 Maass Geschwindigkeit bewegt, und ein kleinerer Stein mit 4 Maass, so würden beide vereinigt eine Geschwindigkeit von weniger als 8 Maass haben müssen; aber die beiden Steine zusammen sind doch grösser, als jener grössere Stein war, der 8 Maass Geschwindigkeit hatte; mithin würde sich nun der grössere langsamer bewegen, als der kleinere; was gegen Eure Voraussetzung wäre. Ihr seht also, wie aus der Annahme, ein grösserer Körper habe eine grössere Geschwindigkeit, als ein kleinerer Körper, ich Euch weiter folgern lassen konnte, dass ein grösserer Körper langsamer sich bewege als ein kleinerer.

Simpl. Ich bin ganz verwirrt, denn mir will es nun scheinen, als ob der kleine Stein, dem grösseren zugefügt, dessen Gewicht und daher durchaus auch dessen Geschwindigkeit vermehre, oder jedenfalls, als ob letztere nicht vermindert werden müsse.

Salv. Hier begeht Ihr einen neuen Fehler, Herr *Simplicio*, denn es ist nicht richtig, dass der kleine Stein das Gewicht des grösseren vermehre.

Simpl. So? das überschreitet meinen Horizont.

Salv. Keineswegs, sobald ich Euch von dem Irrthume, in dem Ihr Euch bewegt, befreit haben werde: und merket wohl, dass man hier unterscheiden müsse, ob ein Körper sich bereits bewege, oder ob er in Ruhe sei. Wenn wir einen Stein auf eine Wagschale thun, so wird das Gewicht durch Hinzufügung eines zweiten Steines vermehrt, ja selbst die Zulage eines Stückes Werch wird das Gewicht um die 6—10 Unzen anwachsen lassen, die das Werchstück hat. Wenn Ihr aber den Stein mitsammt dem Werch von einer grossen Höhe frei herabfallen lasset, glaubt Ihr, dass während der Bewegung das Werch den Stein drücke, und dessen Bewegung beschleunige: oder glaubt Ihr, dass der Stein aufgehalten wird, indem das Werchstück ihn trägt? Fühlen wir nicht die Last auf unseren Schultern, wenn wir uns stemmen wollen gegen die Bewegung derselben; wenn wir aber mit derselben Geschwindigkeit uns bewegen, wie die Last auf unserem Rücken, wie soll dann letztere uns drücken und beschweren? Seht Ihr nicht, dass das ähnlich wäre, wie wenn wir den mit der Lanze treffen wollten, der mit derselben Geschwindigkeit vor uns herflieht? Zieht also den Schluss, dass beim freien Fall ein kleiner Stein den grossen nicht drücke und nicht sein Gewicht, so wie in der Ruhe, vermehre.

Simpl. Aber wenn der grössere Stein auf dem kleineren ruhte?

Salv. So würde er das Gewicht vermehren müssen, wenn seine Geschwindigkeit überwöge; aber wir fanden schon, dass, wenn die kleinere Last langsamer fiele, sie die Geschwindigkeit der grossen vermindern müsste, und mithin die zusammengesetzte Menge weniger rasch sich bewegte, als ein Theil; was gegen Eure Annahme spricht. Lasst uns also feststellen, dass grosse und kleine Körper, von gleichem specifischen Gewicht, mit gleicher Geschwindigkeit sich bewegen.

Simpl. Eure Herleitung ist wirklich vortrefflich: und doch ist es mir schwer zu glauben, dass ein Bleikorn so schnell wie eine Kanonenkugel fallen solle.

Salv. Sagt nur, ein Sandkorn so schnell wie ein Mühlstein. Ihr werdet, Herr *Simplicio* nicht, wie Andere, das Gespräch von der Hauptfrage ablenken und Euch an einen Ausspruch anklammern, bei welchem ich um Haaresbreite von der Wirklichkeit abweiche, indem Ihr unter dieses Haar verbergen wolltet den Fehler eines Anderen von Ankertau-Dicke. *Aristoteles* sagt: ein Eisenstab von 100 Pfund kommt von einer Höhe von 100 Ellen herabfallend in einer Zeit an, in welcher ein einpfündiger Stab, frei herabfallend, nur 1 Elle zurückgelegt hat: ich behaupte, beide kommen bei 100 Ellen Fall gleichzeitig an: Ihr findet, dass hierbei der grössere um 2 Finger breit vorauseilt, so dass, wenn der grössere an der Erde ankommt, der kleinere noch einen Weg von 2 Fingerbreit Grösse zurückzulegen hat: Ihr wollt jetzt mit diesen 2 Fingern hinwegschmuggeln die 99 Ellen des Aristotelischen Fehlers, und nur von meiner kleinen Abweichung reden, den gewaltigen Irrthum des *Aristoteles* aber verschweigen. *Aristoteles* sagt, dass Körper von verschiedenem Gewicht in ein und demselben Mittel sich mit Geschwindigkeiten bewegen, die ihren Gewichten proportional sind, und giebt ein Beispiel mit Körpern, bei welchen man den reinen, absoluten Effekt des Gewichtes wahrnehmen kann, mit Vernachlässigung des Einflusses, den die Gestalt, die kleinsten Momente haben, Dinge, die stark vom Medium beeinflusst werden, so dass die reine Wirkung der Schwere getrübt wird: wie z. B. Gold, der specifisch schwerste Körper, als sehr dünnes Blatt in der Luft flattert; desgleichen in der Form eines sehr feinen Pulvers. Wollt Ihr nun den allgemeinen Satz erfassen, so zeigt, dass derselbe für alle Körper richtig sei, und dass ein Stein von 20 Pfund Gewicht 10 mal schneller falle, als einer von 2 Pfund: das, behaupte ich, ist eben falsch, und mögen beide von 50 oder 100 Ellen herabfallen, sie kommen stets in demselben Augenblicke an.

Simpl. Vielleicht aber würde bei einer Fallhöhe von mehreren Tausend Ellen das eintreten, was bei kleinerer nicht beobachtet wird.

?

Salv. Wenn *Aristoteles* so etwas gemeint haben sollte, würdet Ihr ihm einen ganz neuen Irrthum zumuthen, ja eine Unwahrheit: da man solche senkrechte Erhebungen auf der Erde gar nicht findet, so kann auch *Aristoteles* mit solchen nicht experimentirt haben: und doch will er uns von seinen Versuchen reden, da er sagt, man »sehe den Effekt«.

Simpl. Allerdings spricht *Aristoteles* nicht dieses Princip aus, wohl aber jenes andere, welches, ich glaube, nicht diese Schwierigkeiten in sich birgt.

Salv. Aber die andere Behauptung ist nicht minder falsch; und ich wundere mich, dass Ihr den Trugschluss nicht durchschaut und erkennet, dass, wenn der Satz wahr wäre, demgemäss ein und derselbe Körper in Medien verschiedener Dichtigkeit, wie z. B. Wasser und Luft, sich mit Geschwindigkeiten bewegten, welche diesen Dichtigkeiten umgekehrt proportional wären, dass dann alle Körper, die in der Luft niederfallen, auch im Wasser sinken müssten; welches doch so sehr falsch ist, da viele Körper in der Luft fallen, im Wasser dagegen emporsteigen.

Simpl. Ich verstehe die Nothwendigkeit Eurer Consequenz; aber *Aristoteles* spricht von solchen Körpern, die in beiden Medien fallen, und nicht von solchen, die in der Luft fallen, aber im Wasser steigen.

Salv. Ihr bringt für den Philosophen Argumente vor, die er sicherlich nicht annähme, um nicht seinen ersten Irrthum zu vergrössern. Weiter, sagt mir, ob die Dichtigkeiten von Wasser und Luft überhaupt in einem bestimmten Verhältniss stehen; und wenn Ihr dieses bejaht, dann nehmt einen beliebigen Werth dafür an.

Simpl. Gut, angenommen, es sei zehn; daher wird ein Körper, der niederfällt, in der Luft sich 10 mal schneller bewegen, als im Wasser.

Salv. Jetzt denke ich mir einen Körper, der in der Luft fällt, im Wasser steigt, wie etwa ein Stück Holz, und überlasse Euch zu bestimmen, wie rasch er sich in der Luft bewegen solle.

Simpl. Angenommen, es seien 20 Maass Geschwindigkeit.

Salv. Gut. Offenbar kann diese Geschwindigkeit zu einer anderen in demselben Verhältniss stehen, wie die Dichtigkeiten von Wasser und Luft, letztere betrüge mithin 2 Maass; so dass wirklich, entsprechend dem Aristotelischen Satze, man geradezu behaupten müsste, in der Luft falle der Holzstab mit 20 Maass Geschwindigkeit, im Wasser mit 2 Maass, und solle im Wasser nicht emporsteigen, bis er schwimmt, wie doch geschieht; oder wollt Ihr sagen, dass das Emporsteigen im Wasser dasselbe sei, wie das Niederfallen in der Luft; ich will es nicht hoffen. Eben die Thatsache, dass der Stab nicht fällt, lässt mich erwarten, dass Ihr es zugeben werdet, dass ein Stab von anderem Material sich finden könnte, der im Wasser wirklich mit 2 Maass Geschwindigkeit sich bewegte.

Simpl. Gewiss, nur muss die Materie schwerer sein als Holz.

Salv. Eben das suche ich. Aber dieser zweite Stab, der im Wasser mit 2 Maass Geschwindigkeit fällt, wie rasch würde er in der Luft fallen? Nach *Aristoteles* müsstet Ihr sagen, mit 20 Maass Geschwindigkeit: aber letztgenannten Werth habt Ihr selbst dem Holze zuerkannt: also müssten beide, recht verschiedene Körper mit gleicher Geschwindigkeit in der Luft sich bewegen. Wie stimmt das zum ersteren Gesetz des Philosophen, demgemäss verschiedene Körper in ein und demselben Medium sich mit ganz verschiedener Geschwindigkeit bewegen, und zwar im Verhältniss ihrer Gewichte? Aber abgesehen von all solchen Ueberlegungen, wie kommt es, dass die allerhäufigsten und allerhandlichsten Phänomene von Euch übersehen worden sind, habt Ihr nicht beachtet, wie zwei Körper im Wasser sich verschieden, etwa im Verhältniss von 1 : 100 bewegen, während beim Fall in der Luft kein Hundertstel Unterschied des Betrages bemerkt wird? wie etwa ein Marmorei 10 mal schneller als ein Hühnerei im Wasser niederfällt; während beim Fall beider aus 20 Ellen Höhe durch die Luft das Marmorei keine vier Finger breit jenes übertrifft; und endlich mancher Körper sinkt in 3 Stunden 10 Ellen tief im Wasser, welch' letztere Strecke in der Luft nur ein oder zwei Pulsschläge beansprucht. Und jetzt weiss ich gewiss, Herr *Simplicio*, dass Ihr nichts mehr zu erwidern habt. Also einigen wir uns dahin, dass solch ein Argument nichts gegen die Annahme des Vacuums bringt; und wenn letzteres auch der Fall wäre, so würden dadurch nur jene grossen Vacuums zerstört, welche weder ich, noch, wie ich glaube, die Alten als natürlich sich darbietend annahmen, obwohl sie durch Kraft hervorgebracht werden können, wie aus manchen Versuchen folgt, die wir hier übergehen dürfen.

Sagr. Da Herr *Simplicio* schweigt, so erlaube ich mir eine andere Sache vorzubringen. Obwohl Ihr klar bewiesen habt, dass Körper von ungleichem Gewicht sich in ein und demselben Mittel mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, so wird hierbei doch vorausgesetzt, sie seien aus demselben Stoff oder von demselben specifischen Gewicht, aber nicht von verschiedenem specifischen Gewicht (denn Ihr werdet uns nicht zumuthen zu glauben, dass ein Stück Kork sich ebenso schnell bewege wie ein Stück Blei), und da Ihr ferner uns davon überzeugt habt, wie unrichtig es sei, anzunehmen, dass ein und derselbe Körper in verschiedenen Medien Geschwindigkeiten annehme, die den Widerständen umgekehrt proportional seien; so würde ich sehr zu wissen wünschen, welche Verhältnisse in diesen Fällen statthaben.

Salv. Das Problem ist schön, und ich habe viel über dasselbe nachgedacht; ich will Euch einiges mittheilen. Nachdem ich mich von der Unwahrheit dessen überzeugt hatte, dass ein und derselbe Körper in verschieden widerstehenden Mitteln Geschwindigkeiten erlange, die den Widerständen umgekehrt proportional seien, sowie von der Unwahrheit dessen, dass Körper von verschiedenem Gewicht in ein und demselben Mittel diesen Gewichten proportionale Geschwindigkeiten erlangen (auch bei blosser Differenz der specifischen Gewichte), combinirte ich beide Erscheinungen, indem ich Körper verschiedenen Gewichtes in verschieden widerstehende Medien brachte, und fand, dass die erzeugten Geschwindigkeiten um so mehr von einander abwichen, als der Widerstand des Mediums grösser war, und zwar in solchem Betrage, dass zwei Körper, die in der Luft nur sehr wenig verschieden fallen, im Wasser um's Zehnfache differiren können; auch kommt es vor, dass ein Körper in der Luft fällt, im Wasser dagegen schwebt, d. h. sich gar nicht bewegt, ja sogar emporsteigt: man kann leicht solche Holzarten, oder knotige Stellen desselben, oder Baumwurzeln finden, die im Wasser schweben können, während sie in der Luft schnell fallen.

Sagr. Ich habe mehrmals mir Mühe gegeben, eine Stange Wachs, die sonst nicht untersinkt, mit Sandkörnern zu verkleben, bis das Gewicht gleich dem des Wassers wird, und das Wachs in der Mitte des letzteren schwebt; trotz aller Vorsicht ist mir's nicht gelungen; ich weiss nicht, ob es eine andere feste Materie giebt mit völlig dem Wasser gleicher Dichtigkeit, so dass sie überall in demselben schweben könnte.

Salv. In solchen, wie in tausend anderen Verrichtungen sind viele Thiere uns überlegen. In Eurem Falle liessen sich die Fische nennen, da sie in der Ausübung solch einer Thätigkeit so gewandt sind, dass sie nach Belieben sich im Gleichgewicht erhalten, nicht nur in reinem Wasser, sondern auch in verschiedenartig beschaffenem, sei es durch Flussschlamm oder durch Salzgehalt, wodurch ziemlich grosse Unterschiede entstehen; das geschieht, sage ich, mit solcher Gewandtheit, dass sie in völliger Ruhe überall verharren können: und wie ich glaube, bewirken sie das, indem sie sich eines von der Natur zu diesem Zwecke ihnen verliehenen Organes bedienen, jener kleinen Blase, die durch eine ziemlich enge Oeffnung mit dem Munde communicirt, so dass sie je nach dem Zwecke Luft, die im Bläschen enthalten ist, ausstossen oder, wenn sie an die Oberfläche geschwommen sind, neue Luft einziehen können, indem sie durch diese Kunst bald schwerer bald leichter als Wasser werden und nach Belieben sich äquilibriren.

Sagr. Mit einem anderen Kunstgriff habe ich einmal einige Freunde getäuscht, indem ich mich rühmte, das Wachs mit dem Wasser ins Gleichgewicht gebracht zu haben. Ich hatte zunächst Salzwasser genommen, und darüber süsses Wasser gegossen, da blieb der Wachsstab in der Mitte schwebend, und sowohl wenn man ihn zu Boden stiess, als auch, wenn man ihn emporhob, strebte er zurück in die Mitte.

Salv. Das ist ein ganz nützlicher Versuch: wenn die Mediciner mit den verschiedenen Eigenschaften des Wassers sich abgeben, und von dem verschiedenen specifischen Gewichte sprechen, so wird man mit einem Stabe die kleinsten Unterschiede nachweisen können, wenn derselbe in dem einen Wasser sinkt, im anderen aufsteigt. Und so genau kann der Versuch ausgeführt werden, dass eine Zulage von zwei Gran Salz auf 6 Pfund Wasser den Stab aufsteigen lassen wird, der soeben noch gesunken war. Und zum Beweise der Genauigkeit, und zugleich als Merkmal dafür, dass das Wasser der Zertheilung keine Hindernisse in den Weg legt, möchte ich noch anführen, dass nicht nur die Auflösung einer schwereren Substanz solches bewirkt, sondern auch die einfache Erwärmung und Abkühlung: und zwar mit solcher Empfindlichkeit, dass durch Zuführung von 4 Tropfen anderen Wassers zu jenen sechs Pfund der Stab emporsteigt oder niedersinkt: bei Zumischung warmen Wassers sinkt er, bei kaltem steigt er. Jetzt seht Ihr, wie jene Philosophen in Irrthum befangen sind, die dem Wasser Zähigkeit zusprechen, oder eine andere bindende Kraft, die der Theilung Widerstand darbieten soll.

Sagr. Ich habe mehrere überzeugende Betrachtungen hierüber in einer Abhandlung unseres Akademikers gefunden: immerhin bleibt mir ein Bedenken, das ich nicht fortschaffen kann; wenn keine Zähigkeit und Cohäsion zwischen den Wassertheilchen vorhanden ist, wie kommt es, dass ziemlich grosse Wassertropfen sich erhalten können, — man sieht's auf Kohlblättern, — ohne zu zergehen und ohne sich auszubreiten?

Salv. Obwohl ein Jeder, der seine Ansicht für die richtige hält, allen Einwendungen begegnen müsste, so wage ich solches in vorliegendem Falle doch nicht, aber meine Unfähigkeit soll und darf die Wahrheit nicht trüben. Zunächst bekenne ich, nicht zu wissen, wie die Wassertropfen oben auf dem Blatte sich erhalten, obwohl ich sicher weiss, dass innere Zähigkeit das nicht hervorbringt; es muss die Ursache ausserhalb gesucht werden. Dass sie nicht innen liege, kann ich Euch, abgesehen vom vorigen Experiment, mit einem neuen sehr schlagenden beweisen. Wenn die Theile des obenliegenden Wassertropfens, während derselbe von Luft umgeben ist, einen inneren Grund zum Zusammenhalten hätten, so würde solches noch sicherer stattfinden, wenn sie in einer Umgebung sich befänden, in welcher sie weniger Tendenz hätten niederzusinken, als in der Luft; solch ein Medium wäre jede Flüssigkeit, die schwerer ist als Luft, z. B. Wein: umgiebt man aber den Wassertropfen mit Wein, so ist es fraglich, ob man das ausführen könne, ohne dass die Wassertheilchen, die von innerer Zähigkeit gehalten sein sollten, sich auflösten; aber das geschieht nicht eher, als bis die fremde Flüssigkeit genähert wird, wobei das Wasser sofort sich ausbreitet, ohne eine Auflösung und Vermischung abzuwarten; bei Rothwein ist es so; jener Effekt kommt also von aussen und könnte vielleicht von der Luft herrühren. Und wirklich bemerkt man eine grosse Unverträglichkeit zwischen Luft und Wasser, wie ich in folgendem Versuch beobachtet habe: Wenn ich eine Glaskugel, die eine enge Oeffnung hat, etwa wie ein Strohhalm, mit Wasser anfülle, und wenn ich die Kugel, so angefüllt, umkehre, so fliesst das Wasser, obwohl es sehr schwer ist, nicht heraus, und die Luft, die doch so leicht ist, steigt nicht empor, vielmehr bleiben beide in Ruhe. Wenn ich dagegen jenes umgekehrt gehaltene Gefäss in Rothwein senke, der kaum weniger leicht ist als Wasser, so sehen wir denselben sofort in rothen Streifen in das Wasser treten und das Wasser senkt sich langsam in den Wein, ohne dass beide sich mischen, bis endlich der Wein im oberen, das Wasser im unteren Gefäss sich befindet. Was sollen wir anderes annehmen, als eine Unverträglichkeit zwischen Luft und Wasser, die mir verborgen erscheint, und die vielleicht .....

Simpl. Ich muss fast lachen über die Antipathie des Herrn *Salviati* gegen das Wort Antipathie, da er dasselbe durchaus nicht nennen will, obwohl es so gut die Schwierigkeiten lösen könnte.

Salv. Gut, so sei dieses, Herrn *Simplicio* zu Gefallen, die Lösung, und kehren wir nach dieser Abschweifung zu unserem Probleme zurück. Wir sahen, dass die Differenz der Geschwindigkeiten verschiedener Körper von verschiedenem (specifischen) Gewicht im Allgemeinen grösser war in den stärker widerstehenden Medien: aber im Quecksilber sinkt Gold nicht nur schneller als Blei, sondern Gold allein sinkt überhaupt, während alle anderen Metalle und Steine emporsteigen und schwimmen; andererseits aber fallen Gold, Blei, Kupfer, Porphyr und andere schwere Körper mit fast unmerklicher Verschiedenheit in der Luft; Gold von 100 Ellen Höhe kaum vier Fingerbreit früher als Kupfer: Angesichts dessen glaube ich, dass, wenn man den Widerstand der Luft ganz aufhöbe, alle Körper ganz gleich schnell fallen würden.

Simpl. Das ist eine gewagte Behauptung, Herr *Salviati*. Ich meinerseits werde nie glauben, dass in ein und demselben Vacuum, wenn es in demselben eine Bewegung giebt, eine Wollenflocke ebenso schnell wie Blei fallen werde.

Salv. Nur gemach, Herr *Simplicio*, Euer Bedenken ist nicht so begründet, und ich bin nicht um Antwort in Verlegenheit. Zu meiner Rechtfertigung und zu Eurer Belehrung hört mich an: Wir wollen die Bewegung der verschiedensten Körper in einem nicht widerstehenden Mittel untersuchen, so dass alle Verschiedenheit auf die fallenden Körper zurückzuführen wäre. Und da nur ein Raum, der völlig luftleer ist und auch keine andere Materie enthält, sei dieselbe noch so fein und nachgiebig, geeignet erscheint das zu zeigen, was wir suchen, und da wir solch einen Raum nicht herstellen können, so wollen wir prüfen, was in feineren Medien und weniger widerstehenden geschieht im Gegensatz zu anderen weniger feinen und stärker widerstehenden. Finden wir thatsächlich, dass verschiedene Körper immer weniger verschieden sich bewegen, je nachgiebiger die Medien sind, und dass schliesslich, trotz sehr grosser Verschiedenheit der fallenden Körper im allerfeinsten Medium der allerkleinste

Unterschied verbleibt, ja eine kaum noch wahrnehmbare Differenz, dann, scheint mir, dürfen wir mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass im Vacuum völlige Gleichheit eintreten werde. Was also geschieht in der Luft, in der wir eine gutdefinirte Gestalt des Körpers annehmen wollen, und dazu eine sehr leichte Substanz, z. B. eine gespannte Blase, in welcher die eingeschlossene Luft, in Luft gewogen, nichts wiegen würde (oder wenig, da sie etwas comprimirt sein könnte), so dass das Gewicht bloss von der Membran herrührte, also noch nicht den 1000sten Theile eines Bleigewichtes von derselben Grösse betrüge. Diese beiden Körper, Herr *Simplicio*, lasset fallen aus einer Höhe von 4 oder 6 Ellen, um wieviel meint Ihr, werde das Bleigewicht früher ankommen als die Blase? Glaubt mir, nicht um's dreifache oder doppelte, obgleich das Gewicht um's 1000-fache verschieden.

Simpl. Vielleicht ist das so im Anfange der Bewegung bei den ersten 4 oder 6 Ellen: aber später, bei längerer Dauer, glaube ich, würde das Blei die Blase zurücklassen, nicht nur um ein Zwölftel der Strecke, sondern um 6, 8 oder 10 Zwölftel.

Salv. Und ich glaube dasselbe, und zweifele nicht, dass bei sehr grossen Strecken das Blei 100 Meilen fallen könnte, die Blase nur 1 Meile. Aber, mein Herr *Simplicio*, gerade dieses, was Ihr als eine meiner Behauptung widersprechende Erscheinung ansehet, bestätigt dieselbe am allerbesten. Es zeigt, wie die Ursache der verschiedenen Geschwindigkeiten der Körper verschiedenen specifischen Gewichtes nicht eben dieses letztere sein könne, sondern dass die Ursache aussen zu suchen sei, und zwar in dem Widerstande des Mittels, so dass, wenn man diesen Widerstand aufhöbe, alle Körper gleich schnell fallen würden. Das leite ich hauptsächlich aus dem Befunde her, den Ihr selbst soeben angenommen habt, und der vollkommen richtig ist, nämlich, dass Körper sehr verschiedenen Gewichtes um so mehr in der erlangten Geschwindigkeit differiren, je grösser die zurückgelegten Strecken sind: was nicht statthätte, wenn das verschiedene Gewicht die Ursache wäre. Denn da diese Gewichte immer dieselben sind, so müsste dasselbe Verhältniss zwischen den Strecken obwalten, während wir bei der Bewegung ein stetes Anwachsen desselben bemerken; ein sehr schwerer Körper wird den sehr leichten beim Fall durch eine Elle nicht um den zehnten Theil übertreffen, aber von 12 Ellen herab schon um den dritten Theil, von 100 Ellen herab um $^{90}/_{100}$.

Simpl. Ganz gut: aber verfolge ich weiter Euren Gedankengang, so scheint mir, dass, wenn die Gewichtsdifferenz bei Körpern verschiedenen specifischen Gewichtes nicht proportionale Aenderungen der Geschwindigkeit hervorrufen kann, immer vorausgesetzt dass die Gewichte sich nicht ändern, dass dann auch das Medium, wenn es stets dasselbe bleibt, keine Aenderung der Geschwindigkeiten bedingen könne.

Salv. Ihr erhebt gegen meine Auseinandersetzung einen scharfen Einwurf, den ich durchaus widerlegen muss. Ich behaupte, dass ein schwerer Körper von Natur das Princip in sich birgt, sich gegen das gemeinsame Centrum schwerer Körper zu bewegen, d. h. gegen unseren Erdball, und zwar mit einer stetig und gleichmässig beschleunigten Bewegung, dergemäss in gleichen Zeiten gleiche neue Geschwindigkeiten hinzugefügt werden. Das tritt allemal ein, wenn zufällige und äussere Hindernisse hinweggeräumt sind; unter den letzteren giebt es eines, das sich nicht fortschaffen lässt, nämlich das des Mediums, in welchem der fallende Körper sich bewegen soll, wodurch dasselbe seitlich ausweichen muss, und dieser Bewegung setzt das Medium, auch wenn es flüssig, nachgiebig und ruhig ist, einen Widerstand entgegen, der je nach Umständen grösser oder kleiner ist, und zwar um so grösser, je geschwinder das Medium sich öffnen muss, um den Körper hindurchzulassen, welch' letzterer daher, von Natur beschleunigt fallend, einen stets wachsenden Widerstand erfährt Daher entsteht eine Verzögerung und Verminderung aller neuerworbenen Geschwindigkeiten, sodass schliesslich diese, sowie die erzeugten Widerstände einen Grad erreichen, dass sie sich unter einander ausgleichen und alle Beschleunigung aufheben, und der Körper in eine gleichförmige Bewegung geräth, in welcher er fernerhin verharrt. Daher liegt die Vergrösserung des Widerstandes in dem Medium. Es ist zwar keine Veränderung der Essenz des Mediums, wohl aber ist das Bedingende die Geschwindigkeit, mit welcher das Medium sich öffnen muss, um dem beschleunigt fallenden Körper den Durchgang zu gestatten. Nun sieht man ein, dass der Widerstand der Luft gegen das geringfügige Moment der fallenden Blase sehr gross ist, gegen das Bleigewicht dagegen sehr klein. Aber ich bin überzeugt, dass, wenn man den Widerstand ganz aufheben könnte, man der Blase bedeutenden Vorschub leisten würde, dem Bleigewicht dagegen sehr wenig, die Geschwindigkeiten beider würden einander allmählich gleich werden. Halten wir dieses Princip fest, demgemäss in einem Raume, der leer ist oder der aus einem andern Grunde keinen Widerstand ausübt

5*

gegen die Bewegung der Körper, alle Körper sich gleich schnell bewegen, so können wir ziemlich genau die Bewegung ähnlicher und unähnlicher Körper in ein und demselben oder in verschiedenen Medien und auch in widerstehenden bestimmen. Und das erreichen wir, wenn wir darauf achten, wieviel das Gewicht des Mediums von dem Gewichte des beweglichen Körpers fortnimmt, denn der Ueberschuss der Gewichte ist das Hülfsmittel, durch welches der Körper sich Bahn bricht, die Theile des Mediums zur Seite drängend, ein Umstand, der im Vacuum nicht vorkommt, daher in diesem kein Unterschied aus der Verschiedenheit der specifischen Gewichte zu erwarten steht. Da nun das Medium dem Körper, den es enthält, so viel an Gewicht entzieht, als der verdrängte Theil des Mediums wiegt, so wird das Gesuchte gefunden, indem man das Gewicht des fallenden Körpers im Medium um die angegebene Grösse verkleinert, und nun den Vergleich anstellt mit dem Fall im Vacuum, wo sie gleich wären (nach unserer Annahme). Angenommen z. B. das Blei sei 10 000 mal schwerer als Luft, Ebenholz dagegen nur 1000 mal, so wird von den Geschwindigkeiten dieser beiden Körper, die im widerstandslosen Mittel gleich wären, die Luft dem Blei von 10 000 Einheiten eine entziehen, dem Ebenholz dagegen von 1000 eine, also von 10 000 Einheiten 10. Fallen also Blei und Ebenholz aus irgend einer Höhe herab, die sie ohne Widerstand in gleicher Zeit zurückgelegt hätten, so wird jetzt die Luft dem Blei von 10 000 Einheiten eine, dem Ebenholz von 10 000 zehn entziehen, d. h. theilen wir die Fallhöhe in 10 000 Theile, so wird bei der Ankunft des Bleies das Ebenholz 10 weniger 1, also 9 Theile zurückstehen. Also ebenso, wenn ein Bleistab von einem Thurme von 200 Ellen herabfällt, so würde er einen Stab aus Ebenholz um 4 Zoll überholen. Da Ebenholz 1000 mal, die Blase aber, die wir betrachteten, nur 4 mal schwerer ist, als Luft, so wird die Luft von 1000 Theilen Eigenbewegung des Ebenholzes einen Theil entziehen, bei der Blase dagegen von 4 Theilen einen: also wird bei der Ankunft des Ebenholzes die Blase nur $^1/_4$ des Weges zurückgelegt haben. Blei ist 12 mal schwerer als Wasser, Elfenbein nur 2 mal. Wasser also wird ihren absoluten Geschwindigkeiten, die gleich wären, dort $^1/_{12}$, hier die Hälfte entziehen: wenn also Blei 11 Ellen gefallen ist, hat das Elfenbein 6 zurückgelegt. Hiermit würden wir die Versuche genauer stimmen sehen, als mit der Ueberlegung des *Aristoteles*. Auf ähnliche Weise liessen sich die Geschwindigkeiten ein und desselben Körpers in verschiedenen Medien finden, indem wir nicht die verschiedenen Widerstände des Mediums als Ausgangspunkt wählen, sondern indem wir den Ueberschuss des Gewichtes über das des Mediums betrachten; Zinn ist z. B. 1000 mal schwerer als Luft und theilen wir die Fallgeschwindigkeit in 1000 Theile, so bewegt es sich in Luft mit 999, dagegen im Wasser nur mit 900. Sei ein Körper etwas schwerer als Wasser, z. B. Steineichenholz, und wiege ein Stab davon 1000 Drachmen, die entsprechende Wassermenge 950, Luft dagegen 2, so bleibt von der absoluten Geschwindigkeit von 1000 Graden in Luft 998 nach, im Wasser nur 50, da das Wasser 950 entzieht, und nur 50 belässt; dieser Körper würde also gegen 20 mal schneller in Luft fallen als im Wasser; denn der Ueberschuss seines Gewichtes über das des Wassers ist nur der 20ste Theil des Eigengewichtes. Und nun muss ich daran erinnern, dass eine Bewegung im Wasser nach unten nur möglich wird, wenn das specifische Gewicht grösser ist als das des Wassers, und das sind Körper viele hundert mal schwerer als Luft; um also die Geschwindigkeiten in Luft und in Wasser zu finden, können wir ohne merklichen Fehler annehmen, dass die Luft gar keinen Widerstand darbiete, und die Geschwindigkeit gleich der absoluten sei; da man leicht das Mehrgewicht der Körper gegen Wasser finden kann, so können wir sagen, die Geschwindigkeiten in Luft und Wasser verhalten sich nahezu wie das absolute Gewicht zum Ueberschuss über das Gewicht Wasser. Ein Elfenbeinstab wiege 20 Unzen, derselbe Raumtheil Wasser 17, die Geschwindigkeiten des Elfenbeines in Luft und Wasser verhalten sich also nahezu wie 20 zu 3.

Sagr. Eine wahrhaft grosse Errungenschaft ist mir in einer durchaus interessanten Frage erwachsen, über welche ich oft, leider vergeblich, nachgedacht habe: um diese Erkenntnisse zu verwerthen fehlt nur noch eine Methode, das Gewicht der Luft im Vergleich zu Wasser zu bestimmen, und damit zugleich zu anderen Körpern.

Simpl. Wenn aber sich fände, dass die Luft nicht Schwere, sondern Leichtigkeit besässe, was würde daraus folgen für die ganze Untersuchung, die mir, abgesehen hiervon, sehr sinnreich erscheint?

Salv. Alsdann müsste man sagen, dass die Discussion luftig, leicht und eitel gewesen. Aber wollt Ihr zweifeln an der Schwere der Luft, selbst gegen die Versicherung des *Aristoteles*, dergemäss alle Elemente Schwere haben, auch die Luft? Was, wie er bemerkt, dadurch bewiesen wird, dass ein aufgeblasener Schlauch mehr wiegt als ein zusammengefallener.

Simpl. Dass der aufgeblasene Schlauch mehr wiegt, wäre vielleicht nicht auf die Schwere der in ihm enthaltenen Luft zurückzuführen, sondern auf die vielen, in diesen unteren Regionen der Luft beigemischten dichten Dünste, in Folge deren das Gewicht des Schlauches wächst.

Salv. Eure Einrede gefällt mir nicht, auch werdet Ihr sie, wie ich hoffe, *Aristoteles* nicht unterschieben, der, wo er von den Elementen spricht, und von der Schwere der Luft, Versuche anstellt; hätte er gesagt: ich nehme einen Schlauch, fülle ihn mit dichten Dämpfen und beobachte eine Zunahme des Gewichtes, so würde ich ihm sagen, die Zunahme wäre noch grösser, wenn er den Schlauch mit Kleie ausfüllte; ich müsste aber sogleich hinzufügen, dass solche Versuche nicht mehr beweisen, als dass Kleie und dichte Dämpfe schwer sind, aber in Betreff der Luft bestände der alte Zweifel nach wie vor. *Aristoteles'* Versuch ist aber gut und der Satz ist wahr. Anders dagegen steht es mit der Lehre eines anderen Philosophen, dessen Name mir entfallen, und der kühn behauptete, die Luft sei eher schwer als leicht, weil sie schwere Körper leichter nach unten als leichte nach oben trägt.

Sagr. Vortrefflich, bei meiner Treu. Demgemäss wäre die Luft schwerer als Wasser, da alle Körper von ihr leichter nach unten als nach oben getragen werden, und die leichten Körper schneller in Luft als im Wasser fallen, denn zahllose Körper steigen auf im Wasser, während sie in der Luft fallen. Aber, Herr *Simplicio*, mag das Gewicht der Blase von eingeschlossener reiner Luft oder von dichten Dünsten bedingt sein, das ändert nichts an unserem Satze, denn wir untersuchen, wie die Körper eben in unserer dunstigen Luft sich bewegen. Indess kehre ich zu unserer ersten Frage zurück, ich möchte zur gründlichen Befestigung meiner Erkenntniss nicht bloss wissen, dass die Luft schwer sei (denn das halte ich für ausgemacht), sondern auch wie schwer sie sei. Bitte, Herr *Salviati*, theilt uns hierüber mit, was Ihr habt.

Salv. Dass die Luft Schwere besitze und nicht, wie Einige geglaubt haben, Leichtigkeit, welch' letztere, wie ich meine, in keiner Materie vorkommen dürfte, das beweist uns der Versuch mit dem aufgeblasenen Schlauch des *Aristoteles*; denn gäbe es in der Luft eine Qualität Leichtigkeit, so würde, wenn man dieselbe vermehrt und die Luft verdichtet, die Leichtigkeit zunehmen und damit zugleich auch die Tendenz nach oben; der Versuch aber lehrt das Gegentheil. Betreffs der anderen Frage, wie das Gewicht der Luft zu bestimmen sei, habe ich folgenden Weg eingeschlagen. Ich nahm einen ziemlich grossen Glasballon mit engem Halse, den ich mit einem Stück Leder umgab. Letzteres war fest um den Hals geschnürt und besass einen Einschnitt am Rande. Darüber befestigte ich ein Stück Membran, durch welches ich mittels einer Spritze gewaltsam in den Ballon eine grosse Menge Luft eintrieb, die alsdann so verdichtet war, dass man mit ihr zwei oder drei andere Ballons hätte füllen können, abgesehen von der Luft, die dieselben von Natur enthalten. Auf einer sehr genauen Wage habe ich alsdann den Ballon mit comprimirter Luft gewogen, indem ich die Tara mit feinem Sande herstellte. Nach Oeffnung der Blase trat die verdichtete Luft heftig aus, und auf die Waage zurückgebracht, war das Gewicht merklich kleiner, so dass von der Tara eine wohlaufgehobene Menge Sand fortgenommen werden musste. Unzweifelhaft ist das Gewicht dieser Sandmenge genau gleich dem der Luft, die gewaltsam eingepresst war und schliesslich austrat. Mehr hat aber bisher dieser Versuch nicht ergeben, als eben die Gleichheit der Gewichte jener Sandmenge und der eingepressten Luft, aber wollte man genau die Luft mit Bezug auf Wasser wägen, so erfahre ich dieses noch nicht, ja ich kann es gar nicht erfahren, wenn ich nicht zugleich die Menge jener zusammengepressten Luft bestimme: und zu diesem Zwecke habe ich zweierlei Wege ersonnen. Entweder man nimmt einen zweiten ähnlichen Ballon mit einem Halse, welch' letzterer ebenfalls mit Leder versehen ist, aber mit einer zweiten Oeffnung auf den ersten Ballon aufgestülpt wird, worauf beide fest mit einander verbunden werden. Dieser zweite Ballon ist am Boden durchbohrt, so dass man einen Eisenstab hindurchstecken kann, um mittelst desselben die Membran durchstossen zu können und dadurch der verdichteten Luft den Austritt zu ermöglichen: aber der zweite Ballon muss voll Wasser sein. Wenn alles gehörig vorbereitet, und mit dem Stabe die Membran durchlöchert worden ist, wird die Luft heftig austreten und in den Ballon mit Wasser überströmen, dieses letztere durch die Bodenöffnung hinausdrängend; die auf solche Weise vertriebene Wassermenge wird an Volumen gleich sein dem Volumen derjenigen Luft, die aus dem anderen Ballon ausgeströmt war. Man hebt nun die Wassermenge auf, wägt den entleerten, (sowie zuvor den verdichteten) Ballon, man merkt sich den Taraüberschuss wie vorhin, so ist dessen Gewicht dasjenige eines Luftvolumens gleich dem Volumen des vertriebenen Wassers; letzteres wägen wir, und bekommen das Verhältniss zum aufbewahrten Sande; alsdann können wir sicher angeben, wieviel mal schwerer das Wasser ist als die Luft, und es wird sich nicht die Zahl 10 finden, wie *Aristoteles* schätzte, wohl aber gegen 400, wie der Versuch lehrt.

Das andre Verfahren ist expediter, und kann mit einem einzigen Gefäss ausgeführt werden. Dazu nehmen wir den ersten Ballon in vorher beschriebener Weise, aber nur mit seiner natürlichen Luft. Ausserdem aber pressen wir Wasser ein, ohne der Luft den Austritt zu gestatten, so dass dieselbe sich verdichten muss. Haben wir so viel Wasser als möglich hineingeschafft, was ohne sehr grosse Kraft bis zu dreiviertel des Ballons zulässig sein wird, so bringen wir den letzteren auf die Wage und bestimmen genau das Gewicht, während der Ballonhals nach oben gerichtet ist, darauf durchstossen wir die Membran, wodurch genau so viel Luft austreten wird, als der Raum mit Wasser beträgt. Nach Austritt dieser Luft wägt man wiederum, und wird eine Abnahme gegen vorhin beobachten; der entsprechende Betrag ist das Gewicht von so viel Luft, als das Wasser im Ballon Raum einnimmt.

Simpl. Die von Euch ersonnenen Methoden sind wirklich fein und sinnreich: indessen glaube ich, dass sie nur dem Anschein nach uns befriedigen, da mich nach anderer Richtung hin Verwirrung bedroht. Zweifellos nämlich haben Körper in ihrem eigenen Elemente gewogen weder Schwere, noch Leichtigkeit, daher kann ich nicht begreifen, wie diese Luftmenge, die nur wenig wog, z. B. 4 Drachmen Sand, dennoch solch ein Gewicht wirklich äussern sollte in der Luft, in welcher der Sand sie aufwog; mir scheint, es dürfte der Versuch nicht im Elemente der Luft angestellt werden, sondern in einem Medium, in welchem die Luft selbst ihr Gewicht äussern könnte, wenn sie wirklich welches haben sollte.

Salv. Der Einwand des Herrn *Simplicio* ist scharfsinnig, daher ist derselbe entweder unwiderlegbar, oder die Lösung ist eben so fein. Dass jene Luft, welche verdichtet war und sich durch den Sandüberschuss kund that, nachdem sie in ihr Element zurückgekehrt war, nicht mehr wägbar erschien, das ist richtig, allein der Sand war wägbar; und deshalb könnte behufs Ausführung solcher Versuche ein Ort gewählt werden, wo Luft und Sand gravitiren könnten: denn, wie schon mehrfach erwähnt, entzieht das Medium einem jeden in dasselbe eingetauchten Körper so viel von dessen Eigengewicht, als die von ihm verdrängte Masse wiegt; somit hebt die Luft der Luft das Gewicht völlig auf; will man also exact verfahren, so müsste man im Vacuum wägen, wo jeder Körper sein Moment unvermindert zur Geltung brächte. Wenn wir also, Herr *Simplicio*, eine Portion Luft im Vacuum wägen würden, hättet Ihr dann Befriedigung?

Simp. Wahrhaftig ja; aber das hiesse das Unmögliche ausführen wollen.

Salv. Nun, dann werdet Ihr mir sehr verbunden sein, wenn ich Euch zu Liebe dieses Unmögliche zu Stande bringe; indess möchte ich Euch eine bereits geschenkte Gabe nicht verkaufen, denn in dem beschriebenen Versuche haben wir Luft im Vacuum gewogen und nicht in der Luft oder einem andern Medium. Dass eine Masse, Herr *Simplicio*, die in ein Medium taucht, einen Gewichtsverlust erleidet, das kommt daher, dass das Medium einer Aushöhlung, Vertreibung und Aufhebung widersteht, wie wir daraus erkannten, dass sofort eine Höhlung geschlossen wird, die ein hineingetauchter Körper hervorgerufen hatte, sobald letzterer entfernt wird: wenn das Medium die Immersion nicht empfände, so würde auch kein Gegenstreben vorhanden sein. Sagt mir nun, wenn Ihr in Luft Euren Ballon, mit natürlicher Luft gefüllt, vor Euch habt, welcherlei Theilung, Verdrängung, und überhaupt welcherlei Veränderung erhielte die äussere umgebende Luft durch jene Mengen, die wir neuerdings mit Gewalt einpressten. Vergrössert sich vielleicht der Ballon, sodass die äussere Luft zurückgedrängt wird? Gewiss nicht; daher können wir sagen, dass die eingepresste Luft nicht in die umgebende eingetaucht sei, da sie keinen Raum verdrängt, sie verhält sich vielmehr wie im Vacuum; und wirklich begiebt sie sich in ein solches, da sie die von der gewöhnlichen Luft nicht ganz ausgefüllten kleinen Hohlräume bei ihrer Verdichtung einnimmt. Wahrlich ich finde keinen Unterschied in dem umgebenden Mittel zwischen beiden Fällen, da hier gar kein Umgebendes vorhanden gedacht wird, während dort ein Umgebendes keinen Druck ausübt: und gleicher Art ist der Aufenthalt eines Körpers im Vacuum, wie die in den Ballon hineingepresste Luft. Das für die verdichtete Luft gefundene Gewicht ist ebendasselbe, welches sie im Vacuum haben würde. Allerdings hätte der Sand im Vacuum etwas mehr gewogen; daher man zugeben muss, dass die comprimirte Luft etwas mehr betragen haben wird als der Sand, aber nur um so viel, als die vom Sande verdrängte kleine Luftmenge im Vacuum gewogen hätte.

Simpl. Mir hatte es so geschienen, als liessen die Versuche etwas zu wünschen übrig; aber jetzt bin ich völlig zufriedengestellt.

Salv. Die bisher von mir vorgebrachten Fragen und insbesondere die über die Bewegung der Körper, die, wenn auch noch so verschieden, doch keinen Unterschied in der Geschwindigkeit beim Falle zeigen, so dass vielmehr alle mit gleicher Geschwindigkeit sich bewegen, sofern nur dieser Gewichtsunterschied in Frage kommt; diese Lehre, sage ich, ist vollkommen neu und auf den ersten Anblick recht unwahrscheinlich, so dass, wenn man sie nicht genug aufhellen und klarer als die Sonne erscheinen lassen könnte, es besser wäre, sie zu verschweigen als ihr Ausdruck zu geben; denn obwohl ich die Sache nun schon habe meinen Lippen entschlüpfen lassen, so muss ich doch noch die beweisenden Experimente nachholen.

Sagr. Nicht bloss diese, auch andere. Eure Sätze sind so fern von den gangbaren Lehren, dass Ihr bei einer Veröffentlichung viel Widersacher finden werdet, denn der natürliche Mensch trotz guter Augen sieht nicht das, was Andere mit ihrer Erfahrung an Wahrem und Irrigem aufgedeckt haben, und was ihnen verschlossen bleibt; mit sehr unliebsamen Titeln benennen sie die Reformatoren der Wissenschaft und suchen die Knoten zu zerhauen, die sie selbst nicht zu lösen verstehen, sie unterminiren jenes Gebäude, das von duldsamen Künstlern errichtet ist: da wir von solchem Ansinnen weit entfernt sind, gewähren uns Eure Versuche und Beweise hohe Befriedigung: wenn Ihr aber noch plausiblere Begründungen habt, würden wir sie gern anhören.

Salv. Der Versuch mit zwei an Gewicht möglichst verschiedenen Körpern, die man fallen lässt, um zu beobachten, ob sie gleiche Geschwindigkeit erlangen, bietet einige Schwierigkeiten dar, weil bei grosser Höhe das Medium, welches stets geöffnet und zur Seite geschoben werden muss, grösseren Einfluss hat auf einen sehr leichten Körper, als auf den heftigen Impuls eines sehr schweren Körpers, denn der sehr leichte wird zurückbleiben, und bei geringer Höhe könnte man zweifeln, ob eine Differenz vorhanden sei, da sie kaum beobachtet werden kann. Deshalb habe ich überlegt, ob man nicht mehrmals das Herabfallen durch geringe Höhen wiederholen könnte, so zwar, dass eine

Accumulation jener kleinen Zeitdifferenzen entstünde zwischen der Ankunft des schwereren und des leichteren Körpers, wodurch ein sogar sehr leicht wahrnehmbarer Unterschied in die Erscheinung träte. Um übrigens langsamere Bewegungen zu untersuchen, bei welchen die Arbeit des Widerstandes, die Wirkung der Schwere zu vermindern, kleiner ist, habe ich die Körper längs einer schwach geneigten Ebene fallen lassen, da auf einer solchen geradeso wie beim freien Fall das beobachtet werden kann, was sich auf Körper verschiedenen Gewichtes bezieht, und weiter gedachte ich mich zu befreien von dem Widerstande, der durch den Contact mit der geneigten Ebene entstehen könnte; endlich habe ich zwei Kugeln genommen, eine aus Blei und eine aus Kork, jene gegen 100 mal schwerer als diese, und habe beide an zwei gleiche feine Fäden von 4 bis 5 Ellen Länge befestigt und aufgehängt; entfernte ich nun beide Kugeln aus der senkrechten Stellung und liess sie zugleich los, so wurden Kreise von gleichen Halbmessern beschrieben, die Kugeln schwangen über die Senkrechte hinaus, kehrten auf denselben Wegen zurück, und nachdem sie wohl 100 mal hin- und hergegangen waren, zeigte sich deutlich, dass der schwerere Körper so sehr mit dem leichten übereinstimmte, dass weder in 100 noch in 1000 Schwingungen die kleinste Verschiedenheit zu merken war; sie bewegten sich in völlig gleichem Schritt. Man bemerkt wohl einen Einfluss des Mediums, welches einen Widerstand darbietet der Bewegung und weit merklicher die Schwingungen der Korkkugel vermindert, als die des Bleies, aber dadurch werden sie nicht mehr oder minder häufig, selbst wenn die vom Kork zurückgelegten Bögen nur 5 oder 6 Grad betragen, und die des Bleies 50 oder 60 Grad, sie werden sämmtlich in ein und derselben Zeit zurückgelegt.

Simp. Wenn das der Fall ist, so muss die Geschwindigkeit des Bleies grösser als die des Korkes sein, da jenes 60 Grad zurücklegt, und dieser kaum 6 beschreibt.

Salv. Was sagt Ihr aber dazu, Herr *Simplicio*, dass beide in gleichen Zeiten ihre Schwingungen ausführen, auch wenn der Kork bei 30 Grad Amplitude 60 Grad durchlaufen müsste, und das Blei bei nur 2 Grad Amplitude nur 4 Grad beschriebe? Alsdann müsste wohl der Kork der geschwinder sich bewegende Körper sein? Und der Versuch bestätigt meine Behauptung: deshalb merkt Euch folgendes: Hat man das Pendel aus Blei um 50 Grad aus dem Loth entfernt, und hat es frei schwingen lassen, so beschreibt es jenseits des Lothes gleichfalls nahezu

50 Grad, im Ganzen also fast 100 Grad, und zurückkehrend einen etwas kleineren Bogen, und nach einer grossen Anzahl von Schwingungen kommt es schliesslich zur Ruhe. Jede dieser Schwingungen kommt in einer gewissen sich stets gleich bleibenden Zeit zu Stande, sowohl die von 90 Grad Weite, als die von 50, 20, 10, 4 Grad: so dass die Geschwindigkeit allmählich abnimmt, da in gleichen Zeiten immer kleinere Bögen beschrieben werden. Einen ähnlichen, ja ganz denselben Vorgang nehmen wir beim Korke wahr, wenn er an einem ebenso langen Faden befestigt ist, nur dass er nach einer kleineren Anzahl von Schwingungen den Ruhezustand erreicht, da er wegen seiner Leichtigkeit weniger Macht hat, den Widerstand der Luft zu überwinden: also alle Schwingungen geschehen in gleichen Zeiten und noch dazu in derselben Zeit, wie die des Bleies. Daher ist es richtig, dass, während die Bleikugel einen Bogen von 50 Grad beschreibt und gleichzeitig die Korkkugel etwa nur 10 Grad, der Kork sich langsamer bewegt als das Blei; aber ebenso kann der Kork 50 Grad zurücklegen, das Blei dagegen 10 oder 6, es ist mithin dort das Blei, hier der Kork in geschwinderer Bewegung; aber wenn die genannten Körper in gleichen Zeiten gleiche Bögen beschreiben, dann wird auch die Geschwindigkeit derselben die gleiche sein.

Simpl. Mir erscheint die Sache bald richtig bald falsch, ich fühle mich so verwirrt, dass mir bald der eine, bald der andere als der schnellere, dann wieder als der langsamere vorkommt, und es mir dunkel bleibt, wie beider Geschwindigkeiten einander gleich sein können.

Sagr. Bitte, Herr *Salviati*, lasst mich zwei Worte entgegnen. Sagt mir, Herr *Simplicio*, kann man als sicher annehmen, dass die Geschwindigkeiten von Kork und Blei dieselben seien, wenn sie in ein und demselben Augenblicke die Ruhelage verlassen, stets gleiche Elongation behalten und gleiche Räume in gleichen Zeiten zurücklegen?

Simpl. Daran lässt sich weder zweifeln, noch kann man dem widersprechen.

Sagr. Nun beschreiben die Pendel 60 Grad oder 50 oder 30, oder 10 oder 8, 4, 2 Grad, und wenn beide 60 Grad zurücklegen, gebrauchen sie dazu gleiche Zeiten: dasselbe geschieht bei Bögen von 50 Grad: wieder dasselbe bei 30, 10 u. s. w.; daraus schliesst man auf die Gleichheit der Geschwindigkeiten beider Körper bei 60 Grad: dasselbe gilt für die Bögen von 50 Grad u. s. f. Aber nicht wird behauptet, die Geschwindigkeit bei 60 Grad sei gleich der bei 50 Grad, noch die letztere gleich der bei 30, sondern die entsprechenden Geschwindigkeiten werden immer kleiner: das erhellt daraus, dass der Körper ebensoviel Zeit für den Durchgang durch 60 Grad braucht, wie für den durch den kleineren Bogen von 50 oder 10, wie überhaupt durch Bögen jeglicher Grösse. Also gehen Kork und Blei mit immer kleineren Geschwindigkeiten, je kleiner die Bögen, aber deswegen ändert sich nicht die Uebereinstimmung beider bei jeder Bogenlänge. Ich fasse dieses mehr deshalb zusammen, um zu sehen, ob ich gut die Darstellung des Herrn *Salviati* verstanden habe, als dass ich glaubte, Herrn *Simplicio* eine bessere Erklärung vorzuführen, als die des Herrn *Salviati*, der stets so vollendet klar spricht und nicht bloss die scheinbaren Schwierigkeiten hebt, sondern auch die wahren Räthsel der Natur löst, mit Ueberlegungen, Beobachtungen und Versuchen, die Jedermann zugänglich sind; freilich hat (wie ich gehört habe) einer der Professoren seine Neuerungen gelegentlich gering geachtet, weil sie gemeinplätzig und auf gar zu niedrigen und populären Grundsätzen erbaut seien, als ob nicht die bewunderungswürdigste und schätzbarste Eigenschaft der demonstrativen Wissenschaften das Hervorquellen und Hervorkeimen aus ganz bekannten gemeinverständlichen und unbestrittenen Principien sei. Lasst uns aber fortfahren, an dieser leichten Speise uns zu erfreuen; und in der Voraussetzung, dass Herr *Simplicio* sich darüber beruhigt hat, dass die den Körpern innewohnende Schwere keine Verschiedenheit der Geschwindigkeiten bedinge, so dass aus diesem Grunde alle gleich schnell sich bewegen würden, bitte ich Herrn *Salviati* uns zu sagen, worauf die beobachteten und scheinbaren Ungleichheiten der Bewegung zurückzuführen seien; auch bitte ich Herrn *Simplicio's* und meinen Einwand zu beachten, demgemäss in einem Medium nicht nur eine Kanonenkugel sich schneller als ein Schrotkorn bewege, mit einer allerdings merklichen Differenz, während andererseits grössere Massen in einem dichteren Medium in einem Pulsschlag eine Strecke zurücklegen, für welche andere kleinere Körper eine Stunde gebrauchen, oder 4 oder 20 Stunden, wie z. B. feinster Sand, der das Wasser trübt, und in vielen Stunden kaum zwei Ellen sinkt.

Salv. Wenn das Medium specifisch leichtere Körper stärker aufhält, so war schon gezeigt, dass dieses durch die Verminderung des absoluten Gewichtes zu erklären sei. Wie aber dasselbe Medium so sehr verschieden die Geschwindigkeit vermindere, wenn die Körper nur der Grösse nach verschieden sind, bei sonst gleichem Material und gleicher Gestalt, das lässt sich nur durch eine feinere Untersuchung erklären, und es genügt nicht der Erkenntnissgrund jenes anderen Falles, wo der grössere Körper mehr Widerstand erfährt. Ich führe die fragliche Erscheinung auf die Rauhigkeit und Porosität zurück, die auf allen Oberflächen fester Körper vorhanden ist, eine Rauhigkeit, welche Reibung erzeugt in der Luft oder in anderem umgebendem Mittel; hieraus entsteht das Brausen der Körper, auch wenn letztere noch so abgerundet sind, sobald sie sehr schnell die Luft durchsetzen, auch vernimmt man ein Pfeifen und Zischen, wenn der Körper eine Höhlung oder eine Erhebung besitzt. Bei der Drehbank verursacht jeder noch so runde Körper einen schwachen Wind. Und weiter: hören wir nicht ein gewaltiges Brausen, und starken Donner den Blitz begleiten, wenn letzterer mit ungeheurer Schnelligkeit in die Erde fährt? Der Pfeifton wird immer tiefer, je langsamer eine Ruthe geschwungen wird; ein Beweis dafür, dass die rauhen Theile der Oberfläche die Luft anstossen, seien sie auch noch so klein. Daher wird unzweifelhaft beim Fall der Körper, durch Reibung an dem umgebenden Medium, eine Verzögerung hervorgerufen und zwar eine um so merklichere, je grösser die Oberflächen der kleineren und grösseren Theile sind.

Simpl. Haltet ein, bitte, es beginnt meine Verwirrung: denn ich gestehe wohl zu, dass die Reibung des Mediums gegen die Oberfläche die Bewegung verzögere, und das zwar (ceteris paribus) um so mehr, je grösser die Oberfläche ist, aber deshalb verstehe ich nicht, weshalb Ihr die Oberfläche der kleineren Körper eine grössere nennt: und dann, wenn, wie Ihr sagt, die grössere Oberfläche mehr Verzögerung erleidet, so müssten doch gerade die grösseren Körper zurückbleiben, und das stimmt nicht: ich denke, diese Schwierigkeit ist leicht zu beseitigen, wenn man sagt, der grössere Körper habe zwar eine grössere Oberfläche, aber auch viel mehr Gewicht (gravità), so dass das Hemmniss gegen die grössere Oberfläche doch nicht den Einfluss hat, wie der Widerstand gegen die kleinere Oberfläche des kleineren Gewichtes, so dass die Geschwindigkeit des grösseren Körpers nicht kleiner ausfallen kann. Ich sehe aber nicht ein, warum die Gleichheit der Geschwindigkeiten gestört werden sollte, da bei kleinerem Gewichte auch die Oberfläche verkleinert wird.

Salv. Euren Einwänden lässt sich leicht begegnen. Ihr behauptet, Herr *Simplicio*, dass zwei gleiche Körper von gleicher

Materie und gleicher Gestalt (die ohne Zweifel gleich schnell sich bewegen würden), wenn man dem einen das Gewicht und die Oberfläche in gleichem Maasse verringerte (wobei die Gestalt immer ähnlich bleiben soll), die Geschwindigkeit des verkleinerten sich nicht vermindern würde.

Simpl. Allerdings scheint mir das zu folgen, da wir annehmen, dass das grössere und das kleinere Gewicht keine verschiedene Geschwindigkeit bedingt.

Salv. Letzteres behaupte ich auch, und zugleich lasse ich die Consequenz gelten, dass, wenn sich das Gewicht in stärkerem Maasse ändert als die Oberfläche, man eine immer wachsende Verzögerung veranlassen würde, in je stärkerem Verhältniss das Gewicht im Vergleich zur Oberfläche abnähme.

Simpl. Das gebe ich ohne Weiteres zu.

Salv. Nun aber wisst Ihr doch, Herr *Simplicio*, dass man bei einem Körper dessen Oberfläche nicht in demselben Verhältniss verkleinern kann, wie das Gewicht, solange die Gestalten ähnlich bleiben sollen. Denn das Gewicht nimmt ebenso ab wie die Masse, und wenn die Masse mehr als die Oberfläche verringert wird, wird auch das Gewicht mehr als die Oberfläche verkleinert werden. Die Geometrie lehrt, dass ein grösseres Verhältniss zwischen den Massen ähnlicher Körper, als zwischen deren Oberflächen besteht. Zu näherer Aufklärung betrachten wir ein Beispiel. Denkt Euch einen Würfel von zwei Zoll Länge, eine Fläche hätte also 4, und alle sechs Flächen, d. h. die ganze Oberfläche 24 Quadratzoll. Zerschneiden wir den Würfel in acht Würfel mit einem Zoll Seite und einem Quadratzoll Fläche, so hat der ganze kleine Würfel sechs, während der grössere 24 Quadratzoll Oberfläche besass, folglich ist die Oberfläche auf $\frac{1}{4}$ herabgemindert, der Inhalt dagegen auf $\frac{1}{8}$; die Masse und mithin das Gewicht schwindet also mehr, als die Oberfläche. Und theilet Ihr nochmals den kleinen Würfel in acht Theile, so hat ein jeder dieser anderthalb Quadratzoll Fläche, also $\frac{1}{16}$ der Oberfläche des ersten; die Masse dagegen ist $^1/_{64}$. Ihr seht also, wie bei bloss zwei Theilungen die Masse viermal stärker schwindet, als die Oberfläche, setzen wir aber die Theilung fort, bis wir ein feines Pulver haben, so wird die Masse um 100 und aber 100 mal mehr vermindert worden sein, als die Oberfläche. Was aber für Würfel erkannt wurde, gilt für alle ähnlichen Körperformen, deren Massen stets in anderthalbfacher Potenz zu den Oberflächen stehen [9]. Nun erkennt Ihr auch, in welch' stärkerem Maasse der Widerstand des Mediums gegen kleine, als gegen grosse Körper wächst; ausserdem ist vielleicht die Rauhigkeit in den kleinsten Oberflächen der Pulvertheile nicht geringer als die bei grossen Körpern, die sorgfältig polirt sind, merket daher, wieviel nöthig ist, damit ein Medium flüssig sei und gänzlich frei von Widerstand, um einer so schwachen Kraft zu weichen und sich zu öffnen, um den Durchgang zu ermöglichen. Aus allem seht Ihr, Herr *Simplicio*, dass ich mich nicht geirrt habe bei der Aufstellung der Behauptung, die Oberfläche kleiner Körper sei gross im Vergleich zur Oberfläche grosser Massen.

Simpl. Ich bin vollständig überzeugt worden; und glaubt mir, wenn ich von Neuem meine Studien anfangen könnte, ich würde Plato's Rath befolgen und mit Mathematik beginnen, denn diese Disciplin geht peinlich genau vor und lässt nur das zu, was folgerichtig dasteht

Sagr. Diese Auseinandersetzung hat mir ausserordentlich gefallen; aber ehe wir auf Anderes übergehen, bitte ich auf einen mir neuen Ausdruck zurückzukommen. Ihr sagtet, ähnliche Körper stünden in anderthalbfachem Verhältniss zu ihren Oberflächen, denn, obwohl ich den Satz begriffen habe, demgemäss die Oberflächen ähnlicher Körper im quadratischen, also zweifachen Verhältniss ihrer Seiten stehen, und jenen anderen Satz, dass die Würfel im dreifachen Verhältniss zu den Seiten stehen, so ist mir das Verhältniss zwischen Körper und Oberfläche doch, so viel ich mich entsinne, nie vorgekommen.

Salv. Mein Herr, Ihre Frage enthält schon die Antwort und benimmt jeden Zweifel. Wenn etwas das dreifache, ein anderes das zweifache einer Sache ist, so ist jenes das anderthalbfache von diesem. Da nun die Oberflächen im doppelten, die Körper im dreifachen Verhältniss zu den Linien stehen, können wir alsdann nicht sagen, die Körper stünden im anderthalbfachen Verhältniss zu den Oberflächen?

Sagr. Das ist allerdings ganz richtig. Wenn ich nun auch noch einiges andere vorbrächte, so würden wir uns immer weiter vom Ziele entfernen, ich meine von der Erklärung der Bruchfestigkeit; sollen wir nicht jetzt darauf eingehen, und dann auf die anfänglich aufgestellten Sätze zurückkommen.

Salv. Sie haben, mein Herr, vollkommen Recht, aber die vielen, so verschiedenen bisher erörterten Fragen haben uns so viel Zeit gekostet, dass wir an diesem Tage nur wenig die Hauptfrage werden fördern können, weil sie viel geometrische Beweise voraussetzt, die mit aller Aufmerksamkeit behandelt sein wollen; daher ich meine wir besser auf morgen eine Zusammenkunft vereinbaren; alsdann könnte ich auch einige Blätter mitbringen, wo ich alle Theoreme und Probleme gehörig geordnet habe, denn frei aus dem Gedächtniss würde es mir an der correcten Methode fehlen.

Sagr. Diesem Rathe folge ich gerne, umsomehr, als ich zum Schluss der heutigen Sitzung die Aufklärung einiger Zweifel erbitten würde aus dem letzterörterten Gebiete. Das eine wäre, ob der Widerstand eines Mediums hinreichen könne, die Beschleunigung sehr schwerer Körper aufzuheben, solcher, die eine sehr grosse Masse haben und von sphärischer Gestalt sein mögen; letzteres füge ich hinzu, weil sich die kleinste Oberfläche dabei befindet, die mithin am wenigsten Widerstand erleidet. Ein anderes wäre die Schwingung der Pendel, und zwar in mehrfacher Hinsicht: erstens ob wirklich alle Pendel, grosse, mittlere, und ganz kleine, in genau gleichen Zeiten schwingen: und zweitens, in welchem Verhältniss die Schwingungsdauern bei Pendeln ungleicher Länge stehen.

Salv. Ihr stellet schöne Fragen auf, aber wie man bei allem Wahren stets auf neue interessante Consequenzen stösst, zweifele ich sehr, ob der Rest des heutigen Tages zur Erledigung aller hinreichen wird.

Sagr. Wenn dieselben so schön, wie die bisher erörterten sind, so würde ich denselben lieber so viel Tage widmen, als uns heute Stunden bis Mitternacht bevorstehen, und ich hoffe, Herr *Simplicio* wird die Discussion gerne mitmachen.

Simpl. Ganz gewiss, und besonders wenn neue naturwissenschaftliche Probleme behandelt werden, auf welche andere Philosophen nicht eingegangen sind.

Salv. Gehen wir nun auf den ersten Satz ein, der als gewiss hinstellt, dass eine Kugel nie zu gross, noch zu schwer gedacht werden kann, als dass der Widerstand des Mediums, wenn letzteres auch noch so dünn ist, nicht die Beschleunigung vermindere, und bei fortgesetzter Bewegung dieselbe zuletzt gleichförmig werden lasse, wie solches aus einem Versuch völlig erhellen wird. Denn wenn ein fallender Körper irgend eine Geschwindigkeit erlangen kann, so könnte keine von äussern Kräften ihm ertheilte Bewegung so gross sein, dass er dieselbe nicht annähme und sich ihrer entäussere durch den Widerstand des Mediums. Eine Kanonenkugel falle z. B. 4 Ellen hoch herab und habe 10 Maass Geschwindigkeit erlangt, und trete so in Wasser ein, dann würde, wenn der Widerstand des Wassers 2

2

solchen Impuls nicht aufheben könnte, die Geschwindigkeit zunehmen, oder sie würde bis zum Boden dieselbe Gewalt behalten; dieses aber geschieht nicht, sondern das Wasser, selbst nur wenige Ellen tief, hemmt die Kugel und schwächt die Bewegung so, dass der Boden nur einen ganz geringen Stoss erfährt. Es ist mithin klar, dass die Geschwindigkeit, die das Wasser auf sehr kurzer Strecke vernichtet hat, auch in der Tiefe von 1000 Ellen nicht dem Körper geblieben wäre. Warum sollen wir annehmen, dass auf 1000 Ellen eine Bewegung gewonnen würde, die auf 4 Ellen ihm genommen wird? Aber noch mehr: sieht man nicht die mit immensem Impulse abgeschossene Kanonenkugel dermaassen durch wenige Ellen Wasser gedämpft werden, dass ein Schiff, geschweige dass es verletzt wurde, kaum einen gelinden Stoss erfährt? Aber auch die Luft, trotz ihrer Nachgiebigkeit, hemmt die Geschwindigkeit jedes schweren Körpers, wie ähnliche Versuche beweisen; denn schiessen wir von der Spitze eines sehr hohen Thurmes eine Kugel ab und zwar nach unten, so wird dieselbe weniger tief in die Erde dringen, als wenn wir dieselbe Flinte nur von 4 oder 6 Ellen Höhe losschiessen, ein Beweis, dass die auf der Thurmspitze ertheilte Geschwindigkeit beim Sinken in der Luft abnimmt: mithin wird auch das Herabfallen von irgend einer sehr bedeutenden Höhe nicht jene Geschwindigkeit erzeugen, weil die Luft hinderlich ist. Es wird der Schaden, den eine aus 20 Ellen Entfernung von einer Feldschlange (24 pfündiges Geschütz) abgeschossene Kugel verursacht, von keiner Höhe irgend welcher Grösse durch freien Fall der Kugel erreicht werden können. Darum glaube ich, dass eine jede Beschleunigung unter natürlichen Verhältnissen ein Ende erreicht, und eine gleichförmige Bewegung eintritt.

Sagr. Die Versuche erscheinen mir durchaus zutreffend; nur könnte man einwenden, dass dieselben mit sehr grossen Geschossen vielleicht anders ausfallen würden und dass eine vom Monde herkommende Kanonenkugel, oder eine von der obersten Luftregion, einen stärkeren Stoss ertheilen würde, als irgend eine abgeschossene.

Salv. Freilich lässt sich stets Manches einwenden, und nicht Alles lässt sich experimentell entscheiden, im vorliegenden Fall jedoch lässt sich etwas erwidern: es ist sehr wahrscheinlich, dass ein von grosser Höhe herabfallender Körper mit ebenso grosser Geschwindigkeit die Erde erreicht, als ihm ertheilt werden müsste, um ihn auf jene Höhe zu heben, wie man das deutlich am Pendel erkennt, welches um 50 oder 60 Grad aus der Ruhelage entfernt solch' eine Geschwindigkeit erlangt, die hinreicht ihn ebenso hoch zu erheben, abgesehen von jenem geringen Verluste, den der Widerstand der Luft bedingt. Um also eine Kanonenkugel auf eine Höhe zu erheben, die zur Ertheilung einer so grossen Geschwindigkeit genügte, wie die beim Austritt aus dem Geschütz, müsste es genügen, sie senkrecht in die Höhe zu schiessen mit ebendemselben Geschütz, und es liesse sich beobachten, ob sie beim Niederfallen dieselbe Wirkung ausübt, wie beim Schuss aus unmittelbarer Nachbarschaft; die Verschiedenheit, wie ich glaube, wird nicht gross sein. Ausserdem, scheint mir, wird die Kanonenkugel beim Verlassen des Geschützes eine Geschwindigkeit haben, welche der Widerstand der Luft zu erreichen verhindern würde, mag sie von noch so bedeutender Höhe aus der Ruhe in natürlicher Weise herabfallen. Betreffs des Pendels bemerke ich, dass dieses Problem Vielen äusserst trocken erscheint, ganz besonders jenen Philosophen, die stets die tiefsten Probleme der Natur behandeln; ich aber schätze das Problem, nach dem Vorgange des *Aristoteles*, bei dem ich stets bewundere, wie er Alles berührt, was einiger Beachtung werth erscheint: ich möchte Euch nun einige Gedanken mittheilen über Probleme der Akustik; ein hochedler Gegenstand, über welchen viel geschrieben worden ist, auch von *Aristoteles* selbst, der mehrere merkwürdige Aufgaben behandelt, so dass, wenn ich auf Grund einiger leichter und sinnreicher Versuche höchst wunderbare Erscheinungen aus der Tonlehre besprechen will, ich hoffen darf, Euren Beifall zu finden.

Sagr. Wir werden sehr dankbar sein, und, was mich betrifft, ich werde einen besonderen Wunsch erfüllt sehen, da ich mich mit allen Musikinstrumenten abgegeben, auch über die Consonanz viel nachgedacht habe, ohne begreifen zu können, woher es komme, dass mir das Eine mehr als das andere gefällt, und wiederum dass Einiges mir nicht bloss nicht gefällt, sondern vielmehr im höchsten Grade missfällt. Das allbekannte Problem der zwei gleichgestimmten Saiten, demgemäss beim Erklingen der einen die andere sich auch bewegt und mitschwingt, ist mir noch nicht klar, auch verstehe ich nicht recht die Form der Consonanzen und Anderes.

Salv. Lasst uns sehen, ob wir von unseren Pendeln aus einigen Gewinn für diese Probleme schöpfen können. Fragen wir uns zunächst, ob es ganz genau wahr sei, dass ein Pendel alle seine Schwingungen, die grössten, die mittleren und die kleinsten, in völlig gleichen Zeiten vollführe, so beziehe ich mich

6*

auf die Angaben unseres Akademikers, der bewies, dass ein Körper, der längs der Sehne über einem beliebigen Bogen herabfällt, stets dieselbe Zeit gebrauche, sei der entsprechende Bogen volle 180 Grad gross, oder 100, 60, 2, ½ oder 4 Minuten: alle diese Körper sollen die Horizontalebene im untersten Punkte erreichen. Weiter fallen aber die Körper, durch die Bögen schwingend, von 90 Grad Elongation an, gleichfalls in gleichen Zeiten; aber diese Zeiten sind kürzer, als die beim Fallen längs der Sehnen; ein in der That sehr merkwürdiges Verhalten, bei dem man das Gegentheil zu erwarten geneigt wäre. Wenn Anfangs- und Endpunkt der Bahnen identisch sind, so ist die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen beiden, daher möchte man glauben, der Fall längs dieser Strecke werde die kürzeste Zeit gebrauchen; das ist aber nicht so: die kürzeste Zeit und mithin die rascheste Bewegung ist die längs des Bogens, dessen Sehne jene Gerade ist[10]). Bei Pendeln verschiedener Länge verhalten sich die Zeiten wie die Quadratwurzeln aus den Längen, oder mit a. W. die Pendellängen verhalten sich wie die Quadrate der Schwingungszeiten: soll also ein Pendel doppelt so langsam schwingen, als ein anderes, so muss es die vierfache Länge haben. Ein anderes Pendel wird im Vergleich zum kürzeren die dreifache Schwingungsdauer haben, wenn seine Länge das neunfache beträgt. Hieraus folgt zudem, dass die Pendellängen sich umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszahlen verhalten.

Sagr. Wenn ich wohl verstanden habe, so kann ich sofort die Länge eines Pendels von immenser Ausdehnung berechnen, auch wenn der Aufhängepunkt unsichtbar wäre und man nur das untere Ende beobachten könnte. Ich brauchte bloss ein Gewicht anzuhängen und dasselbe in Schwingungen zu versetzen, und während ein Gehilfe einige Schwingungen zählt, beobachte ich die Schwingungszahl eines anderen Pendels, dessen Länge genau einer Elle gleich. Aus beiden Schwingungszahlen, die in gleicher Zeit erhalten worden, berechne ich die Länge meines Pendels; z. B. mein Gehilfe habe 20 Schwingungen gezählt, während ich 240 erhalten habe; bilden wir die Quadrate 400 und 57 600, so erkennen wir, dass das lange Pendel 57 600 solcher Theile hat, von denen 400 auf eine Elle gehen; theilen wir 57 600 durch 400, so ergiebt sich 144, folglich muss das Pendel 144 Ellen lang sein.

Salv. Ihr werdet keine Spanne Fehler haben, ganz besonders, wenn Ihr eine grosse Menge von Schwingungen zählt.

Sagr. Wie oft gebt Ihr mir Gelegenheit den Reichthum und zugleich die Freigebigkeit der Natur zu bewundern, indem Ihr über einfache, ja fast triviale Dinge so merkwürdige, völlig neue, der Einbildungskraft fernliegende Betrachtungen anstellt. Wohl tausendmal habe ich Schwingungen beobachtet, besonders bei den Kronleuchtern in den Kirchen, die oft so sehr lang sind, aber mehr habe ich nicht gefunden als die Unwahrscheinlichkeit der Ansicht, dass ähnliche Bewegungen vom umgebenden Mittel, hier also von der Luft unterhalten werden; ich denke, die Luft müsste sicheres Urtheil und zugleich wenig sonst zu thun haben, um nur die Zeit zu vertreiben, und die Zeitstunden mit dem Hin und Her eines Gewichtes mit grosser Genauigkeit auszufüllen: dass aber ein und derselbe Körper, an einem 100 Ellen langen Faden, stets gleiche Zeit gebraucht, sei es dass er 90 Grad abweicht, oder 1 Grad, das hätte ich nimmer gefunden, und immer wieder kommt es mir wie unmöglich vor. Nun bin ich begierig zu hören, wie diese einfachen Beziehungen mir jene akustischen Phänomene erklären können.

Salv. Vor allem müssen wir constatiren, dass jedes Pendel eine so feste und bestimmte Schwingungsdauer hat, dass man dasselbe in keiner Weise in einer anderen Periode schwingen lassen kann, als nur in der ihm von Natur eigenen. Man nehme ein beliebiges Pendel in die Hand, und versuche die Zahl der Schwingungen zu vermehren oder zu vermindern, es wird verlorene Mühe sein; aber einem ruhenden, noch so schweren Pendel können wir durch blosses Anblasen eine Bewegung ertheilen, und zwar eine recht beträchtliche, wenn wir das Blasen einstellen, sobald das Pendel zurückkehrt, und immer wieder blasen in der dem Pendel eigenthümlichen Zeit; wenn auch beim ersten Blasen wir das Pendel nur um einen halben Zoll entfernt haben von der Ruhelage, so werden wir, nach der Rückkehr desselben es nochmals anblasend, die Bewegung vermehren, und so weiter; aber zur bestimmten Zeit, und nur nicht wenn das Pendel auf uns zu schwingt (denn in diesem Falle würden wir die Bewegung hemmen und nicht vermehren), und endlich wird eine so starke Schwingung hervorgerufen sein, dass eine sehr viel grössere Kraft, als die eines einmaligen Anblasens erforderlich wäre, um die Ruhe wiederherzustellen.

Sagr. Schon als Kind habe ich gesehen, wie ein einziger Mann durch rechtzeitige Anstösse eine immense Kirchenglocke zum Läuten brachte, und um sie anzuhalten hingen sich 4 oder 6 andre Männer an, wurden aber sämmtlich mehrere Mal in die

Höhe gehoben, und konnten die Glocke, die ein Einziger in regelmässigen Intervallen bewegt hatte, nicht sogleich zur Ruhe bringen.

Salv. Das ist ein Beispiel, welches ebenso zutreffend mir dienen kann, um das wunderbare Phänomen an den Saiten der Zither und des Klavieres (cimbalo) zu erklären, wo nicht bloss die gleichgestimmten mittönen, sondern auch die im Verhältniss der Octave und der Quinte stehenden. Eine angeschlagene Saite ertönt und klingt fort, solange seine Resonanz andauert: diese Schwingungen versetzen die Luft in Mitbewegung, und das Erzittern derselben erstreckt sich weit fort, und erregt alle Saiten desselben Instrumentes und auch die anderer benachbarter: jede mit der angeschlagenen gleich gestimmte Saite, da sie geneigt ist, in demselben Tempo zu vibriren, fängt bei dem ersten Impulse an sich ein wenig zu bewegen, es wird ein zweiter, ein dritter, ein zwanzigster und mehr hinzugefügt, und dieselben erfolgen alle in der passenden Zeit, so dass schliesslich die Schwingung ebenso ergiebig wird, wie die der ersten Saite; man sieht ihre Elongationen wachsen bis zur Weite der erregenden. Die Luftwellen erschüttern nicht bloss Saiten, sondern auch andere mitschwingungsfähige Körper: sodass, wenn an den Rand des Instrumentes diverse Borstenfäden angeheftet werden, oder anderes biegsames Material, man beim Spielen des Instrumentes bald diesen, bald jenen Körper mitschwingen sieht, je nachdem eine Saite erklingt, deren Schwingungsdauer mit denen der angehängten Substanzen übereinstimmt: andere bleiben hierbei in Ruhe; sowie jene sich nicht bewegen, wenn andere Töne angeschlagen werden. Streicht man mit dem Bogen eine dicke Saite der Viola an, während man einen Becher aus feinem reinem Glase an das Instrument hält, so wird jener erzittern, wenn eine Uebereinstimmung der Schwingungszahl statthat, und laut mitklingen. Wie sehr die Schwingung der umgebenden Luft an den mittönenden Körper abgegeben wird, kann man sehen, wenn man den Becher zum Tönen bringt, indem man den Rand mit der Fingerspitze bestreicht, während sich Wasser im Gefäss befindet; man erkennt alsdann die Wasserwellen in regelmässigster Form, und besser noch gelingt der Versuch, wenn man den Becherfuss auf den Boden eines grossen Gefässes stellt, in welches Wasser fast bis zum Rande eingegossen ist: man sieht alsdann dasselbe in sehr regelmässiger Weise erzittern und mit grosser Geschwindigkeit weit vom Becher sich ansammeln, ja bei einem ziemlich grossen Becher voll Wasser sah ich oft sehr gleichmässig geformte Wellen, dann aber sprang der Ton in die höhere Octave über, und es zerfiel eine Wasserwelle in zwei Wellen: eine Erscheinung, die deutlich zeigt, dass die Form der Octave die doppelte ist (la forma dell' ottava esser la dupla).

Sagr. Ich habe auch solches beobachtet bei Gelegenheit meiner Musikstudien; ich war sehr erstaunt über die Formen der Consonanzen, da es mir schien, als ob die von gelehrten Musikern aufgestellten Verhältnisse und Begründungen zur Erklärung nicht hinreichten. Sie behaupten, der Diapason oder die Octave stehe in der doppelten, die Diapente oder, wie wir es nennen, die Quinte in dem anderthalbfachen Verhältniss, denn die Saite eines Monochordes lässt den Grundton hören, und dessen Octave, wenn eine Stütze in der Mitte angebracht wird; wird aber der Steg bei einem Drittel der ganzen Saite angesetzt, und der innere Theil gedämpft, der äussere angeschlagen, so hört man die Quinte, daher sie behaupten, die Octave bilde das Verhältniss 1 zu 2, die Quinte 2 : 3. Diese Schlussfolgerung schien mir nicht zwingend, um sagen zu können, das doppelte, und das anderthalbfache seien die natürlichen Formen vom Diapason und Diapente. Und zwar aus folgendem Grunde: Auf dreierlei Art können wir den Ton einer Saite erhöhen, durch Verkürzung, durch Spannung und durch Unterstützung. Bei gleicher Spannung und Beschaffenheit bringen wir die Octave hervor durch Verkürzung auf die Hälfte, d. h. wir schlagen erst die ganze, dann die halbe Saite an. Bei gleicher Länge und Beschaffenheit erhalten wir durch Anspannung die Octave, aber es genügt hierzu nicht eine doppelte Kraft, sondern die vierfache; war sie zuerst mit einem Pfund gespannt, so brauchen wir deren vier, um die Octave zu erhalten. Endlich bei gleicher Länge und Spannung muss die Dicke auf einviertel reducirt werden, um die Octave zu erhalten. Was von der Octave gilt, d. h. wenn man ihre Form aus der Spannung oder aus der Dicke der Saite herleitet, wobei das Doppelte von dem sich ergiebt, was man aus der Länge erschliesst, das findet für alle andern Intervalle statt, denn wenn aus dem Längenverhältniss das anderthalbfache sich ergab, so muss man, wenn dasselbe durch veränderte Spannung oder durch eine andere Saitendicke erreicht werden soll, das Verhältniss $^9/_4$ anwenden; wenn z. B. die Saite mit vier Pfund gespannt war, muss sie nicht mit 6, sondern mit 9 Pfund belastet werden, desgleichen muss die Dicke auf $^4/_9$ reducirt werden, wenn man die Quinte erhalten will. Diesen exacten Versuchen gegenüber schien es mir ganz unbegründet, das Verhältniss 1 zu 2 für die Form der Octave anzunehmen, wie die scharfsinnigen Philosophen thun, statt 1 zu 4, desgleichen kann die Quinte eher dem Verhältniss 4 zu 9, als 2 zu 3 entsprechen. Da es nun ganz unmöglich ist, die Schwingungen einer Saite zu zählen, da sie zu zahlreich sind, so würde ich stets zweifelhaft sein, ob wirklich bei der Octave der höhere Ton in gleicher Zeit doppelt so viel Vibrationen vollführt, als der tiefere, wenn nicht bei jenem Becher die beharrlichen Wellen deutlich gezeigt hätten, wie beim plötzlichen Anklingen der Octave neue kleinere Wellen entstehen, die mit vollendeter Reinheit eine jede der ersten Wellen genau halbiren.

Salv. Es ist das ein schöner Versuch, bei dem man einzeln die vom Körper ausgehenden Erzitterungen unterscheiden kann, es sind das dieselben Stösse, die in der Luft sich ausbreiten und unser Trommelfell in Schwingung versetzen, und zuletzt in unserer Seele zum Ton werden. Aber die Erschütterung im Wasser dauert nur so lange, als das Glas mit dem Finger gestrichen wird, und selbst in dieser Zeit sind sie nicht beständig, sondern sie vergehen und entstehen. Wäre es nicht schön, wenn man die Schwingungen lange andauern lassen könnte, selbst Monate und Jahre lang, so dass man im Stande wäre sie zu messen und bequem zu zählen?

Sagr. Solch eine Erfindung würde ich allerdings sehr hoch schätzen.

Salv. Diese Erfindung machte ich zufällig, ich hatte nur zu beobachten und die Sache zu verwerthen, es war eine tiefere Speculation bei Gelegenheit einer recht schlichten Verrichtung. Ich schabte mit einem scharfen eisernen Meissel eine Messingplatte, um einige Flecke fortzuschaffen, und bei schnellem Hinübergleiten über die Platte hörte ich ein oder zwei Mal unter vielen Streichen ein Pfeifen, und zwar einen starken, hellen Ton, und wie ich auf die Platte sehe, erblicke ich eine Menge feiner paralleler Striche, in völlig gleichen Abständen. Bei wiederholtem Streichen bemerkte ich, dass nur dann, wenn ein Ton entstand, der Meissel jene Furchen hervorrief, geschah aber das Streichen ohne Pfeifen, so war nicht die geringste Spur von einer Zeichnung zu sehen. Dieses Spiel wiederholte ich nun, bald mit grösserer, bald mit kleinerer Geschwindigkeit, der Ton wurde bald höher, bald tiefer, beim höheren Tone waren die Striche gedrängter, und selbst dann, wenn das Gleiten gegen Ende des Striches rascher wurde, war auch der Pfeifton ein allmählich höher werdender, zugleich aber die Striche gegen Ende gedrängter, doch stets in vollendeter Zierlichkeit; bei den tönenden Streichzügen fühlte ich den Meissel in meiner Faust erdröhnen und die Hand durchzuckte ein Schauer. Der Vorgang beim Eisen ist genau derselbe, wie wenn wir mit der Flüsterstimme sprechen und dann den Ton laut erklingen lassen, denn senden wir den Athem aus ohne Tonbildung, so fühlen wir in der Kehle und im Munde keine Bewegung im Vergleich zum starken Zittern, das wir im Kehlkopf und im Schlunde empfinden bei lauter Stimme, besonders bei tiefen, starken Tönen. Manchesmal suchte ich auf dem Klavier die Tonhöhe jener Pfeiftöne auf; zwei Töne, die am meisten differirten, bildeten eine Quinte, und als ich nun die Striche und deren Entfernung ausmaass, so fand ich auf 45 Striche des einen Tones 30 Striche des anderen; das entspricht wirklich der Form, die man der Quinte zuschreibt. Ehe ich fortfahre, muss ich bemerken, dass von den drei Arten, Töne höher werden zu lassen, diejenige, die Ihr dem Querschnitt der Saite zuspracht, besser auf das Gewicht derselben zu beziehen wäre. Bei gleichem Material gilt stets dasselbe Verhältniss, so z. B. muss von zwei Darmsaiten die eine 4 mal dicker sein, um die Octave zu geben, aber auch bei Messingsaiten gilt dasselbe. Soll ich aber eine Octave herstellen aus einer Darm- und einer Metallsaite, so ist das Verhältniss nicht das vierfache für die Dicke, wohl aber kann das vierfache Gewicht genommen werden; so dass also die Metallsaite nicht den vierfachen Querschnitt der Darmsaite haben wird, wohl aber das vierfache Gewicht, und sie wird so viel mal dünner sein, als die Darmsaite der entsprechenden höheren Octave. Wenn nun ein Klavier mit Goldsaiten, ein anderes mit Messing bezogen wird, so werden bei gleicher Länge, Spannung und Dicke die Töne des Goldsaitenklavieres doppelt so tief sein und es wird die Stimmung ungefähr eine Quinte tiefer liegen. Hier sieht man, wie der Geschwindigkeit der Bewegung eher das Gewicht des Körpers, als die Dicke desselben widersteht, im Gegensatz zu dem, was man erwarten möchte; denn es scheint doch, als ob eigentlich die Geschwindigkeit von dem Widerstande des Mediums eher gehemmt werden müsste, wenn letzteres einem dicken und leichten Körper auszuweichen hätte, als einem dünnen, schweren; und doch tritt genau das Gegentheil ein. Um aber auf das Erstere zurückzukommen, sage ich, dass das primäre, unmittelbare Verhältniss der akustischen Intervalle weder von der Länge der Saiten, noch von ihrer Spannung, noch von ihrem Querschnitt bedingt ist, sondern von der

Anzahl von Schwingungen und Lufterschütterungen, die unser Trommelfell treffen und letzteres in demselben Tempo erzittern lassen. Halten wir dieses fest, so können wir mit Sicherheit angeben, weshalb uns einige Zusammenklänge angenehm, andere weniger, wieder andere sehr missfällig berühren, d. h. den Grund für die mehr oder minder vollkommene Consonanz und für die Dissonanz. Das Widrige in letzteren entsteht, wie ich meine, aus den nicht zusammentreffenden Erschütterungen, die zwei verschiedene Töne erzeugen, die ohne bestimmtes Verhältniss das Trommelfell afficiren, und unerträglich werden die Dissonanzen sein, wenn die Schwingungsdauern nicht in Zahlen darstellbar werden, wie z. B. wenn von zwei gleichgestimmten Saiten die eine in solchem Theile der ganzen Saite schwingt, wie die Seite eines Quadrates zur Diagonale sich verhält: eine Dissonanz ähnlich dem Tritonus oder der Hälfte einer Quinte. Consonant und wohlklingend werden diejenigen Intervalle sein, deren Töne in einer gewissen Ordnung das Trommelfell erschüttern; wozu vor Allem gehört, dass die Schwingungszahlen in einem rationalen Verhältnisse stehen, damit die Knorpel des Trommelfelles nicht in steter Qual sich befinden, in verschiedenen Richtungen auszuweichen und den auseinandergehenden Schlägen zu gehorchen. Deshalb ist die erste und vollkommenste Consonanz die Octave, weil auf jede Erschütterung des tieferen Tones zwei des höheren kommen; so dass beide abwechselnd zusammenfallen und auseinandergehen; von allen Schwingungen fällt die eine Hälfte zusammen, während beim Einklang alle Erschütterungen zusammenfallen und wie von einer einzigen Saite herstammend sich verhalten und von keiner Consonanz mehr gesprochen werden kann. Die Quinte klingt auch sehr gut, weil auf je 2 Schwingungen der einen Saite die höhere 3 giebt, woraus folgt, dass von den Schwingungen des höheren Tones ein Drittel mit denen des anderen zusammenfällt; also zwei isolirte sind eingeschaltet; und bei der Quarte fallen je drei aus, und je die vierte fällt zusammen. Bei der Secunde trifft nur eine von 9 Schwingungen eine Schwingung des tieferen Tones, alle anderen weichen ab, daher empfindet man bereits eine Dissonanz.

Simpl. Ich bitte noch um einige nähere Erläuterung.

Salv. Es sei AB die Länge der Welle eines tieferen Tones: und CD die des höheren im Verhältniss der Octave; man halbire AB in E. Geht nun die Bewegung von A und von C aus, so schreitet dieselbe gleichzeitig bis E und D fort. In E findet keine Erschütterung statt, wohl aber in D. Kehrt die Schwingung von D nach C zurück, so ist jene von E nach B gelangt, und beide Stösse bei B und C wirken einheitlich aufs Trommelfell; ähnlich ist es mit den folgenden Schwingungen, so dass abwechselnd die Stösse gleichzeitig stattfinden und dazwischen nicht: die Stösse an den Enden sind stets begleitet von solchen bei C, D; denn wenn A und C gleichzeitig anschlagen, und A nach B, C nach D fortschreitet, so kehrt letzteres nach C zurück, so dass A und C gleichzeitig Stösse ertheilen. Wenn aber AB, CD die Quinte geben, mit dem Verhältniss 2 : 3, so theile man AB in drei gleiche Theile, in E und O. Fangen nun die Schwingungen gleichzeitig in C und A an, so wird offenbar, wenn in D ein Stoss erfolgt, die Bewegung von A aus bis O gelangt sein, das Trommelfell erhält mithin nur die Erschütterung von D aus: bei der Umkehr von D nach C geht die Schwingung dort von O bis B und zurück von B bis O, es entstand in B eine Erschütterung, die isolirt blieb, denn da wir an den Enden A, C gleichzeitig den Anfang annahmen, geschah die Erschütterung bei D isolirt um so viel später, als der Uebergang bis CD oder AO erfordert. Aber die Erregung bei B findet nunmehr bloss um die Hälfte dieser Zeit später statt, da OB gleich der Hälfte von AO; zuletzt läuft die Bewegung von O nach A und gleichzeitig von C nach D, so dass in A und D die Erschütterungen zusammenfallen. Es folgen andere ähnliche Perioden, d. h. solche mit Einschaltung zweier Stösse des höheren Tones, isolirt, und ein ebenfalls isolirter des tieferen Tones zwischen jenen beiden. Theilen wir die Zeit in kleine gleiche Theile, und nehmen wir an, dass in den ersten beiden Zeittheilchen von A, C aus eine Fortpflanzung nach O und D statthat, und in D ein Stoss erfolgt: dann kehrt im dritten und vierten Zeitmoment die Bewegung von D nach C zurück, giebt in C einen Stoss, dort dagegen von O nach B, wo ein Stoss erfolgt, und zurück von B nach O, endlich im fünften und sechsten Zeittheil von O und C nach A und D, an beiden Punkten Stösse erzeugend; so haben wir auf dem Trommelfell die Stösse in solch einer Reihenfolge, dass, wenn anfänglich dieselben zusammentreffen, nach zwei Zeittheilchen ein isolirter Stoss eintritt, nach dem dritten wieder ein isolirter Stoss, im vierten wiederum, und

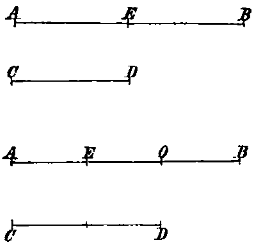

Fig. 13.

noch zwei Zeittheilchen später zwei gemeinsame Stösse: jetzt ist die Periode beendet, und das Spiel beginnt von Neuem.

Sagr. Ich kann nicht mehr schweigen, ich muss meinen Beifall äussern zu einer so trefflichen Begründung von Erscheinungen, die mich so lange in Finsterniss und Blindheit gefangen hielten. Jetzt verstehe ich, warum der Einklang gar nicht von einem einzelnen Tone abweicht: ich begreife, warum die Octave die beste Consonanz ist, und dabei so ähnlich dem Einklange, dass sie wie ein solcher erscheint, denn die Erschütterungen fallen stets zusammen, die des tieferen Tones werden sämmtlich von solchen des höheren unterstützt, und von letzteren tritt je eine dazwischen in stets gleichen Zeiten und gewissermaassen ohne Störung, daher diese Consonanz äusserst milde erscheint und ohne viel Feuer. Aber die Quinte mit ihren Contratempis, mit ihrer Einschaltung zweier isolirter Stösse des höheren Tones zwischen zwei vereinigte Erschütterungen, während ein isolirter Stoss des tieferen jene beiden unterbricht, wobei alle drei isolirte Stösse nach gleichen Zeitintervallen erfolgen, und zwar je nach der Hälfte des Betrages, der zwischen jedem Paare und dem isolirten Stosse des hohen Tones verstreicht, das Alles erzeugt einen solchen Reiz auf das Trommelfell, dass Weichheit und Schärfe innig verschmolzen erscheinen und ein Kuss und zugleich ein sanfter Stich empfunden wird.

Salv. Da ich Euren Beifall über diese Kleinigkeiten in so hohem Grade ernte, muss ich Euch zeigen, wie auch das Auge, ähnlich wie das Ohr, sich an demselben Spiele erfreut. Hänget Bleikugeln oder andere schwere Körper an drei Fäden verschiedener Länge an, so zwar, dass, wenn der längste zwei Schwingungen vollführt, der kürzeste vier, der mittlere drei zu Stande bringt, was geschehen wird, wenn der erste 16 Maass lang ist, der mittlere 9 und der kleinste 4; alle zugleich aus dem Loth entfernt und losgelassen, zeigen sie ein wirres Durcheinander der Fäden, aber bei jeder vierten Schwingung des langen Pendels kommen alle drei zugleich an, und beginnen alsdann eine neue Periode: diese Vermischung entspricht der Empfindung, welche drei Saiten als Octave und Quinte dem Gehörsinn vermitteln. Wenn wir ähnlich die Länge anderer Fäden bestimmen, entsprechend gewissen consonanten Tonintervallen, so wird ein solch neues Gewirr entstehen, so jedoch, dass nach einer gewissen Anzahl von Schwingungen alle in demselben Momente ankommen und wieder ausgehen, um eine neue Periode anzuheben. Sind aber die Schwingungsdauern der Fäden incommensurabel, so dass sie nie wieder in demselben Momente zurückkommen, oder nur wenn andernfalls sie nach langer Zeit und nach vielen Schwingungen eine neue Periode beginnen, dann verwirrt sich der Anblick gänzlich, während entsprechend das Ohr mit Pein die Lufterschütterungen empfängt, die ohne Ordnung und Regel das Trommelfell treffen.

Aber wohin, meine Herren, haben wir uns durch die mannigfaltigsten Probleme hindurch unversehens verirrt? Die Nacht ist herbeigekommen; von dem Stoff, den wir uns vorgesetzt, ist nur sehr wenig oder nichts erledigt; wir sind dermaassen von unserer Bahn abgewichen, dass ich kaum des Ausgangspunktes und der ersten Betrachtungen mich entsinne, die wir als Hypothese und Basis den späteren Erläuterungen zu Grunde legten.

Sagr. So wollen wir denn heute schliessen, und unseren Geist der besänftigenden Nachtruhe sich erfreuen lassen, um morgen, wenn es Ihnen, geehrter Herr, gefällig sein sollte, zu den Hauptfragen zurückzukehren.

Salv. Ich werde nicht ermangeln, zur selben Stunde, wie heute hier zu erscheinen, um Ihnen, meine Herren, dienstbar zu sein und Ihnen Vergnügen zu bereiten.

Ende des ersten Tages.

Zweiter Tag.

Sagr. Während wir, Herr *Simplicio* und ich, Euch erwarteten, versuchten wir unsere letzten Discussionen uns ins Gedächtniss zurückzurufen und namentlich jene Sätze, die uns dazu dienen sollten, den Widerstand zu erklären, den alle festen Körper gegen ein Zerbrechen derselben ausüben; der Widerstand wurde einem Bindemittel zugeschrieben, welches die Theile zusammenhält, so dass sie nur einer beträchtlichen Kraft weichen und sich von einander trennen. Wir hatten uns gefragt, was das Wesen solcher Cohärenz sein könne, die in manchen Körpern sehr gross ist, und wir versuchten sie hauptsächlich auf das Vacuum zurückzuführen; hierdurch entstanden die vielen Abschweifungen, die uns den übrigen Tag beschäftigten und weit ablenkten von der ursprünglich gestellten Aufgabe, die Bruchfestigkeit aufzuklären.

Salv. Kehren wir denn zum Ausgangspunkte zurück: Worin nun auch die Bruchfestigkeit bestehen mag, jedenfalls ist sie vorhanden und zwar sehr beträchtlich als Widerstand gegen Zug, geringer bei einer transversalen Verbiegung; ein Stahlstab z. B. könnte 1000 Pfund tragen, während 50 Pfund denselben zerbrechen, wenn er horizontal senkrecht in einer Wand befestigt ist. Von dieser letztern Art Widerstand wollen wir sprechen und feststellen, in welchen Beziehungen sie steht in ähnlichen und unähnlichen Prismen und Cylindern, die nach Länge und Dicke variiren, bei gleichem Stoff. Als bekannt setze ich den Satz vom Hebel voraus, demgemäss die Kraft zur Last sich umgekehrt verhält, wie die Entfernungen der Angriffspunkte vom Unterstützungspunkte.

Simpl. Ein Satz, den *Aristoteles* zuerst vor allen Anderen bewiesen hat.

Salv. Er hat ihn zuerst ausgesprochen, den Beweis aber gab *Archimedes* auf Grund eines Lehrsatzes über das Gleichgewicht, wobei er ausser dem Hebelgesetz noch eine grosse Menge anderer Verhältnisse an mechanischen Vorrichtungen darlegte.

Sagr. Da das Hebelgesetz die feste Grundlage für das noch zu Beweisende ist, so wäre es doch schön, wenn Ihr uns eine tadellose vollkommene Herleitung geben wolltet.

Salv. Es wird gut sein, einen etwas anderen Weg als *Archimedes* einzuschlagen, als Einleitung in alles Folgende, und nur eines vorauszusetzen, dass nämlich gleiche Gewichte an gleich langen Armen im Gleichgewicht seien (was auch *Archimedes* annimmt), woraus gefolgert werden kann, dass ungleiche Gewichte im Gleichgewicht sich befinden, wenn sie sich umgekehrt wie die Arme verhalten; zugleich erkennt man, dass kein wesentlicher Unterschied besteht zwischen diesem Fall und jenem gleicher Gewichte in gleichen Entfernungen. Denken wir uns ein Prisma oder einen Cylinder AB, der an den Enden bei H, I aufgehängt sei an zwei Fäden AH, IB (Fig. 14). Wird das Ganze bei C aufgehängt, mitten zwischen H, I, so findet offenbar Gleichgewicht statt nach unserer Voraussetzung. Es sei nun das Prisma bei D in ungleiche Theile getheilt, und zwar sei DA grösser, DB kleiner, und damit die Theile in unveränderter Lage beharren in Bezug auf HI, bringen wir einen Faden ED an, der bei E befestigt ist und die Theile der Prismen AD, DB hält; da keine Veränderung in Bezug auf HI eingetreten ist, ist das Gleichgewicht nicht gestört. Aber dasselbe findet statt, wenn statt der beiden Fäden AH, DE ein einziger Faden in der Mitte GL zwischen beiden angebracht wird, und ebenso auf der anderen Seite in FM mitten zwischen ED und IB. Nehmen wir nun HA, ED, IB fort und belassen blos GL, FM, so beharrt das Gleichgewicht, während C der Unterstützungspunkt geblieben ist. Jetzt aber haben wir zwei Körper AD, DB, hängend an G, F eines Wagebalkens GF, mit dem Unterstützungspunkt C. Die Distanzen der Aufhängepunkte sind CG, CF. Wir müssen nun beweisen, dass die genannten Strecken sich umgekehrt wie die Gewichte verhalten, d. h. dass CG zu CF wie Prisma DB zum Prisma DA: es ist nun GE gleich $^1/_2\,EH$ und EF gleich $^1/_2\,EI$, folglich ist GF gleich $^1/_2\,HI$, folglich gleich CI; zieht man von beiden gleichen Strecken den gemeinsamen Theil CF ab, so bleibt der Rest GC gleich dem Rest FI oder gleich FE; fügt man beiderseits CE hinzu, so kommt GE gleich CF; folglich wie GE zu EF, so verhält sich $FC : CG$; wie ferner GE zu EF, so auch

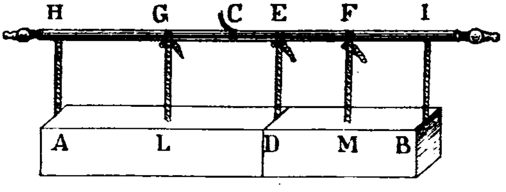

Fig. 14.

die doppelten Strecken zu den doppelten, d. h. wie HE zu EI und folglich wie Prisma AD zu Prisma DB. Folglich weiter wie GC zu CF, so das Gewicht BD zum Gewicht DA, was zu beweisen war. Ich hoffe, Ihr findet keine Schwierigkeit in der Behauptung, die beiden Prismen AD, DB seien im Gleichgewicht in Bezug auf C, da die Hälfte des ganzen Cylinders AB rechts, die andere links liegt, in welchem Sinne sie zwei gleiche äquidistante Gewichte vorstellen. Verwandeln wir nun die beiden Prismen AD, DB in zwei Würfel oder in zwei Kugeln oder in irgend zwei andere Formen, so beharrt das Gleichgewicht in Bezug auf C, denn zweifelsohne ändert die Gestalt nicht das Gewicht, wenn gleichviel Materie beibehalten wird. Hieraus können wir allgemein schliessen, dass stets zwei Gewichte bei wechselseitig entsprechender Distanz im Gleichgewichte stehen. Nachdem wir dieses klar erkannt haben, müssen wir überlegen, wie solche Kräfte, Widerstände, Momente und Gestalten abstract gedacht werden können, losgetrennt von aller Materie, und andererseits concret und bedingt durch Materie; Eigenschaften, die den immateriell betrachteten Gestalten zukommen, werden eine gewisse Aenderung erleiden durch Hinzunahme von Materie und Schwere. Wenn wir z. B. einen Hebel betrachten AB (Fig. 15) mit dem Unterstützungspunkte C, und zwar so disponirt, dass der Felsblock D gehoben werden könne, so ist es klar, dass in B eine Kraft denkbar wäre, die dem Widerstand der Last D Gleichgewicht hielte, wenn die Kraft zur Last sich verhielte, wie die Strecke AC zu CB, und das ist richtig, wenn man von anderen Momenten, als der Kraft in B absieht, mit anderen Worten, wenn man den Hebel AB für immateriell ansieht. Berücksichtigen wir aber das Gewicht des Hebelarmes selbst, sei er nun aus Holz oder Eisen gefertigt, so wird das zu B hinzugefügte Gewicht die Proportion verändern. Zukünftig

Fig. 15.

wollen wir diese zwei Arten der Betrachtung sondern; wir sprechen von einem absoluten Verhalten, wenn das Instrument abstract behandelt wird, ohne Rücksicht auf das Gewicht der Theile des Instrumentes: fügen wir alsdann letzten Einfluss hinzu, so wollen wir die Bezeichnung »zusammengesetzte« Momente oder Kräfte gebrauchen.

Sagr. Meiner ursprünglichen Absicht entgegen muss ich wieder abschweifen, allein ich könnte nicht aufmerksam folgen, wenn mir ein Zweifel bliebe. Ich verstehe nicht, mit welchem Recht Ihr die Kraft B mit der gesammten Last D in Beziehung setzt, da ein Theil der letzteren, und zwar vielleicht der grössere, sich auf die Erde stützt; so dass ....

Salv. Versteht sich. Ihr habt völlig recht; allein ich sprach nicht von der ganzen Last des Steines, sondern von dem Momente, welches dieselbe auf A ausübt, und welches stets kleiner ist als das Gewicht des ganzen Blockes; ja es variirt je nach der Form des Steines und je nach seiner Lage.

Sagr. Schön, aber noch eines; ich möchte nun wissen, ob es sich bestimmen liesse, wie gross das wirksame, und wie gross das von der Unterlage getragene Moment des Steines wäre.

Salv. Mit wenig Worten kann das geschehen; es sei A (Fig. 16) der Schwerpunkt der Last, die in B sich auf die Unterlage stützt, und andererseits vom Hebebaum CG gehalten wird, durch Anbringung einer Unterstützung bei N, und einer Kraft in G; wir construiren die zum Horizonte senkrechten Geraden AO, CF. Ich behaupte das Moment der ganzen Last verhalte sich zum Moment der Kraft in G wie das zusammengesetzte Verhältniss der Strecken GN zu NC und der Strecken FB zu BO. Wie FB zu BO, so mache man NC zu X; da das ganze Gewicht auf B und C ruht, so verhalten sich die Kräfte bei B und C wie die Strecken FO zu OB, und vereinigen wir die beiden

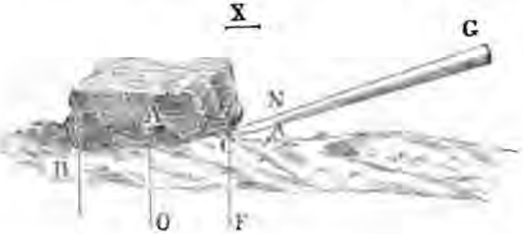

Fig. 16.

Potenzen bei B und C, d. h. nehmen wir das Gesammtgewicht A, so verhält sich dieses zur Potenz in C, wie FB zu BO, oder wie NC zu X; aber das Moment der Kraft in C verhält sich zu dem in G wie in GN zu NC; folglich auch umgekehrt das Totalgewicht A zum Moment der Kraft in G, wie GN zu X; aber GN zu X ist zusammengesetzt aus den Verhältnissen GN zu NC und NC zu X, oder FB zu BO, folglich verhält sich die Gesammtlast bei A zur äquilibrirenden Potenz in G wie das zusammengesetzte Verhältniss von GN zu NC und von FB zu BO, was zu beweisen war. Kehren wir nun zu unserer Aufgabe zurück. Es wird uns jetzt ein Leichtes sein zu verstehen, weshalb ein Cylinder aus Glas, Stahl, Holz oder aus einem anderen zerbrechbaren Material, wenn man ihn herabhängen lässt, ein sehr grosses Gewicht zu tragen vermag, während derselbe in transversaler Lage von einem um so kleineren Gewichte zerbrochen werden kann, je grösser seine Länge im Vergleich zur Dicke.

Denn sei das Prisma $ABCD$ (Fig. 17) mit der Seite AB in einer Mauer fest angebracht, während am anderen Ende das Gewicht E wirkt (vorausgesetzt einen senkrechten Stand der Mauer und das Prisma rechtwinklig zu derselben); offenbar wird das Prisma bei B zerbrechen, wo die Mauergrenze als Stützpunkt dient, und BC wird der Hebelarm der Kraft sein; die Dicke BA des Prismas bildet den anderen Hebelarm, an welchem der Widerstand wirkt, der die Theile von BD trennen will von den Theilen, die in der Mauer stecken: und dem Erläuterten gemäss verhält sich das Moment der Kraft C zu den Widerständen, die in der Dicke des Prismas enthalten sind, wie die Länge CB zur Hälfte von AB;[11]) und die absolute Zugfestigkeit des Körpers BD (die man findet bei gerader

Fig. 17.

Streckung in der Richtung BC, wobei die ziehende Kraft der widerstehenden gleich ist) verhält sich zur relativen oder Bruchfestigkeit (mit Hülfe des Hebels BC) wie die Länge BC zur Hälfte von AB, welch letztere beim Cylinder gleich dem Radius der Basis wäre. Und das ist unser erster Satz. Dasselbe gilt mit Rücksicht auf das Eigengewicht des Körpers BD, das wir bisher vernachlässigt haben. Combiniren wir dasselbe mit dem Gewichte E, so müssen wir nur die Hälfte des Gewichtes von BD zu E hinzufügen, so dass, wenn z. B. BD zwei Pfund wiegt und E 10 Pfund, man 11 Pfund als wirksam erkennen muss.

Simpl. Und warum nicht 12 Pfund?

Salv. Das Gewicht E, Herr *Simplicio*, wirkt am Ende C entsprechend einem Arme BC mit einem Moment von 10 Pfund;

wäre der Körper BD in C angebracht, so hätten wir ein volles Moment von 2 Pfund, allein der Körper ist über die ganze Strecke gleichförmig vertheilt, daher die näher zu B liegenden Theile weniger wirken; gleicht man alles aus, so wirkt das Prisma wie wenn es im Schwerpunkt concentrirt wäre, also wie das halbe Gewicht am Ende C; denn es hat hier ein doppeltes Moment; also ist das halbe Gewicht von BD der Kraft E hinzuzufügen.

Simpl. Ich bin vollständig überzeugt, und zudem, scheint mir, haben beide Gewichte BD und E, so disponirt, dasselbe Moment, wie wenn in der Mitte von BC der ganze Körper BD und das Doppelte von E angebracht würde.

Salv. Ganz richtig, und das ist bemerkenswerth. Jetzt können wir sofort angeben, wie und in welchem Verhältnisse eine Ruthe oder besser ein Prisma dem Bruch widerstehen könne,

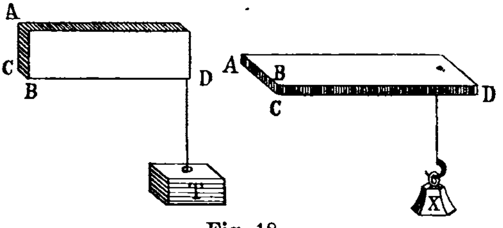

Fig. 18.

wenn es mehr Breite als Dicke hat, je nachdem es in dieser oder jener Richtung gebogen wird. Nehmen wir z. B. ein Lineal AD (Fig. 18), dessen Breite AC, und dessen Dicke CB weit geringer sei; auf schmaler Basis wird es einem grossen Gewichte T widerstehen, flach gehalten wird es einem geringeren Gewichte X kaum widerstehen; dort findet eine Unterstützung längs der Linie BC statt, hier längs CA, während in beiden Fällen die Länge BD ein und dieselbe bleibt. Dort aber ist der Abstand des Widerstandes von der Unterstützung gleich der Hälfte von CA, und daher weit grösser als im andern Falle, wo nur die Hälfte von BC in Betracht kommt: mithin muss T grösser sein als X in dem Verhältniss der Hälften von CA und CB, denn dieses sind die Hebelarme des Widerstandes, der in beiden Fällen denselben Betrag hat, nämlich den aller Fasern der Basis AB. Das Linial widersteht also in steiler Lage eher, als wenn es flach liegt, und zwar genau im Verhältniss der Breite zur Dicke.

Wollen wir nun untersuchen, in welchem Grade das Moment

7*

des Eigengewichtes im Verhältniss zur Festigkeit in einem Prisma oder Cylinder zunimmt, wenn letzterer horizontal steht und allmählich verlängert wird: wir finden, dass dieses Moment proportional dem Quadrat der Länge wächst. Es sei AD (Fig. 19) das Prisma oder der Cylinder, bei A in der Mauer angebracht in horizontaler Lage; es werde der Körper verlängert bis E durch Hinzufügung des Stückes BE. Offenbar ist der Hebelarm auch um BC gewachsen, daher die brechende Kraft im Verhältniss CA zu BA stärker wirkt, ausserdem ist das Gewicht im Verhältniss von $AE : AB$ gewachsen, welches dasselbe ist wie AC zu AB, folglich werden beide Wirkungen der Verlängerung sich geltend machen, die Vermehrung des Gewichtes und

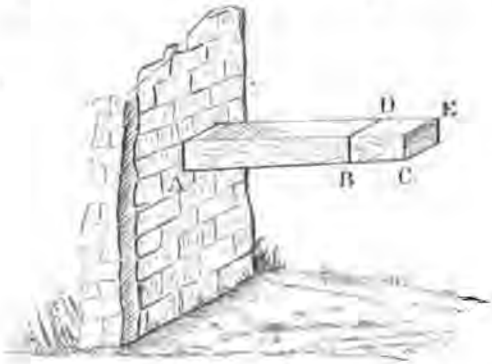

Fig. 19.

die Verlängerung des Armes, folglich wächst das wirksame Moment der Kraft im quadratischen Verhältniss zur Länge. Bei ungleich langen, sonst gleichen Cylindern wirken also die Kräfte proportional dem Quadrat ihrer Längen.

Zweitens wollen wir zeigen, wie die Bruchfestigkeit bei Prismen oder Cylindern gleicher Länge aber verschiedener Dicke sich verhält. Ich behaupte, »dass in gleich langen Prismen oder Cylindern bei ungleicher Dicke die Bruchfestigkeit im cubischen Verhältniss zur Dicke steht«. Die beiden Cylinder seien A und B (Fig. 20), deren Längen DG, FH, einander gleich seien, bei ungleicher Basis, deren Kreisdurchmesser CD, EF. Ich behaupte, der Widerstand von B verhält sich zu dem von A, wie die dritte Potenz des Verhältnisses von FE zu DC. Der absolute Widerstand wächst nämlich in dem Maasse als die

Basis grösser ist, denn so viel mehr Fasern halten die Körpertheilchen zusammen. Nun findet ausserdem eine Hebelwirkung statt, die Kräfte wirken an Armen DG, FH, die Widerstände an Halbmessern von CD, EF, wenn man den Widerstand aller Fasern auf die Mittelpunkte concentrirt, daher der Widerstand im Centrum von EF soviel stärker wirkt im Vergleich zum Widerstande im Centrum von CD, als der Halbmesser selbst grösser ist; aus beiden Gründen wächst das Moment der Widerstände mit den Durchmessern, und da die Widerstände selbst schon proportional dem Quadrate der Durchmesser wachsen, so steht das Moment im cubischen Verhältniss zu denselben, denn Cuben stehen in eben diesem Verhältniss zu ihren Seiten.

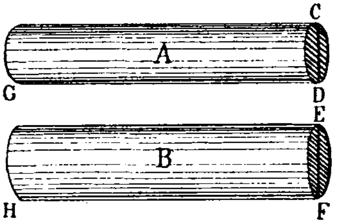

Fig. 20.

Weiter folgt hieraus, dass die Bruchfestigkeit von gleich langen Prismen oder Cylindern in der anderthalbfachen Potenz zu den Gewichten sich verhalten, denn die Gewichte verhalten sich wie die Quadrate der Seiten oder Durchmesser, die Festigkeiten wie die Cuben der Seiten: mithin verhalten sich die Festigkeiten wie die anderthalbfache Potenz der Massen; und folglich auch der Gewichte.

Simpl. Ehe wir weiter gehen, benehmen Sie uns ein Bedenken, sofern bis jetzt von einer anderen Art Widerstand nicht die Rede war, ein Widerstand, der mit Verlängerung kleiner wird, sowohl beim Zuge als beim Biegen, denn ein langer Strick ist weniger geeignet eine Last zu tragen als ein kurzer: und ich glaube, dass ein Holz- oder Eisenstab mehr aushalten kann, wenn er kurz, als wenn er lang ist; dieses Alles gilt nur, wenn von Streckung die Rede ist; und zudem kommt beim längeren Stabe noch das Eigengewicht hinzu.

Salv. Ich glaube, Herr *Simplicio*, dass Ihr hier denselben Irrthum begeht, wie viele Andere, wenn Ihr etwa meint, dass ein 40 Ellen langer Strick weniger tragen kann als ein ebensolcher von 2 Ellen Länge.

Simpl. Ich glaube doch, und halte es für sehr wahrscheinlich.

Salv. Ich halte es für falsch und für unmöglich; ich glaube Euch überzeugen zu können. Es sei AB (Fig. 21) oben bei A befestigt, unten das Gewicht C angebracht, so dass der Strick gerade zerreisst. Wo glaubt Ihr, Herr *Simplicio*, dass der Strick zerreissen wird?

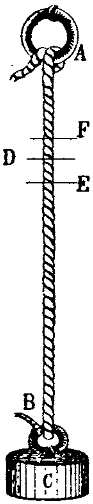

Fig. 21.

Simpl. Angenommen, es sei in D.

Salv. Ich frage, warum in D?

Simpl. Offenbar, weil an dieser Stelle der Strick die 100 Pfund nicht tragen konnte, d. h. die Strecke DB mitsammt der Last.

Salv. Nun, dann wird der Strick stets an dieser Stelle D reissen, sobald er mit 100 Pfund gespannt wird.

Simpl. Ich denke ja.

Salv. Aber sagt, wenn man nun dasselbe Gewicht nicht am Ende B, sondern dicht unter D, etwa in E, anbrächte, oder wenn der Strick nicht in A, sondern tiefer über D, etwa in F, befestigt würde, würde der Punkt D nicht demselben Zuge ausgesetzt sein?

Simpl. Allerdings, wenn man nur das Stück EB der Last C hinzugefügt hat.

Salv. Gut; wenn nun der Strick in D mit 100 Pfund gezerrt wird, so wird er reissen; FE aber ist ein kleines Stück im Vergleich mit AB, wie wollt Ihr noch den langen Strick für schwächer halten, als den kurzen? Lasst also Euren Irrthum fahren, den Ihr mit vielen Anderen, darunter recht Intelligenten, getheilt habt. Und weiter: Da die Prismen oder Cylinder im Verhältniss des Quadrates ihrer Längen ihr Moment anwachsen lassen, (bei gleicher Dicke) und da bei gleich langen, aber ungleich dicken Körpern die Widerstände mit dem Cubus der Dicken wachsen, so können wir das Verhalten bei ungleicher Länge und Dicke zusammenfassen, und ich behaupte: »Prismen und Cylinder ungleicher Länge und Dicke haben eine Bruchfestigkeit proportional den Cuben ihrer Dicken, und umgekehrt proportional ihren Längen.«[12])

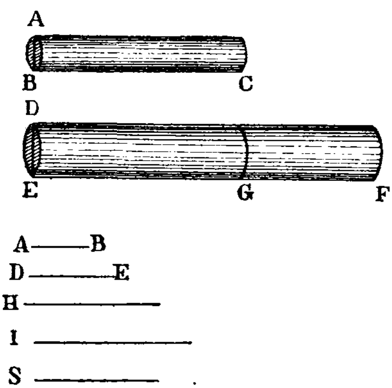

Fig. 22.

Es seien ABC, DEF die beiden Cylinder (Fig. 22). Ich behaupte, die Festigkeit des Cylinders AC verhält sich zur Festigkeit von DF, wie das zusammengesetzte Verhältniss aus den Cuben von AB und DE, und den Längen EF und BC. Es sei $EG = BC$, und die dritte Proportionale zu AB, DE sei H

$$\left[H = \frac{DE^2}{AB}\right]$$

die vierte Proportionale sei J

$$\left[\frac{J}{H} = \frac{DE}{AB}; \quad J = \frac{DE^3}{AB^2}\right]$$

und wie EF zu BC, so verhalte sich J zu S.

$$\left[\frac{EF}{BC} = \frac{J}{S}\right].$$

Da nun die Festigkeit von AC zu der von DG sich verhält wie der Cubus von AB zum Cubus von DE, oder wie die Linie AB zur Linie J

$$\left[\frac{\text{Fest. } AC}{\text{Fest. } DG} = \frac{AB^3}{DE^3} = \frac{AB}{J}\right]$$

und die Festigkeit von GD zu der Festigkeit von DF wie die Linie FE zu EG, das heisst wie J zu S

$$\left[\frac{\text{Fest. } DG}{\text{Fest. } DF} = \frac{FE}{EG} = \frac{J}{S}\right]$$

so verhält sich die Festigkeit von AC zu der von DF, wie AB zu S, welches gleich AB zu J mal J zu S

$$\left[\frac{\text{Fest. } AC}{\text{Fest. } DF} = \frac{AB}{S} = \frac{AB}{J} \cdot \frac{J}{S}\right]$$

folglich verhält sich die Festigkeit von AC zu der Festigkeit von DF wie AB zu J, d. h. wie der Cubus von AB zum Cubus von DE mal J zu S, oder EF zu BC, was zu beweisen war:

$$\left[\frac{\text{Fest. } AC}{\text{Fest. } DF} = \frac{AB}{J} = \frac{AB^3}{DE^3} \cdot \frac{J}{S} = \frac{AB^3}{DE^3} \cdot \frac{EF}{BC}\right].$$

Endlich betrachten wir noch den Fall, wo die Prismen oder Cylinder einander ähnlich sind:

»Bei ähnlichen Prismen und Cylindern haben die zusammengesetzten Momente, wie sie durch Gewicht und Länge bedingt sind, ein Verhältniss gleich der anderthalbten Potenz der Zugfestigkeiten ihrer Grundflächen.«

Es seien *AB*, *CD* (Fig. 23) die beiden ähnlichen Cylinder. Ich behaupte das Moment von *AB*, das den Widerstand der Basis *B* überwindet, verhält sich zum Moment von *CD*, welches dem Widerstande der Basis *D* entgegenwirkt, wie die anderthalbte Potenz von dem Verhältniss der Zugfestigkeiten der Grundflächen *B* und *D*; denn die erstgenannten Momente der Körper *AB*, *CD* und der Widerstände ihrer Flächen werden gebildet aus ihren Gewichten einerseits und den Widerständen, die an den Hebeln wirken; die Hebelarme von *AB* haben gleiches Verhältniss wie die von *CD*, weil die Strecke *AB* zum Halbmesser bei *A* in demselben Verhältnisse steht, wie die Länge *CD* zum Halbmesser bei *C* (wegen der Aehnlichkeit der Figuren); folglich verhält sich das Totalmoment des Cylinders *AB* zum Totalmoment von *CD*, wie das Gewicht *AB* zum Gewicht *CD* oder wie die Masse *AB* zur Masse *CD*; diese aber verhalten sich wie die Cuben der Basisdurchmesser von *A* und *C*, während die Zugfestigkeiten der Grundflächen diesen letzteren oder dem Quadrate der Durchmesser proportional sind: folglich verhalten sich die Momente der Cylinder wie die drittehalbte Potenz der Zugfestigkeiten ihrer Grundflächen.[13])

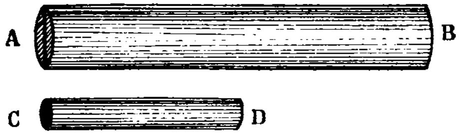

Fig. 23.

Simpl. Dieser Satz ist mir völlig neu und ich hätte ihn nicht erwartet, denn ich hätte bei völliger Aehnlichkeit der Figuren geglaubt, dass auch das Verhältniss der Momente zu den Zugwiderständen dasselbe bleiben müsse.

Sagr. Indess war es doch gerade dieser Satz, von dem wir ausgingen, und den ich als völlig dunkel bezeichnete.

Salv. Was Herr *Simplicio* eben bemerkte, das habe ich selbst vor einiger Zeit erlebt, insofern ich die Zugwiderstände ähnlicher Cylinder für ähnlich hielt, bis eine gelegentliche Beobachtung mich vermuthen liess, dass die Festigkeit ähnlicher Körper nicht gleichen Schritt mit der Gestalt einhalte, sondern dass grössere Körper heftigen Angriffen weniger gut widerstehen können, wie auch grosse Menschen beim Fall sich mehr beschädigen, als kleine Kinder und wie beim Fall aus grosser Höhe ein Balken in Stücke zerbrechen kann, während eine kleine

Latte oder ein kleiner Cylinder aus Marmor unversehrt bleibt. Solch eine Erscheinung war es, die mich zur Untersuchung der vorliegenden Fragen trieb: es handelt sich um eine wirklich merkwürdige Erscheinung, sofern unter den unendlich vielen, einander ähnlichen Figuren keine zwei angetroffen werden, bei denen die Momente und Zugwiderstände in ein und demselben Verhältnisse stehen.

Simpl. Dieses erinnert mich an eine gewisse Stelle bei *Aristoteles*, wo er bei den mechanischen Problemen darüber nachdenkt, woher es komme, dass Holzstäbe, je länger sie genommen werden, um so schwächer und leichter verbiegbar erscheinen, obwohl die kurzen dünner, die langen dicker sind, und wenn ich mich recht entsinne, findet er ein einfaches directes Verhältniss.

Salv. Das ist ganz richtig; und weil die dort gegebene Lösung keineswegs alle Zweifel benahm, so hat Herr *Guevara*, der durch seine hochgelehrten Commentare jenes Werk sehr bereichert und erhellt hat, sich über andere Fragen ausgesprochen, um weitere Schwierigkeiten fortzuräumen; doch blieb er in dem einen Punkte im Irrthum, ob nämlich, wenn man Länge und Dicke in gleichem Verhältniss vermehre, auch Festigkeit und Widerstandskraft gegen das Zerbrechen und Zerbiegen unverändert bleiben. Ich habe nach langem Nachdenken noch Einiges gefunden, das ich Euch mittheilen will. Zunächst werde ich folgendes beweisen:

? Biancani

»Von schweren Prismen oder Cylindern ähnlicher Gestalt giebt es nur einen einzigen, der bei Belastung durch das eigene Gewicht sich an der Grenze zwischen Zerbrechen und Heilbleiben befindet, so dass jeder grössere Körper, unfähig sein eigenes Gewicht zu tragen, zerbrechen, und jeder kleinere widerstehen wird.«

Es sei *AB* das schwere Prisma (Fig. 24) von der hinreichenden Länge, um, bei der geringsten Verlängerung, den Bruch erfolgen zu lassen. Ich behaupte, dieses Prisma sei unter allen anderen von ähnlichen Dimensionen (und deren Anzahl ist unendlich gross), das einzige, welches bei einer Vergrösserung zerbrechen

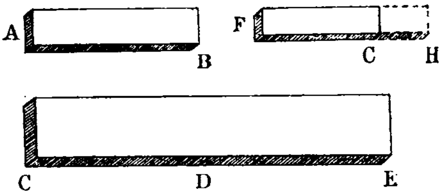

Fig. 24.

wird, während jedes kleinere noch belastet werden darf, ehe es zerbricht. Es sei *CE* dem *AB* ähnlich, aber grösser als letzteres; ich behaupte also, es müsse durch sein eigenes Gewicht zerbrechen. Sei *CD* ebenso lang wie *AB*. Die Bruchfestigkeit von *CD* verhält sich zu der von *AB*, wie der Cubus der Dicke von *CD* zum Cubus der Dicke von *AB*, folglich auch wie das Prisma *CE* zum Prisma *AB* (weil sie ähnlich sind), folglich ist das Gewicht von *CE* das grösste, das in der Länge des Prisma *CD* getragen werden kann; da nun *CE* länger ist, so muss es zerbrechen. Sei andererseits *FC* ein Prisma, kleiner als *AB*: macht man $FH = AB$, so wird die Bruchfestigkeit von *FC* zu der von *AB* sich verhalten wie das Prisma *FC* zum Prisma *AB*, wenn der Arm *AB* oder *FH* gleich *FC* wäre: allein er ist länger, folglich genügt nicht das Moment von *FC* in *C* angebracht, um das Prisma *FC* zu zerbrechen.[14])

Sagr. So wird denn die Richtigkeit der Behauptung kurz und klar erwiesen, wie sehr dieselbe auf den ersten Anblick uns unwahrscheinlich dünkt. — Nun müsste man die Länge so mit der Breite zugleich verändern, dass mit der Verlängerung und mit der Verkürzung eine solche Breite dem Cylinder gegeben werde, dass die Grenze der Bruchfestigkeit erhalten bliebe; ein Problem, das wohl Beachtung verdiente.

Salv. Es ist durchaus nützlich und ich habe mich wohl bemüht, es zu lösen. Ich will Euch die Sache mittheilen:

Es sei ein Cylinder von solcher Länge und Dicke gegeben, dass er an der Grenze der Bruchfestigkeit liege. Bei gegebener Länge eines anderen Cylinders soll diejenige Dicke desselben ermittelt werden, die ihn auf die genannte Grenze bringt, so dass er gerade noch seinem Eigengewichte Widerstand leistet.

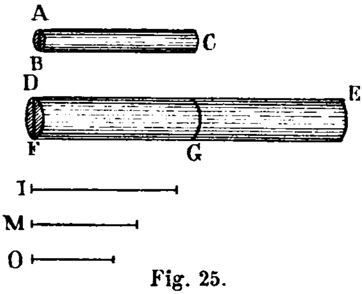

Fig. 25.

Sei *BC* (Fig. 25) dieser Cylinder, und *DE* die gegebene Länge des gesuchten Cylinders und *DE* grösser als *AC*, es soll die Dicke des Cylinders *DE* gefunden werden, so dass dem Eigengewicht gerade noch Widerstand geleistet werde.

Zu *DE* und *AC* sei *J* die dritte Proportionale, ferner bestimme man *FD* so, dass das Verhältniss *FD* zu *BA* gleich

DE zu *J* sei. Nun denke man sich den Cylinder *FE*. Dieser Cylinder von der Länge *DE* und dem Durchmesser *DF* ist, behaupte ich, der gesuchte. Denn es verhalte sich *DE* zu *J*, wie *M* zu *O*. Und es sei $FG = AC$. Da der Durchmesser *FD* zum Durchmesser *AB*, wie die Linie *DE* zu *J*, und da zu *DE* und *J* die vierte Proportionale *O* ist, so wird sich der Cubus von *FD* zum Cubus von *AB* verhalten, wie *DE* zu *O*; aber wie diese Cuben, so verhalten sich die Bruchfestigkeiten von *DG* und *BC*; folglich verhalten sich die Bruchfestigkeiten der Cylinder *DG* und *BC* wie die geraden *DE* und *O*. Da nun das Moment des Cylinders *BC* gleich ist seiner Bruchfestigkeit, so werden wir unseren Zweck erreichen, wenn wir beweisen, dass die Momente der Cylinder *FE* und *BC* sich verhalten, wie die Bruchfestigkeiten von *DF* und *BA*, oder wie die Cuben von *FD* und *BA* oder wie die Gerade *DE* zu *O*, mit anderen Worten, wenn wir beweisen, dass das Moment des Cylinders *FE* gleich sei der Bruchfestigkeit in *FD*. Nun verhalten sich die Momente der Cylinder *FE* und *DG*, wie die Quadrate von *DE* und *AC*, oder wie die Gerade *DE* zu *J*; und die Momente der Cylinder *DG* und *BC*, wie die Quadrate von *DF* und *BA*, d. h. wie die Quadrate von *DE* und *J*, folglich auch wie die Quadrate von *F* und *M*, oder wie *J* zu *O*: mithin endlich verhalten sich die Momente der Cylinder *FE* und *BC*, wie die Gerade *DE* und *O*, d. h. wie die Cuben von *DF* und *BA*, oder wie die Bruchfestigkeiten der Grundflächen *DF* und *BA*, was zu beweisen war.[15])

Sagr. Das aber, Herr *Salviati*, ist ein sehr langer Beweis, der schwer dem Gedächtniss einzuprägen ist, daher bitte ich um eine gefällige Wiederholung desselben.

Salv. Wie Ihr beliebt, allein lieber bringe ich Euch einen kürzeren expediteren: nur brauche ich dazu eine andere Figur:

Sagr. Ich wäre Euch indess sehr dankbar, wenn Ihr den ersten Gang mir schriftlich geben wolltet, damit ich in meiner Mussezeit ihn wieder durchnehmen könnte.

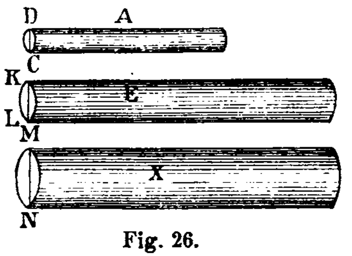

Fig. 26.

Salv. Recht gern. Jetzt also nehmen wir einen Cylinder *A* (Fig. 26) mit der Basis *DC*, und *A* befinde sich an der Grenze der Bruchfestigkeit. Wir suchen einen grösseren von der Länge *E* mit solchem Durchmesser, dass er dieselbe

Bedingung erfülle. Zunächst denken wir uns einen Cylinder von der Lange E und solcher Basis KL, dass derselbe dem Cylinder A ähnlich sei. Ferner sei zu DC und KL die dritte Proportionale MN, welches zugleich der Durchmesser des Cylinders X sei, von einer Länge gleich E. Ich behaupte, X sei der gesuchte Cylinder. Denn die Widerstände von DC und KL verhalten sich wie die Quadrate von DC und KL oder wie die Quadrate von KL und MN, folglich wie die Cylinder E und X, also auch wie die Momente von E und X; aber die Widerstände von KL und MN verhalten sich wie die Cuben von KL und MN, mithin auch wie die Cuben von DC und KL oder wie die Cylinder A und E, mithin auch wie die Momente von A und E; woraus umgekehrt folgt, dass die Widerstände von DC und MN sich verhalten wie die Momente von A und X; mithin hat X dasselbe Verhältniss von Moment und Widerstand wie A.[16])

Jetzt wollen wir die Aufgabe verallgemeinern:

Es habe AC irgend ein Verhältniss zwischen Moment und Widerstand, man soll die Dicke eines Cylinders von gegebener Länge DE finden, so dass das genannte Verhältniss denselben Werth habe.

In Fig. 25 verhalten sich die Momente von FE und DG, wie die Quadrate von ED und FG, oder wie die Geraden DE und J, und die Momente der Cylinder DG und AC verhalten sich wie die Quadrate von FD und AB, also wie die Quadrate von DE und J, oder wie die Quadrate von J und M, folglich wie die Geraden J und O, d. h. wie die Cuben von DE und J, oder auch wie die Cuben von FD und AB, mithin wie die Bruchfestigkeiten der Grundflächen FD und AB, was zu beweisen war.[17])

Hieraus erkennen wir nun, wie weder Kunst noch Natur ihre Werke unermesslich vergrössern können, so dass es unmöglich erscheint, immense Schiffe, Paläste oder Tempel zu erbauen, deren Ruder, Raaen, Gebälk, Eisenverkettung und andere Theile bestehen könnten: wie andererseits die Natur keine Bäume von übermässiger Grösse entstehen lassen kann, denn die Zweige würden schliesslich durch das Eigengewicht zerbrechen; auch können die Knochen der Menschen, Pferde und anderer Thiere nicht übergross sein und ihrem Zweck entsprechen, denn solche Thiere könnten nur dann so bedeutend vergrössert werden, wenn die Materie fester wäre und widerstandsfähiger, als gewöhnlich; sonst müssten bedeutende Verdickungen der Knochen gedacht werden, damit keine Deformationen einträten, wie denn ein scharfsinniger Dichter solches erkannte, wenn er einen Riesen folgendermaassen beschrieb:

»Man kann nicht sagen wie lang er war,
»So über alles Maass war Alles dick an ihm.

Zur Erläuterung habe ich Euch einen Knochen gezeichnet, der die gewöhnliche Länge ums Dreifache übertrifft und der in dem Maasse verdickt wurde, dass er dem entsprechend grossen Thiere ebenso nützen könnte, wie der kleinere Knochen dem kleineren Thiere. In Fig. 27 erkennt Ihr, in welches Missverhältniss der grosse Knochen gerathen ist. Wer also bei einem Riesen die gewöhnlichen Verhältnisse beibehalten wollte, müsste entweder festere Materie finden, oder er müsste verzichten auf die Festigkeit, und den Riesen schwächer als Menschen von gewöhnlicher Statur werden lassen; bei übermässiger Grösse müsste er durch das Eigengewicht zerdrückt werden und fallen. Im Gegentheil finden wir, dass bei Verminderung des Körpers die Kräfte nicht in demselben Maasse abnehmen, ja es findet sogar ein relatives Wachsthum der Stärke statt. Daher glaube ich, würde ein kleiner Hund zwei oder drei andere von gleicher Grösse tragen können, während ein Pferd wohl kaum im Stande wäre, auch nur ein einziges Pferd auf seinem Rücken zu tragen.

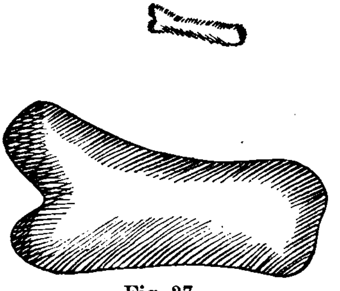

Fig. 27.

Simpl. Wie steht es aber mit den ungeheuren Massen, die wir bei Fischen finden? Ein Walfisch hat, wie ich glaube, zehnmal so viel Masse als ein Elephant, und doch kann er bestehen.

Salv. Euer Einwand, Herr *Simplicio*, veranlasst mich nachzuholen, dass es noch eine andere Möglichkeit giebt, Riesen und Riesenthieren die Existenz zu ermöglichen mit einer freien Beweglichkeit, gleich der der kleineren Geschöpfe. Es braucht dazu die Materie nicht, wie oben erwähnt wurde, fester zu sein, um das Eigengewicht zu tragen; man könnte unter Beibehaltung aller Verhältnisse das Gewicht der Knochen und des Fleisches verkleinern, auch das anderer Körpertheile, die sich auf die Knochen stützen; und dieses Princip hat die Natur bei den Fischen verwerthet, da sie deren Knochen und Fleischtheile nicht bloss sehr leicht machte, sondern sogar ohne alles Gewicht.

Simpl. Ich errathe schon, Herr *Salviati*, worauf Ihr hinsteuert: Ihr meinet, dass, da die Fische im Wasser leben, und da das Wasser durch seine Dichtigkeit, oder wie andere sagen, durch sein Gewicht das der eingetauchten Körper vermindert, die Materie der Fische kein Gewicht habe und sich ohne Belastung der Knochen im Wasser erhalten könne; allein das reicht doch nicht hin, denn wenn auch die Knochen nicht belastet werden sollten, so sind dieselben doch selbst schwer. Und sollte eine Walfischrippe, gross wie ein Balken, nicht schwer genug sein und auch im Wasser sich senken? Nach Eurer Meinung dürfte solch eine grosse Masse sich nicht erhalten können.

Salv. Um Eurem Einwande zu begegnen, bitte ich Euch mir zu sagen, ob Ihr jemals Fische völlig unbewegt im Wasser habt ruhen sehen, ohne dass sie sinken, oder aufsteigen sehen ohne besondere Schwimmanstrengung?

Simpl. Freilich ist dies eine sehr bekannte Erscheinung.

Salv. Nun, wenn die Fische völlig unbewegt im Wasser verharren können, so ist es klar, dass ihr specifisches Gewicht dem des Wassers gleich sei, und wenn in ihrem Körper einzelne Theile schwerer als Wasser sind, so müssen nothwendiger Weise andere von geringerem specifischen Gewicht vorkommen, damit ein Gleichgewicht entstehen könne. Sind also die Knochen schwerer, so müssen das Fleisch oder andere Organe leichter sein, und diese letzteren wirken mit ihrer Leichtigkeit gegen die Schwere der Knochen; also wird bei Wasserthieren das Gegentheil von dem gelten, was für die Erdthiere gefunden ward, nämlich dass bei letzteren den Knochen obliegt, ihr Eigengewicht und das des umlagernden Fleisches zu tragen. Daher schwindet nun der Widerspruch und wir erkennen, dass im Wasser Riesenthiere bestehen können, nicht aber auf der Erde, d. h. in der Luft.

Simpl. Ich bin völlig beruhigt, und möchte nur bemerken, dass wir statt von Erdthieren richtiger von Luftthieren sprechen sollten, denn in Luft leben dieselben, von Luft sind sie umgeben und Luft athmen sie.

Sagr. Herrn *Simplicio*'s Einwand und Eure Widerlegung hat mir sehr gefallen. Ich glaube hinzufügen zu müssen, dass eins der riesenhaften Wasserthiere, ans Land gezogen, sich vielleicht nicht lange erhalten würde, dass die Verbindungen der Knochen erschlaffen und der Körper zerquetscht werden würde.

Salv. Ich möchte dasselbe glauben; und ähnliches würde sich mit den Riesenschiffen ereignen, die im Wasser nicht durch das Eigengewicht zerstört werden, trotz der Belastung mit Waaren und Geschossen, während sie auf dem Trocknen bersten würden. Aber kehren wir zu unserem Problem zurück und beweisen wir folgenden Satz:

Das Gewicht eines Prismas oder Cylinders sei gegeben und das Maximalgewicht, das noch getragen werden kann; es soll die Maximallänge gefunden werden, bei welcher der Bruch eintreten würde.

Es sei AC (Fig. 28) das Prisma und D das Maximalgewicht, das dasselbe bei C tragen kann, man sucht die Maximallänge, bei welcher das Prisma durch das Eigengewicht brechen würde. Man bilde ein Verhältniss, demgemäss sich das Gewicht von AC zur Summe der Gewichte von AC und dem doppelten Betrage von D verhält, wie die Länge CA zur Länge AH, deren mittlere Proportionale AG sei. Letzteres ist die gesuchte Länge; denn das wirksame Moment von D am Orte C ist gleich dem doppelten Momente von D in der Hälfte von AC angebracht, wo auch das Moment vom Prisma AC wirkt; daher ist das Moment des Widerstandes von AC, welches bei A wirkt, gleich dem doppelten Gewicht von D mit AC zusammengenommen, letztere in $^1/_2\,AC$ angebracht. Und da man $2D$ sammt AC zum Momente AC sich verhalten liess, wie HA zu AC, deren mittlere Proportionale AG war, so verhält sich $2D$ sammt AC zu AC, wie das Quadrat von GA zum Quadrat von AC: aber die wirkenden Momente der Prismen GA und AC verhalten sich wie die Quadrate von GA und AC: folglich ist die Länge AG das gesuchte Maximum, über welches hinaus eine jede Verlängerung den Bruch zur Folge hätte.[18])

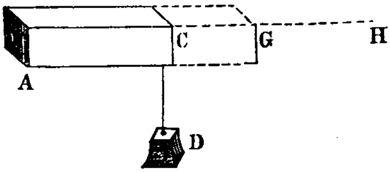

Fig. 28.

Bis jetzt wurden Momente und Widerstände fester Prismen und Cylinder betrachtet, bei welchen ein Ende fest war und das andere belastet wurde, sei es nun, dass bloss das Eigengewicht oder noch eine andere Last ausserdem wirksam war. Jetzt wollen wir beide Enden unterstützt sein lassen, oder einen Unterstützungspunkt zwischen beiden Enden annehmen. Ich behaupte, ein Cylinder auf einer mittleren oder zwischen zwei Endstützen dürfe die doppelte Länge jenes haben, der bei einer Unterstützung am Ende die Maximallänge besass. Dieses ist leicht einzusehen, denn sei der Cylinder ABC (Fig. 29) gegeben, und die Hälfte desselben bei B, so wird die Hälfte AB von der anderen Hälfte BC gerade noch im Gleichgewichte gehalten, wenn der Cylinder in G aufruht. Wenn ebenso DEF so lang ist, dass nur eine Hälfte, bei D befestigt, sich erhalten könnte, wie die andere Hälfte bei F, so ist es klar, dass wenn D und F gestützt werden, jede kleinste Zulage bei E den Bruch herbeiführen müsste.

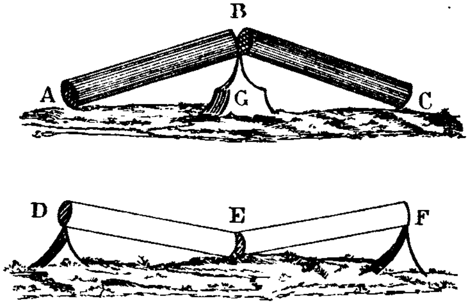

Fig. 29.

Eine etwas verfeinerte Untersuchung lässt uns vom Eigengewichte absehen, und fragen, ob jenes in der Mitte angebrachte Gewicht, welches hinreicht, den Bruch zu veranlassen, solches noch thäte, wenn es an irgend einer anderen Stelle, näher zum Ende, angehängt würde. Wenn wir z. B. eine Masse zerbrechen wollen, indem wir sie an den Enden anfassen und in der Mitte an das Knie stützen, würde die hierzu nöthige Kraft auch dann noch genügen, wenn man das Knie näher zum Ende des Stabes anstemmte?

Sagr. Ich glaube, *Aristoteles* hat dieses Problem unter seinen Untersuchungen über Mechanik berührt.

Salv. Das Problem bei *Aristoteles* ist nicht ganz dasselbe; er fragt, warum es weniger Kraft kostet, den Stab zu zerbrechen, wenn man die Enden zwängt, also weit entfernt vom Knie, als wenn man nahebei anfasst, und dazu stellt er einen allgemeinen Satz auf über die Länge der Hebelarme. Unsere Frage dagegen bringt etwas Neues hinzu, da wir stets die Kraft an den Enden anbringen, und den Stützpunkt des Kniees wechseln, und alsdann fragen, ob dieselben Kräfte nöthig sein werden.

Sagr. Auf den ersten Blick möchte man die Frage bejahen, denn die beiden Hebel bleiben in gewissem Verhältniss, da der eine sich gerade um ebensoviel verkürzt, als der andere länger wird.

Salv. Seht, wie leicht man sich versehen kann, und wie viel Vorsicht und Umsicht nöthig ist zur Vermeidung von Irrthümern. Eure zunächst so plausible Ansicht ist dermaassen falsch, dass im Vergleich zu der bei mittlerer Stütze angewandten Kraft, unter Umständen der vierfache, zehnfache, hundert- und tausendfache Betrag nicht hinreichen würde. Wir wollen die Frage allgemein behandeln, und dann verschiedene Fälle betrachten:

Es sei AB (Fig. 30) ein Holzprisma, welches in der Mitte bei C, und DE ein ebensolches, welches in F, näher an dem einen Ende, gebrochen werden soll. Zunächst da AC gleich CB, wird die Kraft in A gleich der in B sein. Aber je kleiner DF gegen AC, um so kleiner ist das Moment der Kraft bei D, und zwar in dem Maasse, als DF kleiner ist als AC; daher muss man das Moment bei D vermehren, um den bei F gedachten Widerstand zu überwinden; nun aber kann DF ohne Grenzen vermindert werden; in demselben Maasse müsste die bei D angebrachte Kraft vermehrt werden, um den Widerstand in F zu überwinden. Umgekehrt aber je grösser FE, um so mehr muss die Kraft bei E vermindert werden; allein FE kann nicht über alle Grenze hinaus vermehrt werden, sondern höchstens bis zum doppelten Betrage von BC; daher wird die in E anzubringende Kraft stets grösser als die Hälfte der in B angewandten sein. Man sieht daher ein, dass die Gesammtkraft von E und D immer mehr vergrössert werden muss, um den Widerstand in F zu überwinden, je näher F zum Ende D liegt.

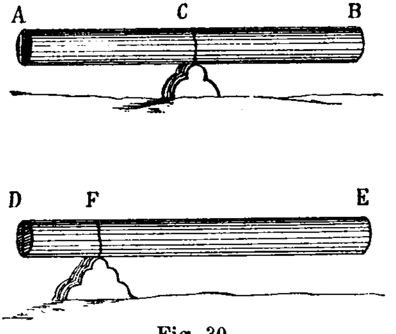

Fig. 30.

Sagr. Was sollen wir hierzu sagen, Herr *Simplicio*? Ist nicht die Geometrie das mächtigste Werkzeug zur Schärfung des Verstandes, das uns zu jeglicher Untersuchung befähigt? Wie hatte doch Plato Recht, wenn er allem zuvor seine Schüler gründlich in der Mathematik unterrichtete? Ich hatte doch vollkommen das Hebelgesetz erfasst, das Zunehmen und Abnehmen der Momente der Kraft und des Widerstandes mit den Armeslängen: trotzdem habe ich im vorliegenden Problem mich geirrt, und der Fehler ist nicht klein, sondern unendlich gross.

Simpl. Wahrlich ich fange an zu begreifen, dass die Logik, obwohl sie ein ausserordentliches Hülfsmittel der Dialectik ist, uns doch nicht zur Erfindung bringt und zur Denkschärfe der Geometrie.

Sagr. Mir scheint, die Logik lehrt uns erkennen, ob bereits angestellte Untersuchungen urtheilskräftig seien, aber dass sie den Gang derselben bestimme und die Beweise finden lehre, das glaube ich nicht. Indess wird es besser sein, wenn Herr *Salviati* uns jetzt zeigt, in welchem Maasse die angestrengten Kräfte zunehmen, je nachdem der Stützpunkt variirt.

Salv. Das finden wir folgendermaassen: Wenn auf der Länge eines Cylinders zwei Stellen bezeichnet werden, an welchen der Bruch stattfinden soll, dann verhalten sich die Widerstände an diesen Stellen (umgekehrt,) wie die Rechtecke aus den Abständen dieser Stellen von den beiden Enden. Es seien A, B (Fig. 31) die kleinsten Kräfte, die hinreichen, den Bruch in C, und E, F ebenfalls die kleinsten, um den Bruch in D hervorzubringen. Ich behaupte, die Kräfte A, B verhalten sich zu den Kräften E, F wie das Rechteck ADB zum Rechteck ACB. Denn die Kräfte $A + B$ haben zu den Kräften $E + F$ das zusammengesetzte Verhältniss der Kräfte $A + B$ zu B, der Kraft B zu F, und der Kraft F zu den Kräften $E + F$. Aber $A + B$ zu B wie die Arme BA zu AC, und B zu F wie die Linie DB zu BC, und F zu $F + E$, wie die Linie DA zu AB, folglich haben die Kräfte $A + B$ zu $E + F$ ein aus drei Factoren zusammengesetztes Verhältniss, nämlich BA zu AC, DB zu BC und DA zu AB; aber die Factoren DA zu AB und AB zu AC ergeben das einfache Verhältniss DA zu AC; folglich verhalten sich die Kräfte $A + B$ zu $E + F$, wie die zusammengesetzten Verhältnisse DA zu AC und DB zu BC; aber die Rechtecke ADB und ACB haben dasselbe zusammengesetzte Verhältniss; folglich verhalten sich $A + B$ zu $E + F$ wie das Rechteck ADB zu ACB. Mit anderen Worten die Bruchfestigkeit in C verhält sich zu der in D, wie das Rechteck ADB zum Rechteck ACB, was zu beweisen war. [19])

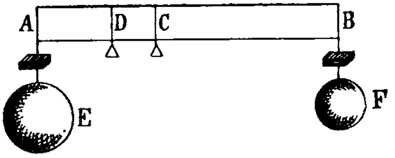

Fig. 31.

Auf Grund dieses Theorems können wir ein interessantes Problem lösen:

Es sei gegeben das Maximalgewicht, das in der Mitte eines Cylinders oder Prismas angebracht (wo der Widerstand den kleinsten Werth hat) den Bruch hervorbringt, es sei ferner ein gewisses grösseres Gewicht gegeben; es soll der Punkt angegeben werden, wo das letztere gerade den Bruch veranlasst:

Es habe das grössere Gewicht zum Maximalgewicht, das in der Mitte von AB (Fig. 32) angebracht war, das Verhältniss der Linien E und F; der Punkt ist zu bestimmen, für welchen ersteres das Maximalgewicht ist. Zu E und F sei die mittlere Proportionale G, und wie E zu G, so mache man AD zu S; offenbar wird S kleiner als AD sein. Ueber AD als Durchmesser construire man den Halbkreis AHD, mache AH gleich S; man ziehe HD und theile RD gleich HD ab. Ich behaupte, R sei der gesuchte Punkt, an welchem das gegebene Gewicht gerade den Bruch zu Wege brächte. Ueber BA als Durchmesser errichte man den Halbkreis ANB, construire das Loth RN und ziehe ND. Die Quadrate über NR und RD sind gleich dem über ND oder dem über AD, folglich sind sie auch gleich der Summe der Quadrate über AH, HD, und da HD gleich DR, so ist das Quadrat über NR, d. h. das Rechteck ARB gleich dem Quadrat über AH, also auch über S; aber die Quadrate über S und AD verhalten sich wie die Linie F zu E, oder wie das eine Maximalgewicht zum anderen; also ist das gegebene Gewicht in R anzubringen, was zu beweisen war. [20])

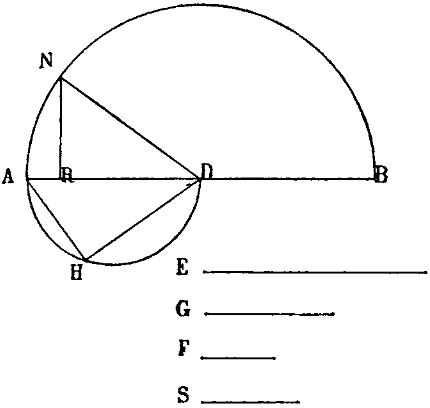

Fig. 32.

Sagr. Ich verstehe vollkommen und finde soeben, dass das Prisma AB um so fester und widerstandsfähiger gegen Druck seiner Belastung sein wird, je weiter aus der Mitte jener Druck angebracht wird; sehr schwere grosse Balken könnte man nach dem Ende hin mit einer grossen Last beschweren und bedeutend den Druck des Eigengewichts vermindern, was beim Gebälk grosser Räume bequem und sehr nützlich sein dürfte. Schön wäre es, könnte man die Form eines Körpers bestimmen, der in allen seinen Theilen gleichen Widerstand besässe, so dass er ebenso leicht in der Mitte, wie an irgend einer anderen Stelle mit ein und demselben Gewicht belastet bräche.

Salv. Ich war eben im Begriff, Euch eine wichtige Bemerkung von grosser Tragweite zu machen. Es sei *DB* (Fig. 33) ein Prisma, dessen Bruchfestigkeit in *AD*, bei einer in *B* angebrachten Kraft sich so zur Bruchfestigkeit bei *CI* verhalten wird, wie *CB* zu *CA*, wie schon bewiesen war; sei nun das Prisma diagonal längs *FB* durchschnitten, so dass die entgegengesetzten Seiten aus zwei Dreiecken bestehen, deren eines *FAB* uns zugekehrt ist. Solch ein Prisma erlangt eine dem vorigen entgegengesetzte Eigenschaft, sofern es leichter bei *C* als bei *A* von einer Kraft in *B* zerbrochen wird, und zwar in dem Verhältniss von *BC* zu *AB*, was leicht zu beweisen ist; denn da *CNO* parallel *AFD* ist, so verhält sich *FA* zu *CN* im Dreiecke *FAB*, wie *AB* zu *BC*, und wenn wir *A* und *C* aufstützen, und die Hebelarme *BA*, *AF*, sowie *BC* und *CN* betrachten, so werden diese letztern ähnlich sein, folglich wird das Moment der Kraft *B* am Arme *AB* gegen den Widerstand am Arme *AF* gleich sein dem Moment von *B* mit dem Arme *BC* gegen denselben Widerstand in *CN*: allein der Widerstand, wenn *C* Stützpunkt ist, wirkt am Arme *CN* und ist kleiner als der Widerstand in *A*, um soviel als das Rechteck *CO* kleiner ist als *AD*, d. h. im Verhältniss *CN* zu *AF*, oder *CB* zu *BA*; also ist der Widerstand gegen Bruch des Theiles *OCB* in *C* um so viel kleiner als der Widerstand des Theiles *DAO* in *A*, als *CB* kleiner ist als *AB*. Wir haben also einmal den Balken oder das Prisma *DB*, und wenn wir die eine Hälfte fortnehmen, indem wir das Prisma diagonal durchschneiden und den Keil behalten, das dreieckige Prisma *FBA*, also zwei Körper von entgegengesetzten Eigenschaften; jener widersteht um so mehr, je kürzer er ist, dieser verliert mit der Verkürzung seine Stärke. Wenn dieses feststeht, so muss es nothwendig einen solchen Schnitt geben, bei welchem, nach Fortnahme des überflüssigen Theiles, ein Körper von solcher Gestalt nachbleibt, dass er überall denselben Widerstand besitzt.[21]

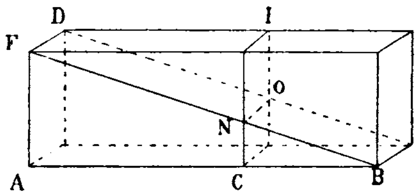

Fig. 33.

Simpl. Das ist freilich klar, denn wenn wir vom grösseren zum kleineren übergehen, so muss es dazwischen ein gleiches geben.

Sagr. Nun aber muss gefunden werden, wie die Säge zu führen sei, um solch einen Schnitt herauszubringen.

Simpl. Ich denke, das müsste ganz leicht sein, denn wenn wir genau die Hälfte fortnehmen, durch einen Diagonalschnitt, und alsdann die übrigbleibende Gestalt die entgegengesetzte Eigenschaft des vollen Prismas hat, sodass an allen Stellen, wo der eine Körper an Festigkeit zunahm, der andere ebensoviel gewann, dann werden wir überall das Mittel nehmen, d. h. wir werden nur die Hälfte der Hälfte fortnehmen, also ein Viertel des Ganzen, und dann wird die zurückbleibende Gestalt weder gewinnen noch verlieren an allen Stellen, wo Gewinn und Verlust der andern beiden Figuren einander stets gleich waren.

Salv. Fehlgeschossen, Herr *Simplicio*: ich werde Euch zeigen, dass das, was vom Prisma weggenommen werden kann, ohne dasselbe zu schwächen, nicht ein Viertel beträgt, sondern ein Drittel. Wir wollen nun, wie Herr *Sagredo* sagte, den Weg bestimmen, den die Säge zu durchlaufen hat: es ist das eine Parabel. Zunächst aber beweisen wir folgenden Hülfssatz:

Wenn zwei Hebel so unterstützt sind, dass diejenigen beiden Arme, an welchen die Kräfte wirken, sich verhalten wie die Quadrate derjenigen Arme, an welchen die Widerstände wirken, welche letztere zugleich proportional denselben Armen seien, so sind die wirkenden Kräfte einander gleich.

Es seien die Hebel AB, CD (Fig. 34) unterstützt in E, F, so dass sich EB zu FD verhält, wie das Quadrat von EA zum Quadrat von FC. Ich behaupte, dass die in B, D angebrachten Kräfte, welche die Widerstände in A, C aufheben, einander gleich seien. — Sei EG die mittlere Proportionale zu EB und FD: alsdann verhalten sich BE zu EG, wie EG zu FD, oder wie AE zu CF und ebenso verhalten sich der Annahme gemäss die Widerstände in A und in C. Da ferner EG zu FD, wie AE zu CF, so ist auch GE zu EA, wie DF zu FC; (die Hebel DC und GA sind in den Punkten F und E proportional getheilt), wenn mithin die Kraft, welche in D angebracht den Widerstand in C aufhebt, nach G versetzt würde, so würde dieselbe denselben

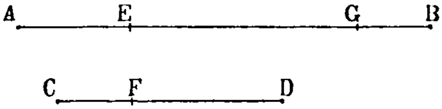

Fig. 34.

Widerstand von C aufheben, wenn dieser nach A gebracht würde; aber es war angenommen, die Widerstände in A und C verhielten sich zu einander wie AE zu CF, oder wie BE zu EG, folglich wird die Kraft G, oder besser D bei B angebracht, den Widerstand in A aufheben, was zu beweisen war.[22]

Dieses vorausgesetzt, sei auf der Prismenseite FB (Fig. 35) die parabolische Linie FNB verzeichnet, deren Scheitel in B, und deren Krümmung gemäss das Prisma ausgesägt sei, so dass der feste Körper von der Basis DA, dem Rechteck AG, der Geraden BG und der Fläche $DGBF$ längs der Parabel FNB gebildet werde. Ich behaupte, dieser Körper habe überall

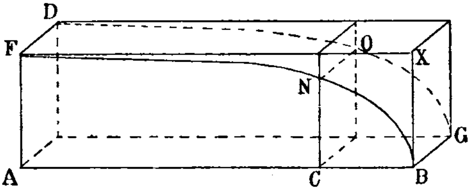

Fig. 35.

gleichen Widerstand. Man vollführe den Schnitt CO parallel zu AD, und fasse nun zwei Hebel auf mit den Stützen A und C, so dass die Arme des einen BA und AF, die des andern BC und CN seien. In der Parabel FBA verhalten sich AB und BC wie die Quadrate von FA und CN, folglich verhalten sich die Arme BA und BC der beiden Hebel wie die Quadrate von NF und CN. Da nun die im Gleichgewicht vorhandenen Widerstände von BA und BC sich verhalten wie die Rechtecke DA und OC d. h. wie die Linien AF und NC, welches die beiden andern Arme sind, so ist nach dem vorigen Satze klar, dass dieselbe Kraft, die, bei BG angebracht, den Widerstand bei DA im Gleichgewicht erhält, auch den Widerstand bei CO balancirt. Dasselbe gilt für jeden anderen Schnitt: daher bietet solch ein parabolisches Prisma stets gleichen Widerstand dar. Dass aber beim Schnitt FNB stets ein Drittel fortgenommen sei, ist klar; denn die Halbparabel $FNBA$ und das Rechteck FB sind Grundflächen zweier Körper zwischen parallelen Ebenen, nämlich den Rechtecken FB und DG; die Körper stehen stets in demselben Verhältniss, wie ihre Grundflächen; aber das Rechteck FB ist das anderthalbfache der Halbparabel $FNBA$; folglich nimmt der parabolische Schnitt den dritten Theil hinweg. Hieraus ersieht man, wie mit einer Gewichtsverminderung von 33 Procent man Gebälke errichten kann, ohne die Festigkeit zu schädigen, was bei grossen Schiffen, zur Festigung des Verdeckes sehr nützlich sein kann; denn bei solchen Bauwerken ist die Leichtigkeit von grosser Bedeutung.

Sagr. Man kann kaum den gesammten Nutzen erschöpfen. Indess wäre es mir von hohem Interesse zu erkennen, dass die Gewichtsverminderung thatsächlich dem genannten Verhältnisse entspricht. Dass der Diagonalschnitt die Hälfte der Masse entfernt, ist klar; dass aber der parabolische Schnitt ein Drittel fortnimmt, kann ich zwar Herrn *Salviati*, der stets zuverlässig ist, glauben, indess wäre mir eine selbsteigene Ueberzeugung mehr werth, als das blosse Vertrauen auf die Versicherung eines Anderen.

Salv. Ihr wünscht also den Beweis dafür, dass der Ueberschuss des Prismas über unsern parabolischen Körper ein Drittel des ganzen Prismas betrage. Ich habe Euch dieses schon früher einmal bewiesen; ich will den Gang Euch ins Gedächtniss zurückrufen; ich bediente mich eines Hülfssatzes von *Aristoteles* aus seinem Buche über die Spiralen; wenn nämlich beliebig viele Linien um gleich viel von einander abweichen, und die Abweichungen gleich der kürzesten Linie seien, und wenn ebensoviele Linien gleich der längsten vorhanden sind; so werden die Quadrate aller dieser Linien weniger betragen, als das dreifache der Quadrate aller jener unter einander verschiedenen Linien, zugleich aber werden sie mehr als das Dreifache von denjenigen Linien betragen, die nachbleiben nach Fortnahme des grössten Quadrates. Dies vorausgesetzt; sei im Rechteck $ACBP$ (Fig. 36) die Parabel AB eingezeichnet; wir müssen beweisen, dass das gemischte Dreieck BPA, dessen Seiten BP, PA und dessen Grundlinie die Parabel BA ist, gleich sei einem Drittel des Rechteckes CP. Wenn dem nicht so wäre, so müsste es grösser oder kleiner sein. Angenommen es sei kleiner, und zwar um ein Stück X. Theilt man nun das Rechteck in immer mehr gleiche Theile, durch

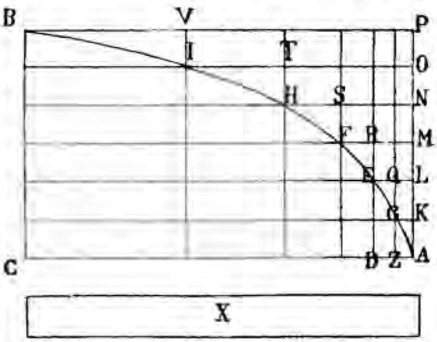

Fig. 36.

Parallelen zu BP und CA, bis wir solche Theile erhalten, dass jeder einzelne derselben kleiner als X sei. Ein solcher Theil sei OB. Durch den Schnittpunkt mit der Parabel errichten wir eine Senkrechte parallel AP, und denken uns um unser gemischtes Dreieck eine Menge von Rechtecken beschrieben, wie BO, JN, HM, FL, EK und GA, deren Summe durchaus noch kleiner als ein Drittel des ganzen Rechteckes CP sein wird, denn der Ueberschuss dieser Summe über das gemischte Dreieck ist kleiner als BO, und BO ist kleiner als X.

Sagr. Bitte, nicht so schnell, ich verstehe nicht, warum der fragliche Ueberschuss kleiner sein soll als das Rechteck BO.

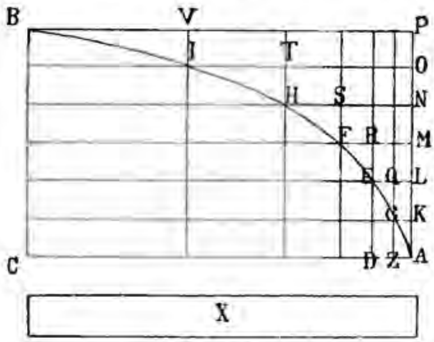

Fig. 36.

Salv. Das Rechteck BO ist gleich der Summe der kleinen Rechtecke, durch welche unsere Parabel hindurchstreicht, nämlich BI, IH, HF, FE, EG und GA. Von diesen bleibt nur ein Theil ausserhalb des gemischten Dreieckes; aber das Rechteck BO sollte kleiner als X sein. Wenn also das Dreieck mit X zusammen gleich einem Drittel von CP sein sollte, so wird die umschriebene Figur, die dem Dreiecke weniger als X zufügt, immer noch kleiner bleiben als ein Drittel vom Rechteck CP; das aber ist unmöglich, da diese Figur mehr als ein Drittel von CP beträgt; mithin kann unser gemischtes Dreieck nicht kleiner als ein Drittel des Ganzen sein.

Sagr. Mein Zweifel ist gehoben. Nun bleibt noch zu beweisen übrig, dass die umschriebene Figur nicht mehr als ein Drittel von CP ausmache, was, wie ich glaube, Euch weniger leicht sein wird.

Salv. Durchaus nicht. In der Parabel verhalten sich die Quadrate von DE und ZG, wie die Strecken DA und AZ oder wie die Rechtecke KE und AG (da die Höhen AK, KL einander gleich sind); folglich verhalten sich die Quadrate von ED und ZG, d. h. die Quadrate von LA und AK, wie die Rechtecke KE und KZ. Ganz ebenso findet man, dass die anderen Rechtecke LF, MH, NI, OB sich verhalten wie die Quadrate der Linien MA, NA, OA und PA. Nun überlegen wir, dass die umschriebene Figur aus Stücken zusammengesetzt ist, die sich verhalten, wie die Quadrate der Linien, die um stets gleich viel die kleinste überragen, und dass das Rechteck CP aus ebensoviel Stücken zusammengesetzt ist, deren jedes gleich dem grössten ist, d. h. dass diese Alle gleich dem Rechteck BO sind. Folglich ist nach dem Aristotelischen Hülfssatz die umschriebene Figur mehr als ein Drittel von CP; aber sie war zugleich kleiner als dieses, was unmöglich ist; mithin ist das zusammengesetzte Dreieck nicht kleiner als ein Drittel des Rechteckes CP. Ich behaupte, es ist auch nicht grösser, denn wenn es das wäre, so sei X gleich dem Ueberschuss über ein Drittel von CP; nach vollbrachter wiederholter Theilung in lauter gleiche Rechtecke, wird man wiederum ein solches erhalten, das kleiner ist als X. Sei nun BO kleiner als X, und beschreiben wir ebensolche Linien, wie vorhin, so erhalten wir im gemischten Dreieck eine eingeschriebene Figur, die aus Rechtecken VO, TN, SM, RL und QK zusammengesetzt ist, welche auch noch nicht kleiner als ein Drittel von CP sein wird. Denn das gemischte Dreieck übertrifft die eingeschriebene Figur um weniger, als ebendasselbe den dritten Theil von CP der Annahme gemäss übertrifft, denn der Ueberschuss des Dreieckes über jenes Drittel von CP ist gleich X, und X ist kleiner als BO, und BO ist viel kleiner als der Ueberschuss des Dreiecks über die eingeschriebene Figur; denn dem Rechteck BO sind die Rechtecke AG, GE, EF, FH, HI, IB gleich, von letzteren aber ist weniger als die Hälfte gleich dem Ueberschuss des Dreiecks über die gemischte Figur. Da nun das Dreieck den dritten Theil von CP um mehr übertrifft (nämlich um X), und die eingeschriebene Figur nicht um soviel übertrifft, so müsste die eingeschriebene Figur grösser als ein Drittel von CP sein; allein sie ist kleiner nach unserem Hülfssatz; denn das Rechteck CP ist ein Aggregat von grössten Rechtecken und hat zu den Rechtecken, die die eingeschriebene Figur bilden, dasselbe Verhältniss, wie die Summe aller Quadrate der grössten Linien zu den Quadraten derjenigen Linien, die um gleichviel von einander abweichen, nach Abzug des Quadrates der grössten Linie; ferner ist die Gesammtsumme der grössten Rechtecke (d. h. das Rechteck CP) mehr als das Dreifache der Summe der Rechtecke, die die eingeschriebene Figur bilden, nach Abzug des grössten. Folglich ist das gemischte Dreieck weder grösser noch kleiner als ein Drittel des Rechteckes *CP*; mithin demselben gleich.

Sagr. Ein schöner sinnreicher Beweis, besonders weil er uns zugleich die Quadratur (la quadratura) der Parabel giebt; die Fläche derselben ist gleich vier Drittheilen des eingeschriebenen Dreieckes, was *Archimedes* auf zweierlei Art in bewundernswerther Weise bewies. Auch hat kürzlich *Luca Valerio*, der neue *Archimedes* unserer Zeit, einen neuen Gang eingeschlagen, den man in seinem Lehrbuche über den Schwerpunkt fester Körper findet.

Salv. In der That, das ist ein Buch, das den Werken der berühmtesten Geometer der Gegenwart und Vergangenheit nicht nachgestellt werden kann: als unser Akademiker dasselbe sah, liess er seine eigenen Forschungen liegen, die er über denselben Gegenstand begonnen hatte, denn Alles erschien bereits so trefflich gelöst und bewiesen von demselben *Valerio.*

Sagr. Davon hat mir der Akademiker selbst Mittheilung gemacht; ich bat ihn, er möge mir doch einmal seine bis dahin entdeckten Sätze zeigen; aber es war vergeblich.

Salv. Ich besitze dieselben in Abschrift, und kann sie Euch zeigen, denn Ihr schätzet die Verschiedenheit der Methoden, durch welche diese beiden Autoren zu gleichen Resultaten gelangen, und die Art ihrer Beweisführung; einige Schlüsse erfahren ganz verschiedene Deutung, obwohl sie im Wesen ganz gleich wahr und richtig sind.

Sagr. Ich möchte sie wohl gerne einsehen, und wenn Ihr zu unseren Zusammenkünften wiederkehrt, so bringt sie gütigst mit. Da indessen das parabolisch ausgeschnittene Stück für viele mechanische Vorrichtungen nützlich sein kann, so wäre den Künstlern sehr gedient mit einer schlichten Regel, nach welcher sie auf einer Prismenseite die Parabel aufzeichnen könnten.

Salv. Man kann auf viele Arten solche Linien verzeichnen, ich will Euch nur zwei der expeditesten mittheilen. Die eine ist in der That wunderbar, da ich in kürzerer Zeit, als ein anderer mittels des Zirkels vier oder sechs Kreise verschiedener Grösse verzeichnet, dreissig oder vierzig Parabeln construiren kann, deren Zug nicht minder richtig, fein und sauber ausgeführt ist als der der Kreise. Ich habe eine Broncekugel, die völlig rund gearbeitet ist, nicht grösser als eine Nuss; wirft man dieselbe auf einen Metallspiegel, der nicht ganz horizontal liegt, sondern ein wenig geneigt ist, so dass die Kugel in ihrem Laufe einen leichten Druck ausübt, so beschreibt sie eine feine parabolische

Linie, die mehr oder weniger gestreckt sein wird, je nach der Neigung der Metallplatte. Zugleich lässt sich demonstriren, dass geworfene Körper in Parabeln sich bewegen: eine Thatsache, die unser Freund entdeckt hat, sammt dem Beweise, den er in seinem Buche über die Bewegung bringt, und den wir bei der nächsten Zusammenkunft kennen lernen werden. Die Kugel, die Parabeln beschreiben soll, muss man ein wenig mit der Hand erwärmen und anfeuchten, da sie alsdann auf dem Metallspiegel deutlichere Spuren hinterlässt. Die andere Art, Parabeln zu beschreiben auf dem Prisma, ist folgende: An einer Wand befestigt man in gleicher Höhe über dem Horizonte zwei Nägel, in einer Entfernung von einander, die gleich ist der doppelten Breite des Rechteckes, auf welchem die Halbparabel construirt werden soll; von beiden Nägeln hängt eine feine Kette herab, die so lang ist, dass ihr tiefster Punkt sich um die Länge des gegebenen Rechteckes vom Horizonte der Nägel entfernt: Diese Kette hat die Gestalt einer Parabel, so dass, wenn man dieselbe durch Punktirung abmalt, man eine richtige Parabel erhält: das mittlere Loth theilt dieselbe in gleiche Theile.[23]) Das Uebertragen derselben auf beide Seiten des Prisma hat keine Schwierigkeit; Jedermann kann es leicht ausführen. Man könnte auch mit Hülfe der geometrischen Linien, die auf dem Zirkel unseres Freundes verzeichnet sind, ohne Weiteres auf dem Prisma die parabolische Linie punktiren.

Wir haben bisher Vieles betrachtet, was auf die Bruchfestigkeit der Körper Bezug hatte, indem wir die Gesetze des Zuges als bekannt voraussetzten, und so könnten wir fortfahren und immer neue Beziehungen aufdecken, deren es in der Natur unendlich viele giebt. Zum Schluss der heutigen Erläuterungen will ich einiges über den Widerstand der hohlen festen Körper hinzufügen, deren sich die Kunst und die Natur in tausend Fällen bedient; hier wird ohne Gewichtsvermehrung die Festigkeit bedeutend gesteigert: so z. B. bei den Knochen der Vögel und bei vielen Rohren, die leicht sind und doch sehr bieg- und bruchfest: so dass, wenn ein Strohhalm, der eine Aehre trägt, die schwerer ist als der ganze Halm, aus derselben Masse bestünde aber massiv wäre, er viel weniger bieg- und bruchfest sein würde. So hat man künstlich beobachtet und durch den Versuch bestätigt, dass eine hohle Lanze oder ein Rohr aus Holz oder Metall viel fester ist, als wenn diese Körper bei gleichem Gewicht und gleicher Länge massiv wären, wobei sie feiner und dünner sein müssten; daher erfand man das Aushöhlen der Lanzen, um sie fest und zugleich leicht zu machen. Wir wollen folgenden Satz beweisen: Die Widerstände zweier Cylinder von gleicher Masse und Länge, deren einer hohl, der andere massiv sei, verhalten sich zu einander, wie die Durchmesser. Es sei AE (Fig. 37) der Hohlcylinder, der an Gewicht gleich sei dem massiven Cylinder IN, beide von gleicher Länge. Ich behaupte, die Bruchfestigkeiten beider Körper verhalten sich zu einander wie die Durchmesser AB und IL. Da beide Cylinder gleiche Masse und Länge haben, muss die Grundfläche IL gleich der Grundfläche des Rohres, also gleich dem Ringe AB, sein. Mithin werden die Zugfestigkeiten oder absoluten Widerstände einander gleich sein. Bei der Biegung wird aber für den Cylinder IN die Länge LN als Hebelarm dienen, während L der Unterstützungspunkt ist und der Halbmesser von LI als zweiter Hebelarm dient; beim Rohr ist der eine Arm BE gleich LN, aber der Gegenarm über dem Unterstützungspunkte B ist der Halbmesser von AB; folglich wird der Widerstand des Rohres den des Cylinders übertreffen, in dem Maasse als AB grösser ist als IL, was zu beweisen war. Man gewinnt also beim Rohre an Festigkeit in dem Verhältniss der Durchmesser, sobald beide Körper gleiche Masse, Gewicht und Länge haben. Untersuchen wir noch die anderen Fälle, den Unterschied zwischen gleich langen Rohren und Cylindern, die an Gewicht verschieden, mehr oder weniger ausgehöhlt sind. Zunächst folgende Aufgabe:

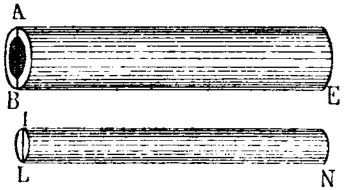

Fig. 37.

Den einem gegebenen Rohre an Masse gleichen massiven Cylinder zu finden.

Die Lösung ist sehr leicht. Es sei AB (Fig. 38) der äussere, CD der innere Durchmesser des Rohres. Mit AE, gleich CD, schlage man von A aus einen Kreis und bestimme den Schnittpunkt E, und verbinde E mit B. Da im Halbkreise der Winkel AEB ein rechter ist, so ist die Kreisfläche, deren Durchmesser AB ist, gleich der Summe zweier Kreise mit den Durchmessern AE und

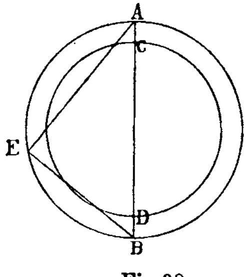

Fig. 38.

EB; aber *AE* ist der innere Rohrdurchmesser, folglich ist *EB* der Durchmesser des gesuchten massiven Cylinders, dessen Grundfläche gleich der des Ringes *ACBD* ist; mithin ist auch ein fester Cylinder mit dem Durchmesser *EB* an Masse gleich dem Rohre, die beide gleiche Länge haben. Nun kann weiter leicht folgende allgemeinere Aufgabe gelöst werden:

Das Verhältniss der Bruchfestigkeiten eines Rohres und eines Cylinders, beide von gleicher Länge, zu bestimmen:

Es sei *ABE* (Fig. 39) das Rohr und der Cylinder *RSM* von gleicher Länge; wie verhalten sich ihre Bruchfestigkeiten? Der vorigen Aufgabe gemäss findet man den Cylinder *ILN* an Masse und Länge gleich dem Rohre, die Linien *IL* und *RS* sind die Durchmesser der beiden massiven Cylinder *IN* und *RM*. Zu *IL* und *RS* sei die vierte Proportionale *V* [24]. Ich behaupte, die Festigkeit des Rohres *AE* verhalte sich zu der des Cylinders *RM*, wie die Linie *AB* zu *V*. Das Rohr *AE* und der Cylinder *IN* haben gleiche Masse und Länge, folglich

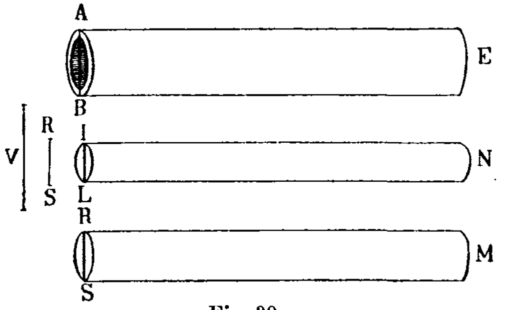

Fig. 39.

verhalten sich ihre Festigkeiten, wie *AB* zu *IL*; aber die Festigkeiten der Cylinder *IN* und *RM* verhalten sich wie die Cuben von *IL* und *RS*, d. h. wie die Linie *IL* zur Linie *V*; folglich verhält sich ex aequali die Festigkeit des Rohres *AE* zur Festigkeit des Cylinders *RM*, wie die Linie *AB* zur Linie *V*, womit die gestellte Aufgabe gelöst ist. [25]

Ende des zweiten Tages.

Nachwort.

»Malgré les effets d'une persécution acharnée, Galilée nous apparait comme un des esprits les plus vastes et les plus sublimes qui aient jamais paru sur la terre. Grand astronome et grand géomètre, créateur de la véritable physique et de la mécanique, réformateur de la philosophie naturelle, il fut en même temps un des plus illustres écrivains de l'Italie.«
Libri, »hist. d. sc. math. en Italie.«
T. IV, p. 291.

»Enchainer le génie, effrayer les penseurs, arrêter les progrès de la philosophie, voilà ce que tentèrent de faire les persécuteurs de Galilée. C'est là une tache dont ils ne se laveront jamais.«
Libri, »hist. des sc. math. en Italie.«
T. IV. p. 293.

Galileo Galilei, geboren zu Pisa am 18./8. Februar 1564, starb zu Arcetri am 8. Jan. 1642/29. Dec. 1641. Es ist schwer zu bestimmen, wann er das Material zu den vorliegenden »Discorsi« zusammengestellt hat. Gedruckt wurden sie 1638, als er bereits unter Aufsicht der Inquisition in Arcetri gefangen gehalten wurde. Einen Theil seiner hier erläuterten Entdeckungen hatte er schon von 1602 an seinen Zuhörern mitgetheilt. Wir haben das Original textgetreu übersetzt nach Grundsätzen, wie sie für Uebertragungen dieser Art von *Fr. C. Wolff* in der Vorrede zu *Cicero*'s de Oratore, Altona 1801, so trefflich entwickelt werden, wenn er sagt: Unsere Kenntnisse haben sich unstreitig in neueren Zeiten erweitert; aber die Kunst, unsere Gedanken mit Lebhaftigkeit und Anmuth vorzutragen, werden wir noch lange von den Römern und Griechen erlernen müssen. Und schon deshalb haben Uebersetzungen aus den Alten ihren unverkennbaren Nutzen, weil sie unsre Sprache bereichern, und uns Muster zur Nachahmung aufstellen; aber diesen Zweck können nur solche Uebersetzungeu befördern, die sich dem Original mit möglichster Treue anschliessen.« »Treu übersetzen heisst den Gedanken des Schriftstellers richtig und bestimmt ausdrücken. Treu übersetzen heisst zweitens, sich im Ausdruck der Kürze der Urschrift befleissigen und sich beeifern, dass man die Wortfolge des Originals, so viel möglich, erhalte. Drittens, die Wörter nach ihren Hauptbegriffen und Nebenbegriffen ausdrücken. Viertens: Keine Periode ohne Noth zerstückeln. Endlich: Den Rhythmus und Wohlklang der Urschrift auch in der Uebersetzung ausdrücken.« Als oberstes Gesetz fordert *Wolff* ferner mit Recht Verständlichkeit, daher Uebersichtlichkeit. Die Wendungen und Ausdrücke »müssen völlig deutsch, natürlich und von Steifheit entfernt« in »edler Sprache« gehalten sein.

Das Original von 1638 haben wir leider nicht zu Gesicht bekommen, und kennen daher auch nicht das Aussehen der Figuren im Text. Uns lag zu Grunde die Bologna-Ausgabe von 1655, die wörtlich übereinstimmt mit der bekannten Mailänder-Ausgabe von 1811. Die erste lateinische Uebersetzung aus dem italienischen Original erschien 1699. Diese Ausgabe ist schön ausgestattet, die Textfiguren erinnern zwar sehr in ihrem Aussehen an die Ausgabe von 1656, sind aber ornamental nicht identisch. Ziemlich stark weicht in der Figurenzeichnung die Mailänder Edition ab. Wir haben uns der letzteren vollkommen angeschlossen, da in dem Rahmen unserer Ausgabe die stattliche Ornamentik der Originalfiguren viel Raum beansprucht hätte.

Die »Discorsi« sind zu wenig gekannt. Der Leser wird manchen ihm aus Lehrbüchern geläufigen Beispielen begegnen, die hier zuerst behandelt worden; wie selten wird in solchen Fällen des genialen Mannes gedacht, der der Schöpfer der Physik war und zahlreiche Gebiete bahnbrechend betrat. Die Lectüre *Galilei*'s wird jedem Studirenden nützlich sein, aber auch der Lehrer und Docent wird sich die freie populäre Sprechweise zum Muster nehmen und zur Nacheiferung sich angeregt fühlen. Die Berücksichtigung gangbarer Irrthümer und im Volke verbreiteter fehlerhafter Anschauungen wird noch heute volles Interesse finden.

Einzelne Lehren in den »Discorsi« sind zwar veraltet. Bedenkt man aber, wie wenig noch heutzutage das Wesen der elastischen Kräfte geklärt ist, so wird man stets mit Spannung den geistvollen Erörterungen *Galilei*'s folgen. Mit Freude lässt man sich von den Gedankenassociationen leiten, die in classisch behaglicher Ruhe unser kaum übertroffener Geistesheld uns vorbringt.

Ob *Galilei* lange vor 1638 seine Discorsi geschrieben oder, da er 1637 erblindet war, sie dictirt hat, lässt sich schwer feststellen. Der vollendet schöne Styl sowohl in den vorliegenden beiden Tagen (»Giornate«), die durchweg italienisch abgefasst sind, als auch in den späteren in classischem Latein gehaltenen

Discorsi lassen vermuthen, dass diese Schriften einer späten Zeit angehören.« Jedenfalls befanden sie sich schon vor 1638 in den Händen des Grafen *di Noailles*. Ferner wissen wir, dass *Galilei* immer sehr spät seine Entdeckungen veröffentlichte, was durch die unvergesslich barbarischen Verfolgungen, denen er sich ausgesetzt sah, bedingt war. — *Libri* nennt *Galilei* den ersten italienischen Schriftsteller seines Jahrhunderts, der dazu bestimmt war, eine völlige Umwälzung in den Wissenschaften zu bewirken. Auf *Lagrange*'s Urtheil über die Bedeutung *Galilei*'s für die Mechanik kommen wir bei der dritten »Giornata« zurück.

Der Druck sämmtlicher »Discorsi« war dem Grafen *di Noailles* zu verdanken. Dem Original ist eine Dedication vorangestellt, die hier in wortgetreuer Uebersetzung folge:

An den hochberühmten Herren

Grafen *di Noailles*

Ritter des Ordens vom heiligen Geist, Feldmarschall Seneschal und Gouverneur von Roerga und Statthalter S.M. in Orvegna,

meinem hochehrwürdigen Herrn und Gönner.

Ich erkenne es als einen Act Eurer Grossmuth, hochehrwürdiger Herr, an, dass Ihr über dieses mein Werk verfügt habt, ungeachtet dessen, dass ich, wie Euch bekannt ist, verwirrt und niedergeschlagen bin wegen der Misserfolge meiner anderen Arbeiten und beschlossen hatte, fortan keine meiner Studien zu veröffentlichen, sondern nur, damit dieselben nicht gänzlich begraben blieben, sie handschriftlich niederzulegen an einem Orte, der vielen Fachkennern zugänglich wäre. Meine Wahl traf den passendsten, hervorragendsten Ort, wenn ich an Eure Hand dachte. Ihr habt mit ganz besonderer Güte gegen mich Euch die Erhaltung meiner Studien und Arbeiten angelegen sein lassen. Als Ihr von Eurer Botschaft nach Rom zurückkehrtet, hatte ich die Ehre, Euch persönlich begrüssen zu dürfen, nachdem ich schon oft brieflich mich an Euch gewandt. Bei solcher Begegnung überreichte ich Euch in Abschrift die vorliegenden beiden Werke, die ich damals fertig hatte. Ihr geruhtet sie huldvoll zu würdigen und in sicheren Gewahrsam zu nehmen. Ihr habt sie in Frankreich Euren Freunden und Interessenten mitgetheilt und habt Gelegenheit genommen zu beweisen, dass ich zwar schweige, dennoch aber mein Leben nicht ganz müssig hinbringe. Ich wollte soeben einige Abschriften fertigen, um dieselben nach Deutschland, Flandern, England, Spanien und in einige Orte Italiens zu senden, als ich unversehens von der Firma Elzeviri benachrichtigt wurde, dass meine Arbeit unter der Presse, und dass es Zeit sei, betreffs der Widmung Beschluss zu fassen und den Entwurf der Druckerei zu übersenden. Tief bewegt durch diese unverhoffte und unerwartete Nachricht, überlegte ich, dass Euer Hochehrwürden Wunsch, meinen Namen zu erheben und meinen Ruf zu erweitern, und Eure Theilnahme an meinen Leistungen meine Arbeit zum Druck befördert hat. Dieselbe Werkstatt hat schon meine anderen Werke veröffentlicht und sie mit ihrer glänzenden geschmackvollen Ausstattung ans Licht gebracht. Und so sollen denn meine Schriften wieder auferstehen, denn sie haben das glückliche Schicksal gehabt, durch Euer gediegenes Urtheil werthgeschätzt zu werden. Ihr seid wohlgekannt durch den Reichthum Eurer Talente, die Jedermann an Euch bewundert; Euer unvergleichlicher Edelmuth, Euer Eifer für das allgemeine Wohl, dem Ihr auch diese meine Arbeit zugänglich machen wollt, hat auch meinen Ruhm vermehrt und ausgebreitet. So ist es denn wohl geschickt, dass auch ich mit einem allsichtbaren Zeichen mich dankbar erweise für Eure edle That. Ihr habt meinen Ruhm die Flügel frei ausbreiten lassen wollen unter offenem Himmel, während es mir als hohe Gunst erschien, dass er auf engere Räume eingeschränkt blieb. Darum sei Eurem Namen mein Werk gewidmet, und dazu drängt mich nicht nur das Bewusstsein einer Fülle von Verpflichtungen gegen Euch, sondern auch, — wenn ich so sagen darf — die Verbindlichkeit, die Ihr übernehmt, mein Ansehen zu vertheidigen gegen meine Widersacher: Ihr seid es, der mich wieder auf den Kampfplatz stellt. So will ich denn kämpfen unter Eurer Fahne, ich beuge mich ehrerbietig unter Euern Schutz und ersehne Euch in tiefgefühltem Dank alles denkbare Glück und Heil.

Arcetri, 6. März 1638.

Ich verbleibe

Hochehrwürdiger Herr

gehorsamster Diener

Galileo Galilei.

Anmerkungen.

1) zu S. 20. Es ist auffallend, dass *Galilei* die Cohäsion fester Körper doch noch auf Hohlräume zurückführen will nach den soeben vorgeführten interessanten Versuchen mit dem Wasser. Wie die unendliche Zahl unendlich kleiner Hohlräume eine Kraft hergeben solle, die grösser ist, als die beim Wasser gemessene (S. 15), wird nicht angedeutet. Hier wie dort kann der endliche Querschnitt des gedehnten Körpers allein maassgebend sein und für die Cohäsion des Marmors, die 5 mal grösser als die Cohärenz des Wassers sein soll, wird keine Erklärung gewonnen.

2) zu S. 25. Die Erläuterung des Herrn *Salviati* ist fein und sinnig und steht nicht fern unseren modernen in der *Steiner*schen synthetischen Geometrie vorgetragenen Anschauungen. Zwei verschiedene, beliebig grosse Strecken können stets gleich viel Punkte haben; dazu brauchen sie nur von einem Punkte aus projicirt zu werden, der durch den Durchschnitt derjenigen beiden Geraden bestimmt wird, die die Enden der gegebenen Strecken verbinden. So haben in der projectivischen Geometrie auch zwei concentrische Kreise beliebiger Grösse gleich viel Punkte, wenn sie von einem Punkte im Innern auf einander bezogen werden. Soviel Radien, soviel Bogendifferentiale sind denkbar, würden wir heute sagen. Immerhin bleibt *Galilei*'s Wälzung der Polygone und Kreise (Fig. 5) ein sinnreicher Einfall.

3) zu S. 28. Heute würden wir sagen, Kegelbasis und Band schrumpfen ein zu Punkt und Kreis, allein der Punkt ist ein Kreis mit unendlich kleinem Radius r, das Band dagegen hat bei endlichem, beliebig grossem Umfange $2\pi l$ eine Breite b, die unendlich klein zweiter Ordnung ist, so dass

$$2\pi . l . b = \pi r^2$$

also $2b.l = r^2$, wodurch die Paradoxie schwindet. Aehnlich ist es mit dem unendlich kleinen Kegelrest und dem unendlich kleinen Rasirmesserrund. Letzteres hat eine unendlich kleine Dicke zweiter Ordnung, weil eine dementsprechende Osculation in A und B (Fig. 6) zwischen Kugel und Cylinder statthat.

4) zu S. 36. Das hier beschriebene System unendlich vieler Kreise wird jetzt ein hyperbolisches Kreissystem genannt. Auf der unendlich langen Geraden AB sind einerseits A und B als feste, andererseits C und E als variable Punkte einander zugeordnet und bilden stets vier harmonische Punkte. Die gesammte Schaar einander zugeordneter Punktenpaare C und E bildet ein hyperbolisches Punktensystem. Insbesondere fällt ein zugeordnetes Paar mit B, ein anderes mit A zusammen, und die Mitte O ist dem unendlich fernen Punkte der Geraden zugeordnet. Inwiefern *Galilei* mit letzterem Verhalten und dem zugehörigen unendlich grossen Kreise ein Widerstreben der Natur, eine endliche Grösse unendlich werden zu lassen, kund thun will, ist nicht recht abzusehen*); die Unendlichkeit im Begriff der Einheit enthält ferner etwas Mystisches, wie solches selten bei *Galilei* vorkommen mag.

5) zu S. 40. Der vorliegend erörterte Gedanke, die Lichtgeschwindigkeit zu messen, ist beachtenswerth und zeigt, dass geraume Zeit vor allen astronomischen Methoden eine terrestrische ersonnen und ins Werk gesetzt war. Die Rohheit der Hülfsmittel allein liess den Versuch scheitern.

6) zu S. 50. Hier ist es am Orte zu zeigen, wodurch allein bei *Galilei* schwerfällige Beweise bedingt sind, während unser Autor sonst sich stets einer gefälligen, klaren Sprache bedient. Diese Schwerfälligkeit tritt überall sofort ein und nur da, wo Proportionen angesetzt werden. Auf diese überaus wichtige Frage sei es gestattet, näher einzugehen. Die ältere Zeit gestattete nur gleiche Qualitäten mit einander zu vergleichen, während es eine Errungenschaft späterer Zeit ist, heterogene Grössen, also verschiedene Qualitäten auf einander zu beziehen, sie mit mathematischen Operationen zu verknüpfen und bei Wahrung des »Dimensionsbegriffes« in Gleichung zu setzen. Auf beiden Seiten einer Gleichung durften damals nur reine Zahlen stehen, wir fordern nur, dass die physischen Qualitäten oder Dimensionen sich aufheben. Nach angesetzter »Gleichung« finden wir durch Rechnung ein Resultat, welches dort eine lange Reihe einzelner Schlussfolgerungen be-

*) What G. means is that the passage to the limit produces something entirely new, here the str. line.

anspracht; einem jeden Gliede solch einer Reihe, also einer jeden Proportion, entspricht eine bestimmte Vorstellung physischer Verhältnisse. Man wird es lehrreich finden, dass Beweise, die im Texte eine ganze Seite einnehmen, heutzutage mit zwei Zeilen abgethan sind, wobei zu bemerken wäre, dass durch jene alte Beweismethode der innere Zusammenhang des Resultates mit den Prämissen keineswegs klarer wird, sondern oft der Art verworren erscheint, dass *Galilei* selbst das Empfinden dieses Umstandes mehrmals Herrn *Sagredo* in den Mund legt. *Simplicio* wird nie solch ein Bekenntniss äussern, er beschränkt sich im Bewusstsein seiner philosophischen Bildung auf eine hartnäckige Skepsis, die schliesslich in Befriedigung sich auflöst, bisweilen mit merklicher Zurückhaltung.

Uebrigens sind wir noch heutzutage durchaus Erben unserer Vorzeit. Es herrscht im Gymnasialunterricht der Ansatz nach Proportionen vor. Ein allgemeines Beispiel mag dieses erläutern: Man lehrt y verhalte sich zu y', wie x zu x', und vielleicht auch noch y zu x wie y' zu x'. — Statt beider Behauptungen und mindestens neben beiden sollte der Schüler angewiesen werden, jede erkannte Proportion mit: $y = a.x$, sowie die umgekehrte Proportion mit $y = \frac{a}{x}$ anzusetzen. Hier repräsentirt a einen aus den Qualitäten von y und x gebildeten neuen Begriff: $a = \frac{y}{x}$, resp. $a = y.x$. So geringfügig die Frage erscheinen mag, so folgereich ist sie für den Unterricht. Wer dieses nicht einräumt, den verweisen wir auf die folgenden Anmerkungen 12—17. — Im vorliegenden Falle haben wir die Proportionen in Klammern dem Texte hinzugefügt, so dass der Leser das Ganze leichter übersieht. Es seien die Höhen H und h, die Radien R und r, die Oberflächen O und o, so ist der Voraussetzung gemäss:

$$H.\pi R^2 = h.\pi.r^2$$

$$\text{also } HR^2 = h.r^2$$

$$\text{und } \frac{HR}{h.r} = \frac{r}{R}, \text{ sowie } \frac{r^2}{R^2} = \frac{H}{h}$$

$$\text{folglich } \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{H}{h}} \text{ und}$$

$$\frac{O}{o} = \frac{2\pi R.H}{2\pi r.h} = \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{H}{h}}$$

7) zu S. 51. Es seien M und m die Mantelflächen, J und i die Inhalte der Cylinder, R und r die Radien, H und h die Höhen, so ist der Voraussetzung nach $M = m = 2\pi . R . H = 2\pi . r . h$ folglich $\frac{R}{r} = \frac{h}{H}$. Ferner $I = \pi R^2 H$, $i = \pi r^2 . h$

folglich $$\frac{I}{i} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{R}{r} = \frac{h}{H}, \text{ q. e. d.}$$

8) zu S. 54. Es seien die Peripherien der Polygone um A, B gleich P, p; die Inhalte der Polygone A, B und des Kreises gleich I_A, I_B, I_K, so ist

$$I_A : I_K = P : p$$
$$\text{ferner } I_A : I_B = P^2 : p^2 \text{ (weil ähnlich)}$$
$$\text{folglich } I_A : I_B = I_A^2 : I_K^2$$
$$\text{und mithin } I_K^2 = I_A . I_B \text{ q. e. d.}$$

9) zu S. 80. *Galilei* gebraucht nicht den Ausdruck »anderthalbfache Potenz«, er sagt wörtlich, der Rauminhalt stehe in anderthalbfachem Verhältniss zur Oberfläche (in sequialtera proporzione). Aehnlich hiess es schon früher für das Verhältniss der Quadratwurzel: la subdupla proporzione.

10) zu S. 84. Auf diesen nur angenähert richtigen Satz kommt *Galilei* in späteren Gesprächen zurück.

11) zu S. 98. Der Ausdruck ist nicht ganz correct. Der Autor will betonen, dass E am Hebelarme C wirkt, der Widerstand am Arme $\frac{1}{2} AB$. Er spricht also nicht vom Gleichgewicht der Kräfte, denn sonst hätte er das umgekehrte Verhältniss finden müssen. Er will offenbar sagen, dass E im Vergleich zum Widerstande im Verhältniss C zu $\frac{1}{2} AB$ stärker wirke.

12) zu S. 102. Der Lehrsatz und der Beweis (S. 103) sind textgetreu wiedergegeben. Das Wort »resistenza« haben wir mit Festigkeit übersetzt. Man wird indess bemerken, dass der Begriff in diesem Lehrsatze völlig abweicht von dem Gebrauch desselben Wortes im Gange des Beweises, wie auch in den anderen Sätzen, denn bisher und später ist die Bruchfestigkeit (resistenza a èsser rotti) proportional den Cuben der Dicken, und die Zugfestigkeit (assoluta resistenza, che si fa col tirarlo per diritto) proportional den Quadraten der Dicken. Hier aber wird die Festigkeit zugleich von der Länge abhängig gedacht,

wobei nicht zu verstehen ist, weshalb der Autor dieselbe umgekehrt proportional den Längen annimmt, während noch wenige Zeilen vorher eine Abhängigkeit nach dem umgekehrten Verhältniss der Quadrate der Längen behauptet worden war (S. 102). Ein Versehen im Druck kann nicht vorliegen, da im Beweise die These noch zweimal vorkommt »die Festigkeit von *GD* zur Festigkeit von *DF* verhalte sich wie die Linie *FE* zu *EG*« und ebenso die letzte Klammer S. 103. Hier müsste überall stehen das Quadrat der Längen. Versucht man den Begriff der resistenza durch Solidität wiederzugeben, und bezeichnen wir sie mit S, so wäre $S = K \cdot \frac{AB^3}{AB^2 . L^2}$, weil S direct proportional dem Cubus des Radius, und umgekehrt dem Gewicht $AB^2 . L$ mal dem Hebelarm L, also auch

$$S = K \cdot \frac{AB^3}{AB^2 . L^2} = K \cdot \frac{AB}{L^2}$$

$S = 1$ bezeichnet die Bruchfestigkeitsgrenze, und sobald $S > 1$ ist, darf der Cylinder noch belastet werden, bei $S < 1$ findet Ueberlastung und Bruch statt.

Mit solcher Deutung aber entfernen wir uns noch mehr vom Autor, da er den Factor AB^2 im Nenner fortlässt, und ausserdem L statt L^2 schreibt. Schliesslich bleibt nur eine Deutung übrig. *Galilei* sieht vom Eigengewichte der Cylinder vollständig ab, ohne solches aber ausdrücklich hervorzuheben, alsdann wirkt eine beliebige Last stets am Ende der Cylinder am Arme L, also wird $S = K \cdot \frac{AB^3}{L}$. Für diese Deutung spricht ein Satz, den wir später zu Fig. 33 und 35 kennen lernen werden, bei welchem der Autor sich auf den Satz Fig. 22 zurückbezieht und ausdrücklich von Belastungen am Ende des Hebels spricht.

13) zu S. 104. Im Original steht nur resistenza. Dieselbe bedeutet hier sicher Zugfestigkeit. Der Satz wird sich so gestalten: Es seien die Gewichte mit M_A und M_C, die Zugfestigkeiten mit F_A und F_C bezeichnet. Dann ist

$$\frac{M_C}{M_A} = \frac{C^3}{A^3} \text{ und } \frac{F_C}{F_A} = \frac{C^2}{A^2} .$$

Das Verhältniss der Hebelarme wegen Aehnlichkeit der Cylinder bleibt unverändert, folglich

$$\frac{M_C}{M_A} = \left(\frac{F_C}{F_A}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Aber noch einfacher:

$$M = K.C^3$$
$$F = K'.C^2$$

folglich $M = K'' F^{\frac{3}{2}}$

vergleiche auch Anm. 16.

14) zu S. 106. Die Sätze sind völlig correct und bemerkenswerth. Aber einfacher wäre, wenn die Bruchfestigkeit B und r der Radius ist:

$$B = K.r^3$$

und das Moment M, wenn l die Länge ist:

$$M = K'.r^2.l^2 = K''.r^4,$$

weil l proportional r, also $l = c.r$ (wegen der vorausgesetzten Aehnlichkeit). Mithin die Solidität:

$$S = \frac{Kr^3}{K''.r^4} = K'''.\frac{1}{r}.$$

Dieser Ausdruck lehrt alle Specialfälle, die im Texte discutirt werden, leicht unterscheiden. Ist die Grenze der Solidität erreicht, so kann r nicht mehr vergrössert werden, weil dadurch S kleiner werden müsste. Auch erkennt man, dass das Moment des Cylinders mit der vierdrittelten Potenz der Bruchfestigkeit zunimmt, $M = a\,B^{\frac{4}{3}}$, und mit dem Quadrat der Zugfestigkeit $M = a.z^2$.

15) zu S. 107. Der Beweis fällt schwerfällig aus und Herr *Sagredo* klagt. Es wird eben nicht mit Gleichungen operirt, dagegen mit mehrfachen Hülfsgrössen. Es seien die Momente mit M, die Bruchfestigkeiten mit B bezeichnet. Nun ist

$$\frac{M_{FE}}{M_{DG}} = \frac{DE^2}{AC^2}$$

und

$$\frac{M_{DG}}{M_{BC}} = \frac{FD^2}{AB^2}$$

folglich

$$\frac{M_{FE}}{M_{BC}} = \frac{DE^2}{AC^2} \cdot \frac{DF^2}{AB^2}$$

während

$$\frac{B_{FE}}{B_{BE}} = \frac{DF^3}{AB^3}$$

sollen nun die letztgenannten Verhältnisse links einander gleich sein, so muss

$$DF = AB \cdot \frac{DE^2}{AC^2}$$

genommen werden.

Viel einfacher statt in Proportionen, in Gleichungen, wie in Anm. 16, wo derselbe Satz gebracht wird.

Galilei's »dritte und vierte Proportionale« sind folgendermaassen zu verstehen. Wenn es heisst, »zu DE und AC sei J die dritte Proportionale, so ist gemeint

$$J = \frac{AC^2}{DE}.$$

Wenn es heisst: »zu DE und J sei M die dritte und O die vierte Proportionale«, so ist gemeint:

$$M = \frac{J^2}{DE} \text{ und } O = \frac{J^3}{DE^2},$$

so dass auch $DE : J = M : O$.

Alle im Text vorkommenden Beziehungen sind alsdann ganz richtig.

16) zu pag. 108. Der Cylinder A an der Grenze der Bruchfestigkeit giebt die Bedingung

$$K.DC^3 = DC^2.DA^2.$$

Wir verlangen

$$K.x^3 = x^2.E^2$$

wo x der gesuchte Durchmesser und E die gegebene Länge bedeutet. Folglich auch

$$K.DC = DA^2$$
$$K.\ x = E^2$$

und

$$x = DC.\frac{E^2}{DA^2}.$$

Galilei macht

$$\frac{KL}{CD} = \frac{E}{DA}$$

daher wird

$$x = \frac{KL^2}{CD} = MN,$$

also MN die dritte Proportionale zu CD, KL. Im Text wird Zugfestigkeit und Bruchfestigkeit einfach mit resistenza bezeichnet, das eine Mal proportional den Quadraten und gleich darauf proportional den Cuben gesetzt. Der scheinbare Widerspruch wird gehoben, indem das erstemal die Cylinder A und E ähnlich sind, und das Verhältniss der Arme fortgelassen wird, daher die Gewichte ohne Hebelarm mit den Zugwiderständen verglichen werden.

17) zu S. 108. Vergleiche Anm. 15, wo derselbe Gedankengang wie hier im Text in Gleichung gesetzt ist mit Vermeidung der Hülfsgrössen J, M und O. Soll FD construirt werden, so braucht man eine einzige Hülfsgrösse, etwa $x = \frac{AC^2}{AB}$, dann ist $FD = \frac{DE^2}{x}$ die Lösung (Fig. 25), oder man bildet $z = AB \cdot \frac{DE}{AC}$, wie *Galilei* thut (Anm. 16).

18) zu S. 111. Man verlangt $AC.(AC + 2D) = AG^2$. Da $AH = AC + 2D$ gemacht worden ist, so wird $AG^2 = AC.AH$ die Aufgabe lösen.

19) zu S. 114. Auf Zeile 12 von oben haben wir in Klammern das Wort »umgekehrt« hinzugefügt, entsprechend dem Schlussresultat, Zeile 9 und 10 von unten. Uebersichtlicher geschrieben ist:

$$\frac{A+B}{E+F} = \frac{A+B}{B} \cdot \frac{B}{F} \cdot \frac{F}{E+F}$$

aber

$$\frac{A+B}{B} = \frac{BA}{AC}$$

$$\frac{B}{F} = \frac{DB}{BC}$$

und

$$\frac{F}{E+F} = \frac{DA}{AB}$$

folglich

$$\frac{A+B}{E+F}=\frac{BA}{AC}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{DA}{AB}=\frac{DA.DB}{AC.BC}=\frac{\text{Rechteck } ADB}{\text{Rechteck } ACB}.$$

20) zu S. 115. Uebersichtlicher wäre:

$$E : G = G : F = AD : S$$

und $S < AD$; ferner $AH = S$ in den Halbkreis AHD eingetragen, $RD = HD$ gemacht. Dann ist

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 .$$

In R ein Loth NR bis zum Halbkreis errichtet, giebt

$$\begin{aligned} AD^2 &= NR^2 + RD^2 \\ &= AH^2 + HD^2 \\ &= AH^2 + RD^2 \text{ (weil } HD = RD) \end{aligned}$$

folglich

$$NR^2 = AH^2$$

und

$$NR^2 = AR.RB = AH^2 = S^2$$

da nun

$$\frac{S^2}{AD^2} = \frac{F}{E}$$

so ist

$$\frac{AR.RB}{AD^2} = \frac{F}{E}, \text{ q. e. d.}$$

21) zu S. 116. Im Gegensatz zu dem auf Fig. 22 behandelten Problem wird hier ausdrücklich von einer in B angebrachten neuen Kraft gesprochen. Es handelt sich also nicht um das Tragen des Eigengewichtes. Die Soliditäten bei DA und JC verhalten sich wie BA zu BC. Die Festigkeiten bei OC und DA dagegen wie BC^2 zu BA^2. Von dem Verhältniss der Arme darf abgesehen werden, weil CB zu CN wie AB zu AN, daher ist AD bruchfester als CO im Verhältniss von BC zu AB.

22) Der Voraussetzung gemäss ist:

$$\frac{BE}{FD} = \frac{AE^2}{CF^2} \text{ und } \frac{A}{C} = \frac{AE}{CF}$$

ferner

$$\begin{aligned} F.FD &= C.FC \\ B.EB &= A.AE \end{aligned}$$

wenn die Kräfte an dem Hebel mit dem entsprechenden Buchstaben bezeichnet werden; mithin ist

$$\frac{B}{D} \cdot \frac{EB}{FD} = \frac{A}{C} \cdot \frac{AE}{FC} = \frac{AE^2}{FC^2} = \frac{EB}{FD}$$

folglich

$$B = D \text{ , q. e. d.}$$

23) zu S. 123. Bekanntlich ist das ein Irrthum, da die Kette die Form der sogenannten Kettenlinie bildet, welche nur äussere Aehnlichkeit mit der Parabel hat.

24) zu S. 125. Zu JL und RS die 4. Proportionale heisst:

$$V = \frac{RS^3}{JL^2} \text{ oder } V : RS = RS^2 : JL^2.$$

25) zu S. 125. Nennen wir die Widerstände von AE, JN, RM — w_1, w_2, w_3, so ist

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{AB}{JL}\,; \quad \frac{w_2}{w_3} = \frac{JL^3}{RS^3} = \frac{JL}{V}$$

folglich

$$\frac{w_1}{w_3} = \frac{AB}{V}\,, \quad \text{wo } V = \frac{RS^3}{JL^2}$$

gesetzt ist.

INHALT.

Erster Tag.

Zweiter Tag.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.