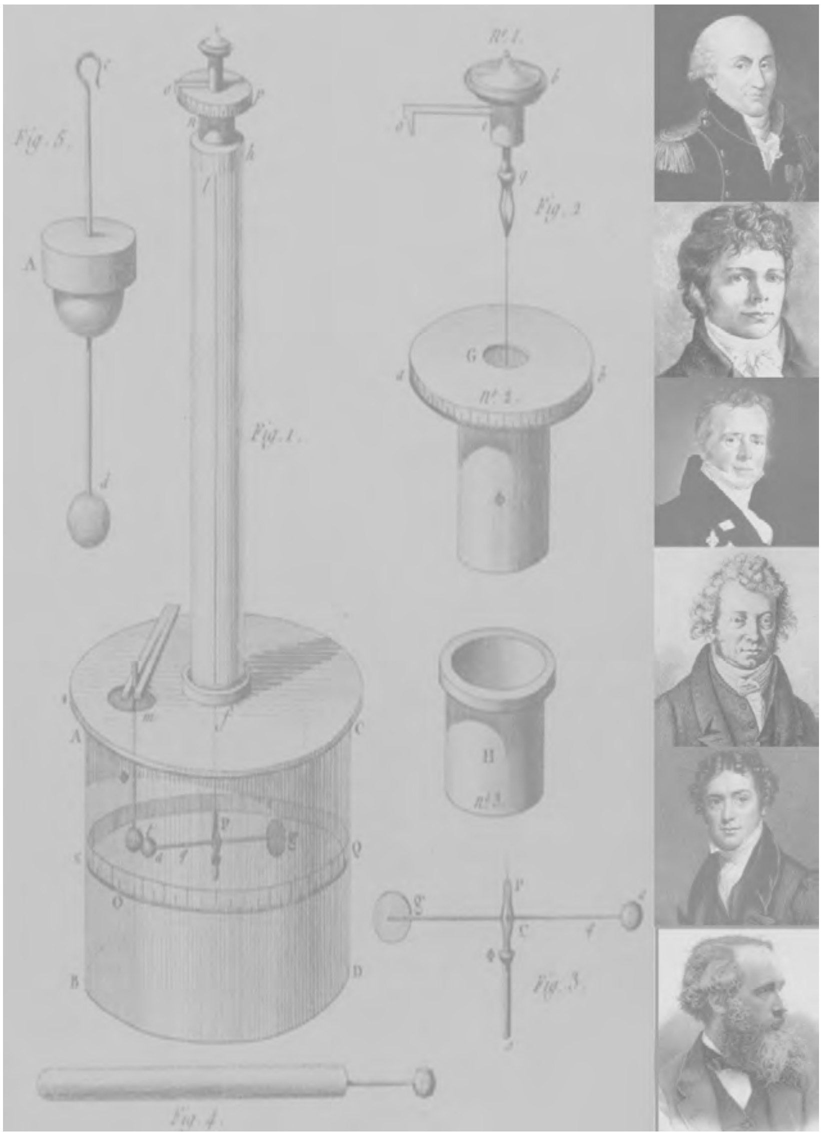
Unterrichtsmaterialien zum Kurs

Grundlagen der Elektrotechnik



Coulomb Schelling Oersted Ampere Faraday Maxwell

Coulombsche Drehwaage – Entwurfsskizze Coulombs von 1784

Erarbeitet und zusammengestellt für den Elektrotechnikunterricht in der Klasse 12 der Fachoberschule

designed by

sic Ars didactica

Verstehen lehren

Jochen Sicars

Trautheim bei Darmstadt

jochensicars@gmail.de

Schwerpunktfach

Elektrotechnik in der Fachoberschule

Klasse 12 – Organisationsform **B**

Technik kommt ohne Physik aus, wie der Filmstar ohne Lehrzeit und der faschistische Staatsmann ohne Bildung.

(Max Horkheimer)

Coulomb Oersted Ampére Ohm Kirchhoff Gauß Faraday Maxwell

Themenfeld ET **1** : **Elektrisches Strömungsfeld und GS-Netzwerke**

A. Mechanik
B. Elektrische Ladung
C. Elektrisches Feld
D. Potential und Spannung
E. Kapazität und Kondensator
F. Laden und Entladen
G. Strömungsfeld
H. Gleichstrom-Netzwerke

Themenfeld ET **2** : **Magnetisches Feld**

A. Magnetische Kraft
B. Grundgrößen des Magnetfeldes
C. Stoffe im Magnetfeld
D. Magnetischer Kreis

Themenfeld ET **3** : **Induktion und Wechselstrom**

A. Induktionsvorgänge und deren Gesetze
B. Selbstinduktion und RL-Schaltvorgänge
C. Sinusförmige Wechselgrößen
D. Mathematischer Exkurs: Komplexe Zahlen
E. Komplexe Wechselstromkreise

Themenfeld ET **4** : **Elektrische Messtechnik**

A. Oszilloskop
B. Strom- und Spannungsmesser
C. Leistungsmesser

Heinrich-Emanuel-Merck-Schule Darmstadt

Fachoberschule – Schwerpunkt Elektrotechnik

Zur didaktischen Konzeption des Faches »Elektrotechnik« für die Organisationsform **B**

Didaktische Vorbemerkung

In der folgenden thematischen Kurzdarstellung einiger Themenfelder soll stichwortartig das derzeit an der Fachoberschule der Heinrich-Emanuel-Merck-Schule praktizierte didaktische Strukturkonzept des Schwerpunktfaches »Elektrotechnik« skizziert werden. Es wurde entwickelt auf der Grundlage des von der zuständigen Fachkonferenz im Jahre 2008 nach Themenfeldern modifizierten und modularisierten Kursstrukturplanes für die schwerpunktbezogenen Fächer der Fachoberschule und ist darüberhinaus konzeptioneller Bestandteil des Schulprogramms der Heinrich-Emanuel-Merck-Schule.

Schülerinnen und Schüler, die eine Fachoberschule mit dem Schwerpunkt »Elektrotechnik« in der Form B besuchen, haben in der Regel eine mindestens dreijährige Berufsausbildung in einem anerkannten Elektroberuf mit dem Gesellen- oder Facharbeiterbrief abgeschlossen. Daher kann bei diesen Schülern ein Grundverständnis elektrotechnischer Zusammenhänge vorausgesetzt werden. Was die Grundlagen der Elektrotechnik anbelangt, kann angenommen werden, daß im Berufsschulunterricht die Begriffe Strom, Spannung, Widerstand, elektrische Leistung und Arbeit sowie die Kirchhoffschen Gesetze, die Grundschaltungen der Elektrotechnik, Grundlegungen zum magnetischen Feld, die elektromagnetische Induktion sowie die Grundlagen der Wechselstromlehre erarbeitet worden sind. Auf diesen Voraussetzungen baut das folgende Unterrichtskonzept für die Fom B der Fachoberschule auf. Durch teilweise intensive Wiederholungen einzelner Themen und ergänzende Vertiefungen sollen Unterschiede in den Voraussetzungen weitgehend kompensiert werden. Das Konzept kann sowohl hinsichtlich der zeitlichen Schwerpunktsetzungen einzelner Themensequenzen als auch im Hinblick auf die thematische Abfolge so flexibel variiert werden, dass auch Schüler aus vollschulischen Berufsbildungsgängen mit Assistentenabschluß (wie z.B. aus zweijährigen Berufsfachschulen für Informationstechnik oder verwandten Fachrichtungen) durchaus ohne besonderen zusätzlichen Lernaufwand das Schwerpunktfach »Elektrotechnik« erfolgreich bewältigen können.

Im Hinblick auf die **Verknüpfung von allgemeiner und beruflicher Bildung** handelt es sich um ein integriertes Konzept, das sowohl in den Organisationsformen A und B der Fachoberschule als auch mit einigen unwesentlichen Änderungen in der Grundstufe der Berufsschule mehrere Jahre erprobt und weiterentwickelt wurde, dies allerdings nur in einer Zeit, als es in der Berufsschule noch um die wissenschaftsorientierte Vermittlung systematischen Grundlagenwissens ging. Bekanntlich ist diese Zielsetzung inzwischen der Lernfeld-Didaktik geopfert worden. Gleichwohl bleibt es seiner didaktischen Intention nach schulformunabhängig, kann also immer dort Anwendung finden, wo es um die Vermittlung der Grundlagen der Elektrotechnik geht – und darum geht es zumindest in rudimentärer Form und punktuell auch bei lernfeldstrukturierten Lehrplänen.

Das Konzept ist zugleich auch **wissenschaftsorientiert**, denn es ist in seiner systematischen Strukturierung durch die Prinzipien der Theorie der Elektrodynamik von Faraday und Maxwell bestimmt. Für die Fachoberschule ist es im Hinblick auf die angestrebte Studierfähigkeit zugleich auch insoweit propädeutisch, als es sich von den Themengebieten her an dem orientiert, was im Grundstudium des Studienganges »Elektrotechnik« an der Fachhochschule vermittelt wird.

Soweit es für das Verständnis insbesondere so zentraler Grundbegriffe wie »Bewegung«, »Kraft«, »Feld«, »Spannung« und »Strom« von Bedeutung ist, greift das folgende Konzept auch auf Elemente einer **historisch-genetischen Darstellung** zurück. Damit ist es zugleich auch prinzipiell **fachübergreifend** angelegt. So erfordert beispielsweise ein umfassendes Verständnis der Entwicklung der Elektrodynamik und ihrer Begriffssystematik seit den ersten systematischen, durch fernwirkungstheoretische Modelle geprägten Bemühungen von Coulomb gegen Ende des 18. Jahrhunderts neben solidem Grundlagenwissen in der Mechanik sowohl Kenntnisse über die philosophischen Grundlagen etwa der Faradayschen Nahewirkungstheorie (Dynamismus) als auch über die gesellschaftlich-politischen und ökonomischen Veränderungen in der Epoche der Industrialisierung.

Modularisierter Strukturplan für das Schwerpunktfach **Elektrotechnik** in der **Fachoberschule**

Beschluß der Fachkonferenz »Elektrotechnik« der Fachoberschule vom **19.2.2008**

Klasse **11**: Elektrotechnik

Klasse	**Themen- und Aufgabenfelder**	Std.	**Modulbezogene Praxiskurse**	Std.
11.1	• Modul 11.1.**1**: Elektrisches Strömungsfeld und Grundschaltungen der Elektrotechnik	80	• 11.1.**2**: ET-Laborkurs **1** : Einführung in die Praxis der elektrotechnischen Laborarbeit	20
11.2	• Modul 11.2.**1**: Gleichstrom-Netzwerke (Kreisstrom-, Helmholtz- und Ersatzquellenverfahren)	50	• 11.2.**2**: ET-Laborkurs **2** : Grundlegende Übungen zur elektrischen Messtechnik	20
	• Modul 11.2.**3**: Grundbegriffe des elektrischen Feldes (Feldstärke, Erregung, Feldfluß etc.)	30		
	Gesamtstunden	160	Gesamtstunden	40
	Wochenstunden	4	Wochenstunden	1

Klasse **12**: Organisationsform **A**

Klasse	**Themen- und Aufgabenfelder**	Std.	Wahlpflichtfach: **ES-Module**	Std.
12.1	• Modul 12.1.**1**: Kondensator (Kapazität, Bauformen, Ladevorgänge) • Modul 12.1.**2**: Magnetisches Feld – Grundbegriffe	100	• Modul 12.1.**4**: Grundlagen der Halbleitertechnik und Halbleiterbauelemente	60
	• Modul 12.1.**3**: Elektrische Meßtechnik [1)]	20		
12.2	• Modul 12.2.**1**: Magnetisches Feld – Anwendungen (Leiter, Hohlleiter, magnetischer Kreis)	40	• Modul 12.2.**3**: Analoge Schaltungen mit Halbleiter-bauelementen	60
	• Modul 12.2.**2**: Induktion, Grundlagen der Wechsel-stromtechnik	80		
	Gesamtstunden	240	Gesamtstunden	120
	Wochenstunden	6	Wochenstunden	3

Klasse **12**: Organisationsform **B**

Klasse	**Themen- und Aufgabenfelder**	Std.	Wahlpflichtfach: **ES-Module**	Std.
12.1	• Modul 12.1.**1**: Elektrisches Feld • Modul 12.1.**2**: Gleichstrom-Netzwerke	110	• Modul 12.1.**3**: Grundlagen der Halbleitertechnik und Halbleiterbauelemente	60
12.2	• Modul 12.2.**1**: Magnetisches Feld	60	• Modul 12.2.**3**: Analoge Schaltungen mit Halbleiterbauelementen	60
	• Modul 12.2.**2**: Induktion und Wechselstromkreise	50		
	• Modul 12.2.**3**: Elektrische Meßtechnik [1)]	20		
	Gesamtstunden	240	Gesamtstunden	120
	Wochenstunden	6	Wochenstunden	3

[1)] Kann bedarfsweise halbjahres- und modulübergreifend gestaltet werden (z.B. Oszilloskop: 1. Hj – Elektromagn. Meßwerke: 2. Hj) und/oder in andere Lehrgänge integriert werden (z.B. Meßbrücken).

Schwerpunktfach

Elektrotechnik in der Fachoberschule

Klasse 12 – Organisationsform **B**

Technik kommt ohne Physik aus, wie der Filmstar ohne Lehrzeit und der faschistische Staatsmann ohne Bildung.

(Max Horkheimer)

Coulomb Oersted Ampére Ohm Kirchhoff Gauß Faraday Maxwell

Themenfeld ET **1** : **Elektrisches Feld und GS-Netzwerke**

A. Mechanik
B. Elektrische Ladung
C. Elektrisches Feld
D. Potential und Spannung
E. Kapazität und Kondensator
F. Laden und Entladen
G. Strömungsfeld
H. Gleichstrom-Netzwerke

Themenfeld ET **2** : **Magnetisches Feld**

A. Magnetische Kraft
B. Grundgrößen des Magnetfeldes
C. Stoffe im Magnetfeld
D. Magnetischer Kreis

Themenfeld ET **3** : **Induktion und Wechselstrom**

A. Induktionsvorgänge und deren Gesetze
B. Selbstinduktion und RL-Schaltvorgänge
C. Sinusförmige Wechselgrößen
D. Mathematischer Exkurs: Komplexe Zahlen
E. Komplexe Wechselstromkreise

Themenfeld ET **4** : **Elektrische Messtechnik**

A. Oszilloskop
B. Strom- und Spannungsmesser
C. Leistungsmesser

E-Mail: sicars@hems.de – © **Jochen Sicars**

Heinrich-Emanuel-Merck-Schule Darmstadt

Fachoberschule – Schwerpunkt Elektrotechnik

Zur didaktischen Konzeption des Faches »Elektrotechnik« für die Organisationsform **B**

Themenfeld »Elektrotechnik 1«: Elektrisches Feld und Gleichstrom-Netzwerke

A. Vorbetrachtung: Einige Grundbegriffe der Newtonschen Mechanik (Arbeitsblatt Nr. 0)

- Die Newtonsche Mechanik als erste entwickelte physikalische Theorie und historisch-logische Voraussetzung einer elektrischen Theorie
- Geschwindigkeit, Beschleunigung und einfache Bewegungsformen
- Ursache von Bewegungen: Trägheitsprinzip und Kraftbegriff
- Kreisbewegung und Gravitationsgesetz

B. Elektrische Kraft und elektrische Ladung (Fernwirkungstheorie)

1. Elektrische Kraft und elektrische Ladung (Arbeitsblatt Nr. **1**)
   - Wahrnehmung verschiedener Fernwirkungen zwischen Körpern
   - Notwendigkeit der Unterscheidung von mechanischen und elektrischen »Fernkräften«
   - Elektrische Ladung als Ursache elektrischer Kräfte
2. Coulombsches Gesetz als Fernwirkungsgesetz
   - Gesetze zur Fernwirkung von mechanischen und elektrischen Kräften (Arbeitsblatt Nr. **1 a** / S. 1)
   - Torsionsdrehwaagen zur Messung mechanischer und elektrischer »Fernkräfte«
   - Zur Theorie der Fernwirkung von elektrischen Kräften (Arbeitsblatt Nr. **1 a** / S. 2)
   - Übungsaufgaben zum Coulombschen Gesetz (Arbeitsblatt Nr. **1 a** / S. 3)
   - Mathematische Exkurse zum »Vektorbegriff« und zur »Geradengleichung« (Arbeitsblatt Nr. **1 b** und **c**)

C. Elektrische Feld – Grundgrößen und Gesetze

1. Die Nahewirkungstheorie (Feldtheorie) elektrischer Kräfte von Michael Faraday
   - Einwände Faradays gegen die Fernwirkungstheorie (Arbeitsblatt Nr. **2** / S. 1)
   - Michael Faraday zur Übertragung elektrischer Kräfte und Kraftlinienbegriff (Arbeitsblatt Nr. **2** / S. 2)
   - Beschreibung elektrischer Felder mit dem Feldlinienmodell (Arbeitsblatt Nr. **2** / S. 3)
2. Die elektrische Feldstärke E als Wirkungsgröße des elektrischen Feldes
   - Zusammenhang zwischen elektrischer Kraft und Probeladung (Arbeitsblatt Nr. **3**)
   - Definition (Meßvorschrift) der elektrischen Feldstärke E
3. Die elektrische Erregung D als Ursachengröße des elektrischen Feldes
   - Influenzwirkung des elektrischen Feldes (Arbeitsblatt Nr. **4**)
   - Zum Problem der feldtheoretischen Bestimmung einer Ursachengröße (Arbeitsblatt Nr. **5**)
   - Definition der elektrischen Erregung D als Ursachengröße des elektrischen Feldes
   - Meßverfahren zur Messung der elektrischen Feldgrößen E und D (Arbeitsblatt Nr. **5 a**)
4. Das Grundgesetz des elektrostatischen Feldes (Arbeitsblatt Nr. **6**)
   - Verknüpfung von Ursachengröße D und Wirkungsgröße E
   - Elektrische Feldkonstante und Dielektrizitätskonstante (auch: Permittivität)
5. Der elektrische Feldfluß (Arbeitsblatt Nr. **6 a**)
   - Elektrostatisches Grundgesetz und Gaußscher Satz
   - Definition des elektrischen Feldflusses als Produkt aus Feldstärke E und Wirkungsfläche A
   - Felderzeugende Ladung, influenzierte Ladung und Modell der Hüllfläche
6. Erste Anwendungsbeispiele zu den elektrischen Feldgrößen

- Erste Berechnungsbeispiele zum elektrostatischen Grundgesetz (Arbeitsblatt Nr. **6 b**)
- Feldtheoretische Begründung des Coulombschen Gesetzes (Arbeitsblatt Nr. **6 c**)
- Anziehungskraft zwischen zwei Kondensatorplatten (Arbeitsblatt Nr. **6 d**)
- Überlagerung elektrischer Felder von Punktladungen (Arbeitsblatt Nr. **6 e**)

D. Elektrisches Potential und elektrische Spannung

1. Exkurs: Physikalische Arbeit und Energie – Erste Bestimmungen
   - Mechanische Arbeit und potentielle Energie im Gravitationsfeld (Arbeitsblatt Nr. **7**)
   - Elektrische Arbeit und potentielle Energie im elektrischen Feld (Arbeitsblatt Nr. **7**)
2. Elektrisches Potential als skalare elektrische Feldgröße
   - Überführungsarbeit im elektrischen Feld (Arbeitsblatt Nr. **7 a** / S. **1**)
   - Definition des elektrischen Potentials als Arbeitsfähigkeit des elektrischen Feldes in einem Feldpunkt
3. Elektrisches Potential und elektrische Spannung
   - Elektrische Spannung als Potentialdifferenz im elektrischen Feld (Arbeitsblatt Nr. **7 a** / S. **2**)
   - "Expander"-Modell zum Begriff der elektrischen Spannung (Arbeitsblatt Nr. **7 a** / S. **3**)
   - Erste Übungsaufgaben zum Begriff der elektrischen Spannung (Arbeitsblatt Nr. **7 a** / S. **4**)
   - Nachtrag I: Veranschaulichung von Potentialfeldern (Arbeitsblatt Nr. **7 a** / S. **5**)
   - Nachtrag II: Berechnung von Arbeit und Potential im elektrischen Feld (Arbeitsblatt Nr. **7 b**)
   - Nachtrag III: Potentialverlauf im elektrischen Feld einer Punktladung (Arbeitsblatt Nr. **7 c**)
   - Übungsaufgaben zum elektrostatischen Feld (Arbeitsblatt Nr. **8**)

E. Begriff der Kapazität und Kondensator als Bauelement

1. Ladung und Kapazität einer Kondensatoranordnung
   - Zusammenhang von Ladung und Spannung im homogenen elektrischen Feld (Arbeitsblatt Nr. **8 a**)
   - Allgemeine Definition der Kapazität (Arbeitsblatt Nr. **8 a**)
2. Sonderfälle: Kapazität verschiedener Kondensatoranordnungen
   - Kapazität des Plattenkondensators (Arbeitsblatt Nr. **8 a**)
   - Kapazität des Kugelkondensators (Arbeitsblatt Nr. **8 a**)
   - Kapazität des Zylinderkondensators
3. Isolierstoffe im elektrischen Feld
   - Polarisation von Isolierstoffen im elektrischen Feld (Arbeitsblatt Nr. **9**)
   - Verschiebungs- und Richtungspolarisation
   - Einfluß des Dielektrikums auf die Kapazität (Arbeitsblatt Nr. **9 a**)
4. Schaltungen von Kondensatoren
   - Parallelschaltung von Kondensatoren (Arbeitsblatt Nr. **10**)
   - Reihenschaltung von Kondensatoren
   - Berechnung von Kondensatoren und Kondensatorschaltungen (Arbeitsblatt Nr. **11**)

F. Laden und Entladen von Kondensatoren und elektrische Feldenergie

1. Laden von Kondensatoren mit konstantem Ladestrom
   - Ladefunktionen (Arbeitsblatt Nr. **11 a**)
   - Zeitdiagramme (Arbeitsblatt Nr. **11 a**)
2. Laden von Kondensatoren mit konstanter Ladespannung und Entladen
   - Übersicht: Lade- und Entladevorgänge (Arbeitsblatt Nr. **11 b**)
   - Der Einfluß von R und C auf Lade- und Entladevorgänge (Arbeitsblatt Nr. **11 b**)
3. Elektrische Feldenergie im Kondensator
   - Begründung der Formel für die im Kondensator gespeicherte elektrische Feldenergie (Arbeitsblatt Nr. **11 c**)
   - Energieumwandlung beim Zusammenschalten zweier Kondensatoren

4. Übungsaufgaben zu Lade- und Entladevorgängen (Arbeitsblatt Nr. **11 d**)
5. Wichtiger Nachtrag: Begründung der e-Funktionsgleichungen
   - Darstellung mit elementarer Mathematik (Arbeitsblatt Nr. **11 e**)
   - Darstellung als Differentialgleichung (Arbeitsblatt Nr. **11 f**)
6. Anwendungsbeispiel: RC-Schaltungen als Impulsformer (Arbeitsblatt Nr. **11 g**)

G. Strömungsfeld, elektrischer Strom und elektrischer Widerstand

1. Übergang vom elektrostatischen Feld zum elektrischen Strömungsfeld
   - Nichtleiter, Isolierstoff und Leiter im elektrostatischen Feld (Arbeitsblatt Nr. **12 a**)
   - Elektrisches Strömungsfeld als Feld strömender Ladungen
2. Ladungsströmung in einem Leiter und Begriff des elektrischen Stromes
   - Präzisierung des Begriffs der Ladungsströmung (Arbeitsblatt Nr. **12 b**)
   - Definition der elektrischen Stromstärke
3. Stromdichte und Feldstärke im elektrischen Strömungsfeld
   - Die Stromdichte als Maß für die Geschwindigkeit der strömenden Ladung (Arbeitsblatt Nr. **12 c**)
   - Die Elementarform des Ohmschen Gesetzes
   - Übungsaufgabe zur Elementarform des Ohmschen Gesetzes
4. Elektrischer Widerstand und technische Form des Ohmschen Gesetzes
   - Begriff des elektrischen Widerstands (Arbeitsblatt Nr. **12 d**)
   - Technische Form des Ohmschen Gesetzes
   - Berechnung des Leiterwiderstandes
5. Stromleitung in Metallen
   - Driftgeschwindigkeit der freien Elektronen (Arbeitsblatt Nr. **12 e**)
   - Elektrische Arbeit im elektrischen Strömungsfeld (Arbeitsblatt Nr. **12 f**)
   - Nachtrag I: Stromleitung in Metallen als Strömung "freier" Elektronen (Arbeitsblatt Nr. **12 g** / S.1
   - Nachtrag II: Einfluß der Temperatur auf den Widerstand metallische Leiter (Arbeitsblatt Nr. **12 g** / S.2)

H. Schaltungen und Netzwerke mit elektrischen Widerständen

1. Kirchhoffsche Gesetze und Gleichstrom-Netzwerke
   - Wiederholungsübung zur Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen (Arbeitsblatt Nr. **13 a**)
   - Kirchhoffsche Gesetze als Knotenpunkt- und Maschenregel (Arbeitsblatt Nr. **13**)
   - Ermittlung des Gleichungssystems mit dem »vollständiger Baum« (Arbeitsblatt Nr. **14**)
   - Erste Übungen (Arbeitsblatt Nr. **14** und **15**)
2. Gleichstrom-Netzwerke – Weitere Berechnungsverfahren
   - Überlagerungsverfahren nach H. v. Helmholtz (Arbeitsblatt Nr. **16**)
   - Kreisstromverfahren (Arbeitsblatt Nr. **17**)
   - Übungen zum Kreisstromverfahren (Arbeitsblatt Nr. **18**)
   - Nachtrag: Dreieck- und Sternschaltung von Widerständen (Arbeitsblatt Nr. **19**)
   - Ersatzspannungsquellen-Verfahren mit Übungen (Arbeitsblatt Nr. **20**)
3. Nachtrag: Lineare und nichtlineare Widerstände (Arbeitsblatt Nr. **20** a))

1. Zum **Begriff** der **mathematischen Funktion**

Wird jedem beliebigen Wert einer unabhängigen Veränderlichen (Variablen) **x** durch eine Vorschrift einer davon abhängigen Veränderlichen (Variablen) **y** ein bestimmter Wert zugeordnet, so heißt diese Zuordnung eine **Funktion**. Man sagt auch kurz "**y** *ist eine Funktion von* **x**" und schreibt in symbolischer Form: **y** = f(**x**).

2. **Formen** der **Darstellung** einer **Funktion** (Beispiel: lineare Funktion)

a) Darstellung in Form einer **Wertetabelle**

x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12

· 2 · 3 · 4

Als 1. Beispiel wurde in der nebenstehenden Wertetabelle eine Funktion angenommen, nach der sich die Variable **y** in Abhängigkeit von der unabhängigen Variablen **x** auf folgende Weise ändert:

Wird der **x**–Wert **verdoppelt**, so **verdoppelt** sich der **y**–Wert,

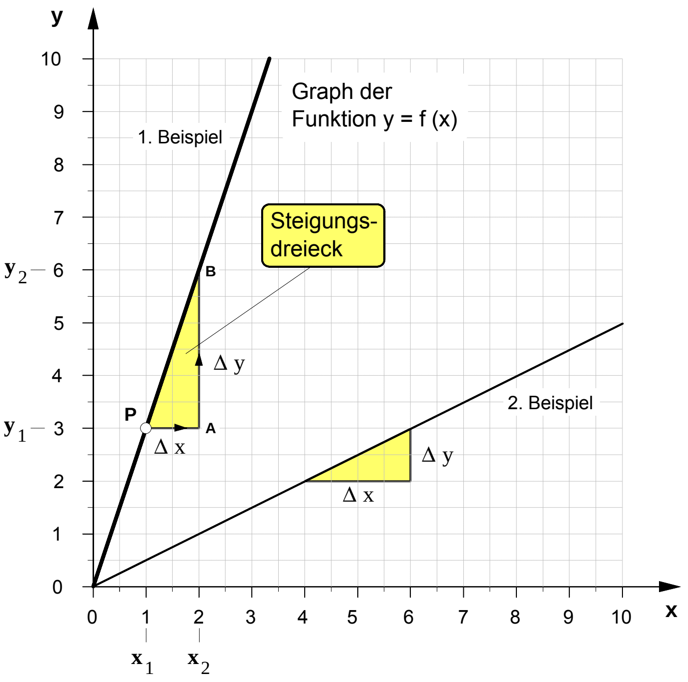
wird der **x**–Wert **verdreifacht**, so **verdreifacht** sich der **y**–Wert,

wird der **x**–Wert **vervierfacht**, so **vervierfacht** sich der **y**–Wert usw..

- Die **y**–Werte ändern sich demnach stets **in gleichem Maße** wie die **x**–Werte. Man sagt auch: *Die* ***y****–Werte sind* ***proportional*** *(verhältnisgleich) zu den* ***x****–Werten*. Als Formel stellen wir diese proportionale Abhängigkeit zwischen zwei Variablen wie folgt dar:

$$\boxed{y \sim x}$$

b) Darstellung der Funktion in Form eines **Graphen** im **x–y–Koordinatensystem**



- Für unsere beiden **Beispiele** ergeben sich folgende
  - ► Steigungsfaktoren

1. Beispiel: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad m = 3$

2. Beispiel: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = 0{,}5$

  - ► und damit folgende Funktionsgleichungen

1. Beispiel: $y = 3 \cdot x$

2. Beispiel: $y = 0{,}5 \cdot x$

c) Darstellung in Form einer **Funktionsgleichung**

- Der Graph der Funktion **y** = f(**x**) ist in unserem Beispiel eine **Gerade**, genauer: Eine Gerade die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht (Ursprungsgerade). Solche Geraden unterscheiden sich allein durch ihre **Steilheit** oder wie man auch sagt: durch ihre **Steigung**.
- Die Funktionsgleichung, mit der eine solche Gerade in algebraischer Form beschrieben wird, heißt **Geradengleichung**. Sie lautet im Fall der Ursprungsgeraden:

$$\boxed{y = m \cdot x}$$

- Der Faktor **m** ist eine **Konstante**. Sein Wert ist ein Maß für die Steilheit einer Geraden. Er wird daher als **Steigungsfaktor** oder kurz als **Steigung** bezeichnet. Seine Definition lautet:

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1 \\ \Delta x &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Graphisch wird der Steigungsfaktor **m** mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks, dem sog. **Steigungsdreieck**, ermittelt. Um das Steigungsdreieck zu zeichnen, geht man von einem beliebigen Punkt **P** auf der Geraden aus und zeichnet von da aus zunächst nach rechts die waagerechte Kathete mit einer frei wählbaren Länge Δ**x**. Von deren rechtem Endpunkt **A** aus zeichnet man eine senkrechte Linie bis diese die Gerade schneidet und bestimmt anschließend die durch den Schnittpunkt **B** begrenzte Länge Δ**y** der senkrechten Kathete. Der Wert des Steigungsfaktors **m** läßt sich dann mit Hilfe der obigen Definitionsformel berechnen.

Lehrgang : **TECHNISCHE MATHEMATIK**	Name: TEMA-1.DOC - 13.09.05
Arbeitsblatt Nr. : **Zehnerpotenzen**	

1. Zehnerpotenzen und Vorsätze nach DIN 1301

Zehnerpotenz	Zahl	Bezeichnung	Vorsatz	Kurzzeichen	Beispiel
10^0	= 1	Eins			
10^1	= 10	Zehn	Deka	da	dag Dekagramm
10^2	= 100	Hundert	Hekto	h	hl Hektoliter
10^3	= 1 000	Tausend	Kilo	k	km Kilometer
10^4	= 10 000	Zehntausend			
10^5	= 100 000	Hunderttausend			
10^6	= 1 000 000	Million	Mega	M	MW Megawatt
10^9	= 1 000 000 000	Milliarde	Giga	G	GHz Gigahertz
10^{12}	= 1 000 000 000 000	Billion	Tera	T	TΩ Teraohm
10^{-1}	= 0,1	Zehntel	Dezi	d	dm Dezimeter
10^{-2}	= 0,01	Hundertstel	Zenti	c	cm Zentimeter
10^{-3}	= 0,001	Tausendstel	Milli	m	mV Millivolt
10^{-4}	= 0,0001	Zehntausendstel			
10^{-5}	= 0,00001	Hunderttausendstel			
10^{-6}	= 0,000001	Millionstel	Mikro	µ	µA Mikroampere
10^{-9}	= 0,000000001	Milliardstel	Nano	n	nC Nanocoulomb
10^{-12}	= 0,000000000001	Billionstel	Pico	p	pF Picofarad

2. Aufgabenbeispiele

Stellen Sie die folgenden Größenangaben wie im Beispiel **a)** in Zehnerpotenzform und in Normalform dar.

a) 220 kV = $220 \cdot 10^3$ V = 220 000 Volt

b) 1385 kg =

c) 10 µF =

d) 12,7 µm =

e) 5 mA =

f) 2 MΩ =

g) 35 MW =

h) 0,5 nC =

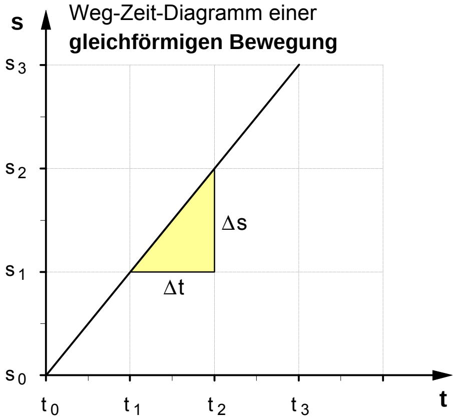
i) 95,6 cm =

j) 85 dm =

k) 75 mA =

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-0-F.DOC - 29.08.01	
Arbeitsblatt Nr. **0** :	**Einige Grundbegriffe der Mechanik**	Seite **1**

1. Geschwindigkeit



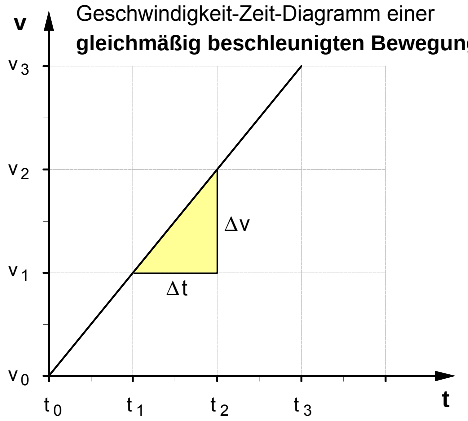
$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$ wobei $$\Delta s = s_2 - s_1 \qquad \Delta t = t_2 - t_1$$

Δs ... **Wegänderung** in **m**
Δt ... **Zeit** in **s** , in der die Wegänderung erfolgt
v ... **Geschwindigkeit** in **m/s**

Maßeinheitengleichung:

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{1\text{m}}{1\text{s}} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2. Beschleunigung



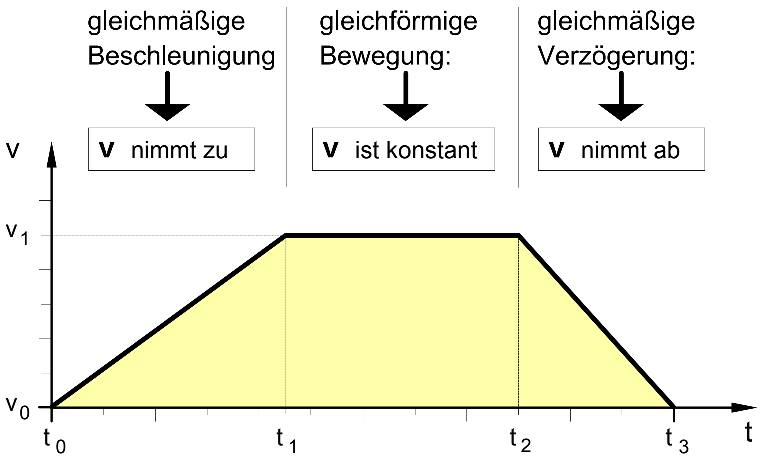
$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$ wobei $$\Delta v = v_2 - v_1 \qquad \Delta t = t_2 - t_1$$

Δv ... **Geschwindigkeits**änderung in **m/s**
Δt ... **Zeit** in **s**, in der die Geschwindigkeitsänderung erfolgt
a ... **Beschleunigung** in **m/s²**

Maßeinheitengleichung:

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{s}} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3. Einfache Bewegungsformen



Wichtiger Hinweis zum v–t–Diagramm:

Die **Fläche** unter der **v–t–Linie** ist ein Maß für den **zurückgelegten Weg s**.

Daraus folgt für die in den einzelnen Zeitabschnitten zurückgelegten Wege:

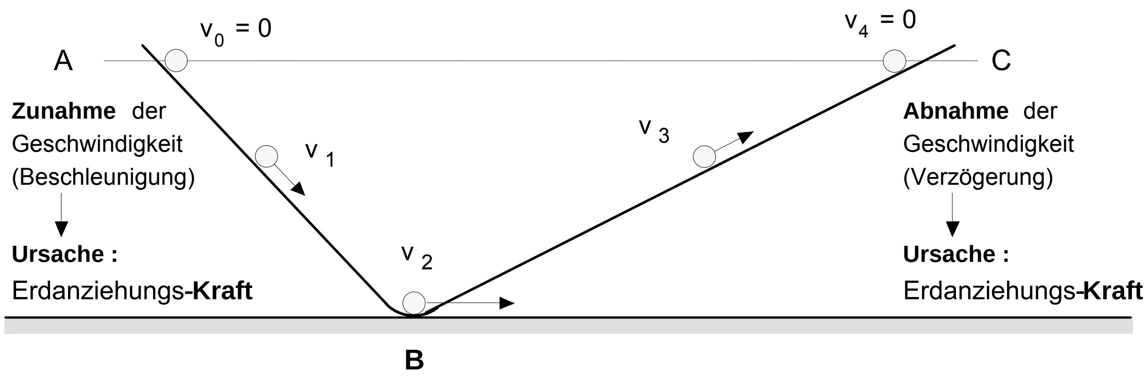
$$\Delta s_1 = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot \Delta t_1 \qquad \Delta t_1 = t_1 - t_0$$
$$\Delta s_2 = v_1 \cdot \Delta t_2 \quad \text{wobei} \quad \Delta t_2 = t_2 - t_1$$
$$\Delta s_3 = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot \Delta t_3 \qquad \Delta t_3 = t_3 - t_2$$

4. Übersicht über die Ursachen von Bewegungen (siehe dazu auch das Trägheitsmodell auf Seite 2)

Bewegungsform	**Ursache**	Theoretische Begründung
• **Gleichförmige** geradlinige Bewegungen	**Trägheit** der Körper	Trägheitsprinzip
• Bewegungen mit Geschwindigkeits-**änderungen** (Beschleunigung, Verzögerung oder Richtungsänderung)	**Kräfte**	Dynamisches Grundgesetz: **F = m · a**

5. Das Trägheitsmodell von Galilei (etwa 1638)

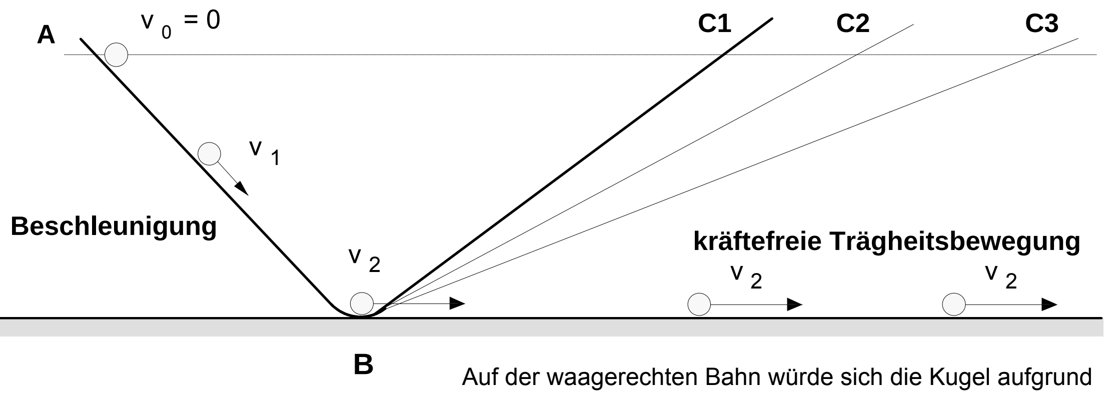
a) Bewegungsformen einer Kugel auf einer **reibungsfreien Kugelrinne** (Modell)



Im Punkt B : Keine Geschwindigkeitsänderung, d.h. die Geschwindigkeit ist an dieser Stelle konstant und die Bewegung damit gleichförmig. In Bewegungsrichtung wirkt keine Kraft, die Bewegung ist kräftefrei. → **Ursache : Trägheit des Körpers**

b) Reibungsfreie Kugelrinne mit verschiedenen Neigungen der rechten schiefen Ebene

Auch wenn man die Neigung der rechten schiefen Ebene immer kleiner wählt, würde die Kugel stets wieder bis zu ihrer Anfangshöhe aufsteigen, wenn man von der Reibung absieht. Je geringer die rechte Bahn geneigt ist, desto länger werden die Bahn und die Laufzeit der Kugel und desto langsamer nimmt die Geschwindigkeit ab, d.h. die Verzögerung wird kleiner und kleiner. Neigt man die rechte Rinne schließlich so weit, daß sich eine **waagerechte Bahn** ergibt, so wäre die Verzögerung der Kugel unendlich klein, sie würde also keine Geschwindigkeits**änderung** mehr erfahren und sich mit der im Punkt **B** erreichten Geschwindigkeit $\mathbf{v_3}$ **gleichförmig** (d.h. mit konstanter Geschwindigkeit) und **geradlinig** weiterbewegen, ohne je zum Stillstand zu kommen, denn auch in diesem Fall hätte sie das Bestreben, wieder bis zu ihrer Anfangshöhe aufzusteigen. Da sich die Kugel auf der waagerechten Bahn nicht aufgrund einer Kraftwirkung, sondern allein durch ihre Trägheit weiterbewegt, sprechen wir in diesem Fall von einer **kräftefreien Trägheitsbewegung**.



Auf der waagerechten Bahn würde sich die Kugel aufgrund ihrer Trägheit mit der in Punkt B erreichten Geschwindigkeit **gleichförmig und geradlinig weiterbewegen.**

Fazit zum **Begriff der Kraft**:

- Ein Körper, auf den **keine Kraft** wirkt und damit **kräftefrei** ist, verharrt im Zustand der **gleichförmigen geradlinigen Bewegung** oder der **Ruhe**. (Trägheitsprinzip von Newton)
- Wenn sich ein Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung befindet, bedarf es einer **Kraft**, um diesen Zustand zu ändern. Die **Kraft** ist demnach die **Ursache** der **Bewegungsänderung** (Beschleunigung, Verzögerung oder Richtungsänderung) von Körpern.
- Die **Größe einer Kraft**, die auf einen Körper wirkt, ist nach dem **dynamischen Grundgesetz** durch die von der **Masse** abhängige **Trägheit** des beschleunigten Körpers und durch seine **Beschleunigung** bestimmt. Als Formel ausgedrückt lautet das dynamische Grundgesetz: $\mathbf{F = m \cdot a}$

6. **Kreisbewegung** (Beispiel: Der Mond bewegt sich annähernd auf einer Kreisbahn um die Erde.)

- Bei jeder Kreisbewegung ändert der Körper ständig seine Bewegungs**richtung**. Diese Richtungsänderung wird dadurch bewirkt, daß der Körper ständig zum Mittelpunkt der Kreisbahn **beschleunigt** wird.
- Der auf einer Kreisbahn sich bewegende Körper (wie z.B. der Mond) führt **stets zwei Bewegungen gleichzeitig** aus:

  1. Eine zum Zentrum der Kreisbahn hin gerichtete **beschleunigte Bewegung** (Beim Mond handelt es sich hierbei um eine "Fallbewegung" mit der Beschleunigung $\vec{a}$ in Richtung Erdmittelpunkt.)

  Ursache dieser Beschleunigung ist eine **Kraft**, die sog. **Zentripetalkraft** $\vec{F}$ (Beim Mond ist dies die Massenanziehungskraft der Erde. Sie verhindert zugleich, daß sich der Mond tangential von der Kreisbahn in den Weltraum entfernt).

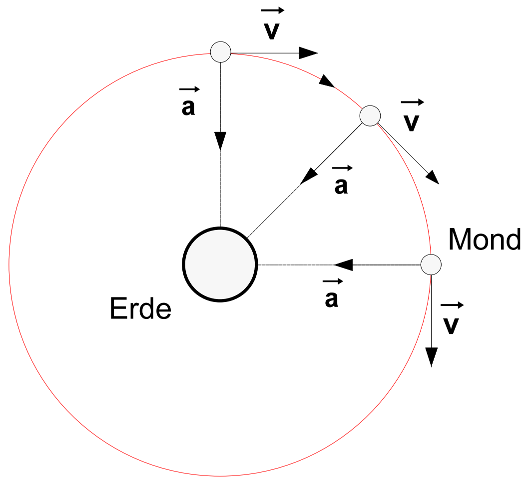
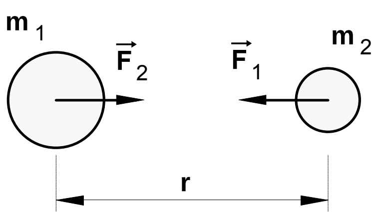


Bild 1: Die Mondbewegung als Modell einer Kreisbewegung

  2. Eine tangential nach außen gerichtete **gleichförmige** und **geradlinige Bewegung** mit der Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$. (Sie verhindert, daß der Mond gleichsam zur Erde fällt.)

  Ursache dieser gleichförmigen und geradlinigen Bewegung ist die **Trägheit** des kreisenden Körpers.

7. **Das Gravitationsgesetz** (Gesetz von Newton über die Anziehungskraft zwischen zwei Körpermassen)



Die Körper mit den Massen $\mathbf{m_1}$ und $\mathbf{m_2}$ ziehen sich wechselseitig mit einer jeweils gleich großen Kraft **F** an ($\mathbf{F_1} = \mathbf{F_2} = \mathbf{F}$).

$$\boxed{F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

mit

$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$

(Gravitationskonstante)

> Der Betrag **F** der Massenanziehungskraft, mit der sich zwei Körper gegenseitig anziehen, ist proportional zu ihren Massen $\mathbf{m_1}$ und $\mathbf{m_2}$ und umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung **r** ihrer Mittelpunkte.

Merkmale der Massenanziehungkraft (auch: Gravitationskraft)

- Die Gravitationskraft erscheint als **Fernkraft**, d.h. zwischen dem Ort ihrer Entstehung (Körper mit der Masse $\mathbf{m_1}$) und dem Ort ihrer Wirkung (Körper mit der Masse $\mathbf{m_2}$) liegt eine bestimmte "Ferne", der Raum dazwischen wird von ihr scheinbar "übersprungen" ("Fernwirkung" zwischen den Körpern).
- Die Ursache der Gravitationskraft liegt in einer **besonderen Eigenschaft** der **Körper** begründet, nämlich in der, daß sie eine **Masse** besitzen.
- Die Gravitationskraft bewirkt nur eine **Anziehung** der Körper (d.h. es gibt keine Massen*abstoßungskraft*).
- Die Gravitationskraft ist eine **mechanische Kraft**, d.h. sie wird begründet mit der von *Galilei* und *Newton* entwickelten *Theorie der Mechanik*.

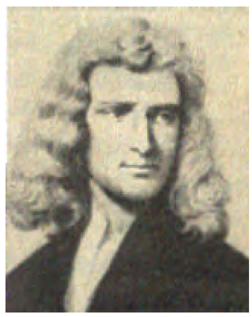
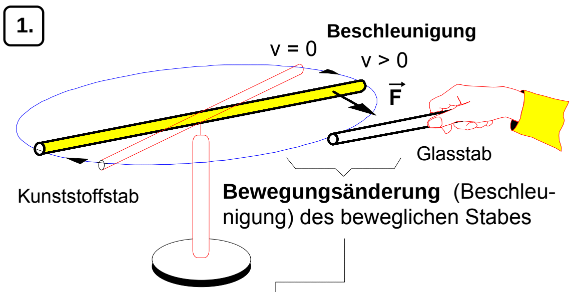


Bild **2**: **Isaac Newton** (1643 – 1727)

Newton selbst hat sich zur Frage nach dem Wesen und der Ursache der Massenanziehungskraft übrigens sehr zurückhaltend geäußert. In seinem 1687 erschienen Buch über die »Mathematischen Prinzipien der Naturlehre« (Philosophiae naturalis principia mathematica) schreibt er: »Ich habe bisher die Erscheinungen der Himmelskörper und die Bewegungen des Meeres durch die Kraft der Schwere erklärt, aber ich habe nirgends die Ursache der letzteren angegeben. ... Ich habe noch nicht dahin gelangen können, aus den Erscheinungen den Grund dieser Eigenschaften der Schwere abzuleiten, und Hypothesen erdenke ich nicht.« (Isaac Newton: Mathematische Prinzipien der Naturlehre, Cambridge 1686, Nachdruck der von J.Ph. Wolfers herausgegebenen deutschen Übersetzung aus dem Jahre 1872, Darmstadt 1963 (Wissenschaftliche Buchgesellschaft), S.511)

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-1-L.DOC - 06.10.98
Arbeitsblatt Nr. **1** : **Elektrische Kraft** und **elektrische Ladung**	

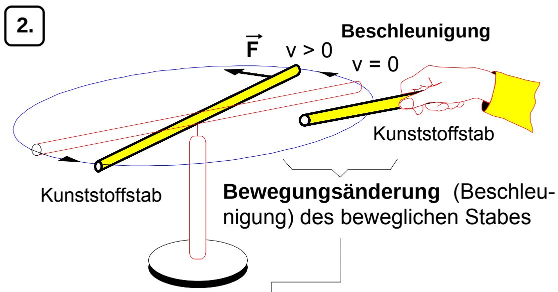
● **Wahrnehmungen** im Experiment: **Fernwirkungen** zwischen geriebenen Kunststoff- und Glasstäben



Ursache (nach Newton): **Kraft $\vec{F}$**

A n z i e h u n g s kraft

mögliche **Ursachen** dieser Kraft:



Ursache (nach Newton): **Kraft $\vec{F}$**

A b s t o ß u n g s kraft

Ursache dieser Kraft:

Masse der Körper

Wirkung der Massen:

Mechanische Kräfte

nur Anziehung

Elektrische Ladung der Körper

⊕ **positive** Ladung

⊖ **negative** Ladung

Wirkungen elektrischer Ladungen:

Elektrische Kräfte

Anziehung **Abstoßung**

● Die **elektrische Ladung** als **Ursache** von **elektrischen Kräften** zwischen Körpern

Farbe, Geruch, Masse usw. sind Eigenschaften von Körpern, die bestimmte Wirkungen hervorrufen. So können sich Körper aufgrund ihrer **Masse** selbst über größere Entfernungen hinweg gegenseitig ***anziehen*** (z.B. Erde und Mond). Die dabei "in die Ferne" wirkenden Kräfte sind in der mechanischen Theorie Newtons begründet. Wir wollen sie daher als **mechanische** Kräfte bezeichnen. Reibt man indessen verschiedene Körper z.B. aus Kunststoff oder Glas mit einem Wolltuch oder berührt man einen Metallkörper mit einem geriebenen Kunststoffkörper, so wird diesen Körpern eine Eigenschaft vermittelt, aufgrund derer sie sich über eine gewisse Entfernung hinweg nicht nur ***anziehen***, sondern auch gegenseitig ***abstoßen*** können. Um dieser Besonderheit gegenüber der Massenanziehung Rechnung zu tragen, werden wir die in diesem Fall wirksamen "Fernkräfte" als **elektrische** Kräfte und die Eigenschaft, die sie dazu befähigen, als **elektrische Ladung** bezeichnen. Wir können somit festhalten: **Elektrische Ladungen** sind die **Ursache** von **elektrischen Kräften**. Da elektrische Ladungen zwei Arten von *Wirkungen* hervorrufen können, nämlich Anziehung oder Abstoßung, muß auch hinsichtlich der *Ursache* elektrischer Kräfte zwischen zwei Arten unterschieden werden, nämlich zwischen '**positiven**' und '**negativen**' elektrischen Ladungen. Erst wenn man diese Unterscheidung getroffen hat, läßt sich folgende Regel aufstellen.

· **Regel** über die möglichen Kraftwirkungen zwischen Körpern mit elektrischen Ladungen:

► Körper mit **gleichartigen** Ladungen **stoßen sich ab**.	← ⊕ ⊕ → ← ⊖ ⊖ →
► Körper mit **ungleichartigen** Ladungen **ziehen sich an**.	⊕ → ← ⊖ ⊖ → ← ⊕

● Die **elektrische Ladung** als **physikalische Größe**:

► Formelzeichen der elektrischen Ladung: **Q**

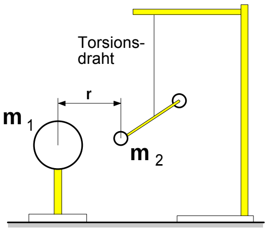
► Maßeinheit der elektrischen Ladung: **1 C** (=Coulomb)

► Angabe einer elektrischen Ladung

Beispiel: $\mathbf{Q = 4 \cdot 10^{-6}\ C}$

1. **Gesetze** zur **Fernwirkung** von **mechanischen** und **elektrischen Kräften**

a) MECHANIK: **Gravitationsgesetz** (1666)



Mechanische
Drehwaage
(Prinzip)

Gravitationskonstante:

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

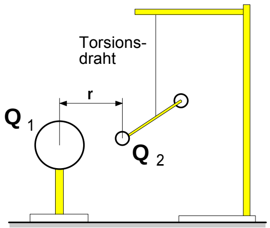
Mechanische Kraft F zwischen zwei Körpern mit den **Massen m_1** und **m_2**

$$\boxed{F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

Coulomb:

Spekulation

b) ELEKTRIK: **Coulombsches Gesetz** (1785)



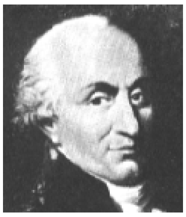
Elektrische
Drehwaage
(Prinzip)

Elektrische Kraft F zwischen zwei Körpern mit den **Ladungen Q_1** und **Q_2**

$$\boxed{F = K \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}}$$

Konstante:

$K = 9{,}0 \cdot 10^9 \, \frac{N \cdot m^2}{C^2}$



Charles Augustin
Coulomb
1736–1806

Charles Augustin Coulomb stellte 1785 das Gesetz über die Kraftwirkung elektrischer Ladungen in Anlehnung an das 100 Jahre vorher durch *Newton* entdeckte Gravitationsgesetz auf. Dieses Gesetz besagt, daß sich zwei „punktförmige" Körper mit den Massen $\mathbf{m_1}$ und $\mathbf{m_2}$ mit einer Kraft **F** anziehen, die dem Produkt der beiden Massen direkt proportional und dem Quadrat ihrer Entfernung **r** umgekehrt proportional ist. Das *Newton*sche Gravitationsgesetz setzt die beiden Massenpunkte $\mathbf{m_1}$ und $\mathbf{m_2}$ an zwei räumlich getrennten Orten in Beziehung, ohne daß die Punkte der Verbindungsstrecke oder irgendwelche Eigenschaften des die Punkte umgebenden Raumes berücksichtigt werden. Die Gravitationskraft scheint also *ohne Vermittlung des Raumes zwischen den Massenpunkten* („unvermittelt") in die Ferne zu wirken; man nennt sie daher eine **Fernkraft**. Diese Vorstellung war zu Lebzeiten *Coulombs* auf Grund ihrer Bewährung in der Mechanik allgemein geläufig. *Coulombs* erfolgreicher Versuch, ein dem Gravitationsgesetz entsprechendes Gesetz für die Kraft zwischen elektrisch geladenen Körpern nachzuweisen, entsprach der *mechanistischen Denkweise* vieler seiner Zeitgenossen und führte dazu, daß Fernkräfte auch in der Elektrizitätslehre anerkannt wurden. Nach der **Fernwirkungstheorie** ist eine einzelne elektrische Ladung Q_1 ohne Einfluß auf den umgebenden Raum; der Raum wird durch sie physikalisch nicht verändert. Eine Kraft nach dem Coulombschen Gesetz wirkt auf eine Ladung Q_2 im gleichen Augenblick ein, in dem diese Ladung $\mathbf{Q_2}$ vorhanden ist. Bei der Auffassung des Coulombschen Gesetzes als Fernwirkungsgesetz bleibt unerklärt, wie die offenbar durch $\mathbf{Q_1}$ „bedingte", von ihr „ausgehende" Kraft **F** den Raum zwischen den Ladungen überbrückt. Quelle: W.Kuhn, Physik - Band III C: Felder und Ladungen, Braunschweig 1974, S.37 f.

2. **Torsionsdrehwaagen** nach **Ch.A.Coulomb** (1785) und **H.Cavendish** (1798)

a) Elektrische Drehwaage nach Coulomb

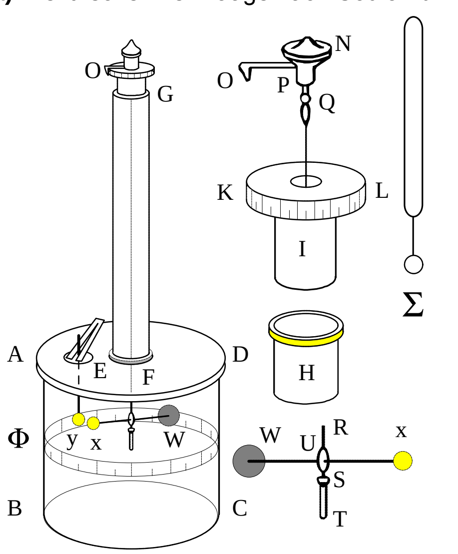


Bild 1: Coulombsche Drehwaage

x ist eine bewegliche, ***y*** eine feststehende Kugel aus Holundermark, jeweils an einem isolierenden Schellackstäbchen befestigt. Durch das Loch ***E*** wird der geladene Konduktor S (Stecknadelkopf an einem Siegellackstäbchen) in die Apparatur eingeführt und mit der Kugel ***y*** und durch diese mit der Kugel ***x*** berührt, wodurch beide die gleichen elektrischen Ladungen erhalten. Dann wird der Konduktor S wieder entfernt. Die bewegliche Kugel ***x*** wird dann um einen bestimmten Winkel a von der feststehenden Kugel ***y*** abgestoßen. Bei kleinen Winkeln entspricht a in erster Näherung dem Abstand **r** der beiden Kugelmittelpunkte. Mit dem Torsionskopf ***N*** wird dann der Zeiger ***OP*** zunächst so lange gedreht bis der Winkelabstand (Entfernung zwischen ***x*** und ***y***) halbiert ist. Dann wird er so weit gedreht, bis der Ausschlag, wiederum halbiert, a/4 beträgt. Die hierzu erforderlichen Torsionswinkel β_1 bzw. β_2 entsprechen der jeweiligen Torsionskraft **F**, die auf die elektrische Abstoßung der Ladungen $\mathbf{Q_1}$ und $\mathbf{Q_2}$ zurückzuführen ist. Quelle: W.Kuhn, a.a.O., S.38

b) Mechanische Drehwaage nach Cavendish

Mit einer Apparatur nach diesem Prinzip konnte Henry Cavendish 1798 die Gravitationskonstante ermitteln. Er maß dabei die Anziehungskraft zwischen den großen und kleinen Bleikugeln. Beim Annähern der Kugeln A und B an die Kugeln 1 und 2 bewegten sich die kleinen Kugeln geringfügig auf die großen zu; die Massen zogen einander an.

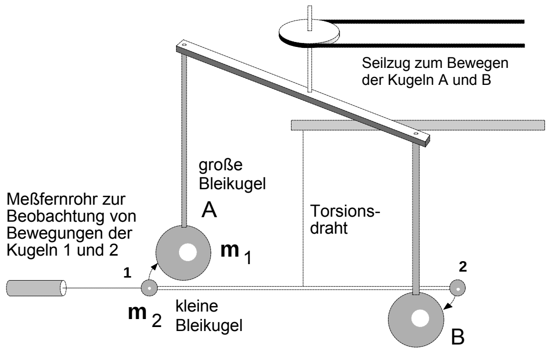
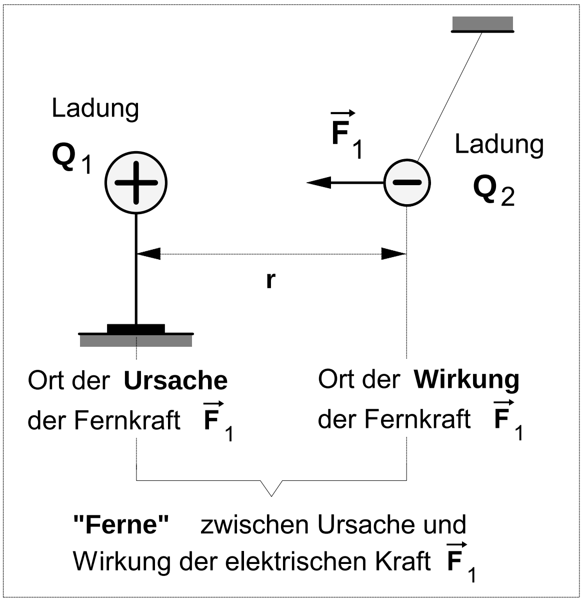


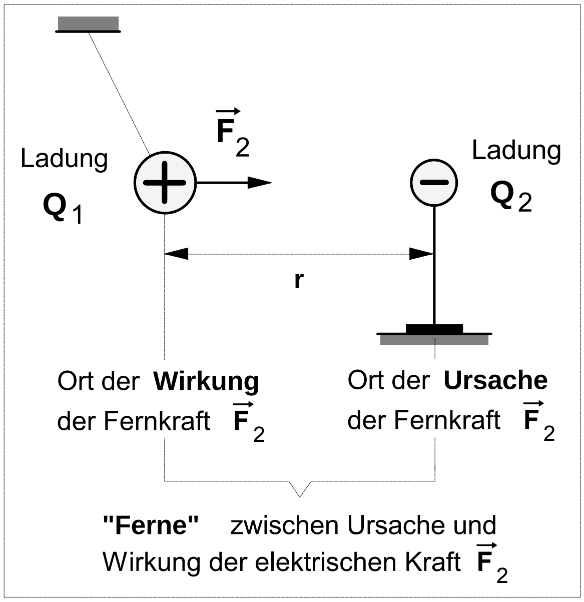
Bild 2: Gravitationsdrehwaage nach Cavendish

3. Zur **Theorie** der **Fernwirkung** von **elektrischen Kräften**

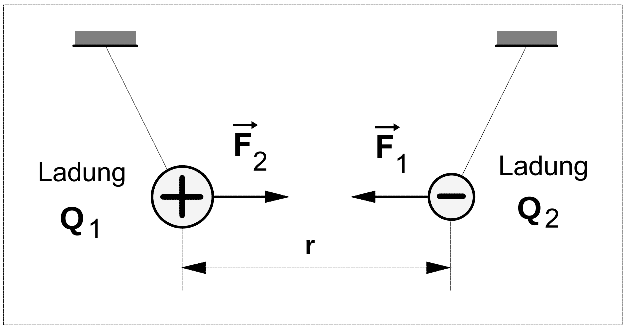
a) Ladung Q_1 zieht Ladung Q_2 an



b) Ladung Q_2 zieht Ladung Q_1 an



c) Ladung Q_1 und **Ladung Q_2** ziehen sich **gegenseitig** an (Wechselwirkung)



Wichtiger Hinweis!

Das Coulombsche Gesetz darf nur angewendet werden, wenn die Ladungen **Q_1** und **Q_2** als **Punktladungen** aufgefaßt werden können.

- Gemäß dem *Wechselwirkungsgesetz* ("actio = reactio") von NEWTON (3.Axiom) gilt für die beiden Fernkräfte:

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2}$$

- Nach dem *Coulombschen Gesetz* gilt für die **Beträge** der beiden elektrischen Fernkräfte (mit $\mathbf{F_1} = \mathbf{F_2} = \mathbf{F}$):

$$\boxed{F = K \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}}$$

Konstante:

$$K = 9{,}0 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

· Eigenschaften von **Fernkräften** nach der **Fernwirkungstheorie** (18. Jahrhundert)

Die Anhänger der **Fernwirkungstheorie** –die sich insbesondere im 18.Jahrhundert großer Beliebtheit erfreute, vor allen Dingen bei französischen Physikern wie Ch.A.COULOMB, J.B.BIOT und F.SAVART– behaupteten, bei der Anziehung und Abstoßung von Magneten oder von elektrischen Ladungen seien **Fernkräfte** am wirken, denen folgende Eigenschaften zugeschrieben wurden:

(1) **Ursache** und **Wirkung** von Fernkräften treten an **verschiedenen Orten** auf.

(2) Die Fernkraft erscheint **gleichzeitig** an verschiedenen Orten, nämlich dem Ort ihrer Entstehung (Körper mit der Ladung $\mathbf{Q_1}$) und dem Ort ihrer Wirkung (Körper mit der Ladung $\mathbf{Q_2}$), d.h.: ihre **Ausbreitungsgeschwindigkeit** ist **unendlich groß**.

(3) Die **Ausbreitung** einer Fernkraft erfolgt stets **geradlinig**, also auf dem kürzesten Weg zwischen dem Ort ihrer Entstehung und dem Ort ihrer Wirkung.

(4) Es gibt **keinen Übertragungsmechanismus**, der die Fernkraft von Raumpunkt zu Raumpunkt vom Ort ihrer Entstehung zum Ort ihrer Wirkung überträgt, d.h.: der **Raum** ist an der Übertragung der Fernkraft **nicht beteiligt**.

• **Übungsaufgaben** zum **Coulombschen Gesetz**

1. Die Mittelpunkte zweier kleiner Kugeln sind 50 cm voneinander entfernt. Der Durchmesser der Kugeln kann gegenüber der Entfernung vernachlässigt werden. Die eine Kugel trägt die positive Ladung $\mathbf{Q_1} = \mathbf{1} \cdot 10^{-7}$ C, die andere Kugel trägt die ebenfalls positive Ladung $\mathbf{Q_2} = \mathbf{5} \cdot 10^{-6}$ C.

Wie groß ist die elektrische Kraft **F**, mit der sich die Kugeln abstoßen? [$F = 1{,}80 \cdot 10^{-2}$ N]

2. Zwei kleine geladene Körper, deren gleich große positive Ladungen als Punktladungen betrachtet werden können, stoßen sich bei einer Entfernung $\mathbf{r_1} = \mathbf{10}$ cm mit einer elektrische Kraft **F** = **3** N gegenseitig ab.

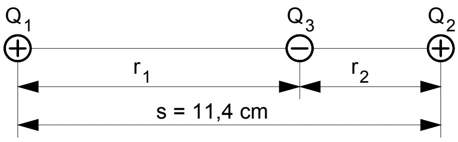
a) Wie groß sind die Ladungen $\mathbf{Q_1}$ und $\mathbf{Q_2}$ auf den beiden Körpern ? [$Q_1 = Q_2 = 1{,}83 \cdot 10^{-6}$ C]

b) Wie groß wäre die Kraft **F** bei einer Entfernung von $\mathbf{r_2} = \mathbf{20}$ cm und $\mathbf{r_3} = \mathbf{50}$ cm ? [0,75 N und 0,12 N]

3. Eine Konduktorkugel trägt die Ladung $\mathbf{Q_1} = \mathbf{2} \cdot 10^{-7}$ C . In ihrer Nähe hängt isoliert eine ungeladene Styroporkugel mit leitender Oberfläche. Die Mittelpunkte der Kugeln befinden sich gleich hoch über der Tischplatte und sind **20** cm voneinander entfernt. Die Styroporkugel hat die Masse m = **1** g .

Wie groß ist die horizontale Anfangsbeschleunigung der Styroporkugel, wenn auf sie die Ladung $\mathbf{Q_2} = 10^{-8}$ C gebracht wird ? [$a = 0{,}449$ m/s²]

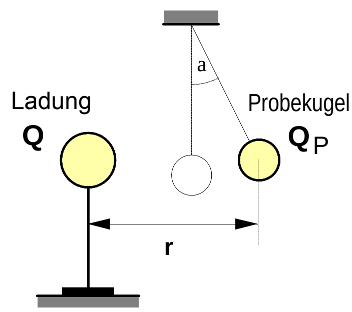
4. Zwei ortsfeste **positive** Punktladungen $\mathbf{Q_1} = \mathbf{8{,}52} \cdot 10^{-9}$ C und $\mathbf{Q_2} = \mathbf{5{,}44} \cdot 10^{-9}$ C sind gemäß nebenstehender Abbildung angeordnet. Die **negative** Ladung auf der Verbindungsgeraden zwischen den Ladungen $\mathbf{Q_1}$ und $\mathbf{Q_2}$ ist beweglich angeordnet und beträgt $\mathbf{Q_3} = \mathbf{9{,}77} \cdot 10^{-10}$ C . $\mathbf{Q_3}$ ist von $\mathbf{Q_1}$ doppelt so weit entfernt wie von $\mathbf{Q_2}$.



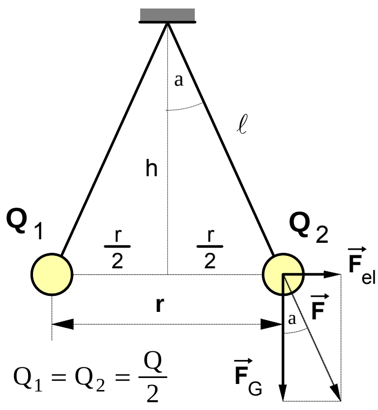
Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung der **Kraft**, die auf die Ladung $\mathbf{Q_3}$ wirkt. [$F = 2{,}01 \cdot 10^{-5}$ N]

5. Die Ladung auf der feststehenden Kugel in der rechten Abbildung beträgt $\mathbf{Q} = \mathbf{1{,}5} \cdot 10^{-7}$ C . Eine in der Nähe befindliche, isoliert aufgehängte, geladene Probekugel $\mathbf{Q_P}$ schlägt aus und kommt im horizontalen Mittelpunktabstand **r** = **28** cm in eine Gleichgewichtslage. Die Probekugel hat die Masse **m** = $\mathbf{2{,}0} \cdot 10^{-3}$ kg . Der Ausschlagwinkel ist a = **12,0°**.

Wie groß ist die Ladung $\mathbf{Q_P}$ der Probekugel ? [$Q_P = 2{,}42 \cdot 10^{-7}$ C]



6. Zwei Aluminiumkügelchen (siehe Abb. rechts) mit gleichem Radius und gleicher Masse sind so an gleich langen, isolierten Fäden mit gleichem Aufhängepunkt aufgehängt, daß sie einander berühren. Der Kugeldurchmesser kann gegenüber der Fadenlänge vernachlässigt werden. Auf das Kugelpaar wird die Ladung **Q** gebracht, die sich auf beide Kugeln gleichmäßig verteilt. Die Kugeln stoßen sich ab und kommen in der gegenseitigen Entfernung **r** in eine neue Ruhelage. Die Fadenlänge ℓ, die Kugelmasse **m** und die Entfernung **r** werden durch entsprechende Messungen bestimmt.



a) Entwickeln Sie in *allgemeiner Form* eine **Formel**, die es ermöglicht, die **Ladung Q** mit Hilfe der gemessenen Größen ℓ, **m** und **r** zu berechnen.

b) Wie groß ist die Ladung auf jeder Kugel, wenn **r** = **12** cm, ℓ = **1** m und **m** = **2** g beträgt? [$Q_1 = Q_2 = 4{,}35 \cdot 10^{-8}$ C]

1. Zum **Begriff** der **Vektorgröße** in der Physik

Eine **Vektorgröße** (von *vectus* (lat.): *gerichtet*) ist eine physikalische Größe, die sowohl einen **Betrag** als auch eine **Richtung** besitzt.

- Vektorgrößen (Beispiele): Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Weg, Feldstärke
- Physikalische Größen, die im Gegensatz zu Vektoren **allein** durch die Angabe eines **Betrages** (= Zahlenwert x Maßeinheit) vollständig bestimmt sind, heißen **skalare Größen** (Beispiele: Zeit, Temperatur, Masse, Ladung).

2. **Symbolische Darstellung** von **Vektorgrößen**

a) Formelzeichen: Den **Vektorcharakter** einer physikalischen Größe kennzeichnen wir durch einen kleinen Pfeil über dem Formelzeichen (z.B. $\vec{F}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{E}$). Will man lediglich eine Angabe über den **Betrag** einer Vektorgröße machen, läßt man den kleinen Pfeil einfach weg; **F** ist z.B. der **Betrag** des Kraftvektors $\vec{F}$.

b) Geometrische Darstellung einer Vektorgröße als **Vektorpfeil**

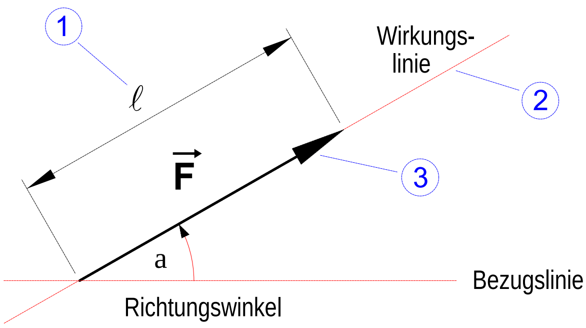
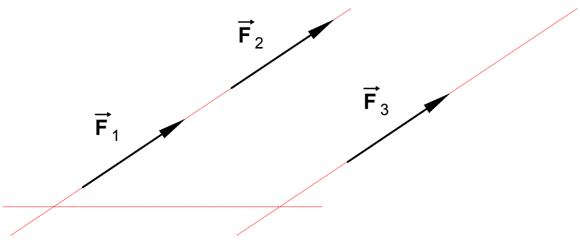


Bild **1**: Pfeildarstellung eines Vektors

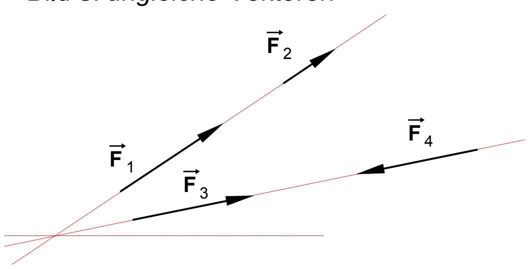
- Der **Betrag** (Zahlenwert x Maßeinheit) einer Vektorgröße wird durch die **Länge** ① des Vektorpfeiles dargestellt. Dies erfordert stets die Festlegung eines **Maßstabes** (z.B. für einen Kraftvektor 2 Newton pro Zentimeter oder kürzer: $\mathbf{m}_F$ = 2 N/cm).
- Die **Richtung** einer Vektorgröße wird angegeben durch
  ② die **räumliche Lage** des Vektorpfeiles (auf seiner Wirkungslinie) gegenüber einer beliebig wählbaren Bezugslinie (z.B. durch den Richtungswinkel α) und
  ③ die **Orientierung** des Vektorpfeiles, d.h. den Durchlaufsinn vom Anfangspunkt zum Endpunkt (Spitze) des Pfeiles.

Zwei Vektorgrößen sind nur dann **gleich**, wenn sie sowohl den **gleichen Betrag** als auch die **gleiche Richtung** haben. Demnach sind **zwei Vektorpfeile** nur dann **gleich**, wenn sie bei gleichem Maßstab die **gleiche Länge**, die **gleiche räumliche Lage** gegenüber derselben Bezugslinie und die **gleiche Orientierung** haben. Daher können Vektoren auch beliebig **parallel verschoben** werden.

- Bild **2**: *gleiche* Vektoren



- Bild **3**: *ungleiche* Vektoren



3. **Regel** über die **geometrische Addition** von **Vektoren**

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2}$$

Zur Bestimmung der *geometrischen* Summe der beiden Vektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ wird über die beiden Vektoren ein Parallelogramm aufgespannt. Der **Summenvektor** $\vec{F}$ (auch resultierender Vektor genannt) ist stets die Parallelogramm-**Diagonale zwischen** den beiden Vektorsummanden $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$.

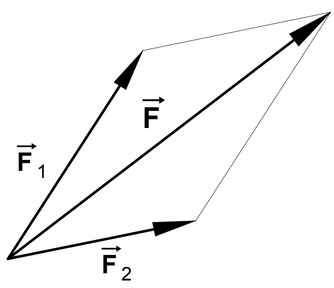


Bild **4**: Geometrische Addition zweier Vektoren

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-01-F.DOC - 14.08.02

Arbeitsblatt : **Mathematische Vorbetrachtung:** ***Proportionalität*** und ***Geradengleichung***

1. Zum **Begriff** der **mathematischen Funktion**

Wird jedem beliebigen Wert einer unabhängigen Veränderlichen (Variablen) **x** durch eine Vorschrift einer davon abhängigen Veränderlichen (Variablen) **y** ein bestimmter Wert zugeordnet, so heißt diese Zuordnung eine **Funktion**. Man sagt auch kurz "**y** *ist eine Funktion von* **x**" und schreibt in symbolischer Form: **y** = f(**x**).

2. **Formen** der **Darstellung** einer **Funktion** (Beispiel: lineare Funktion)

a) Darstellung in Form einer **Wertetabelle**

x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12

·2 ·3 ·4

Als 1. Beispiel wurde in der nebenstehenden Wertetabelle eine Funktion angenommen, nach der sich die Variable **y** in Abhängigkeit von der unabhängigen Variablen **x** auf folgende Weise ändert:

Wird der **x**–Wert **verdoppelt**, so **verdoppelt** sich der **y**–Wert,

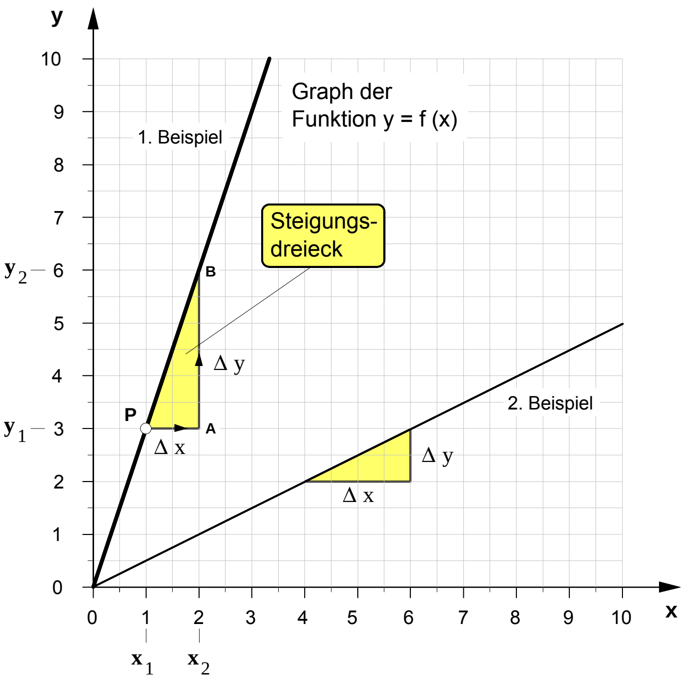
wird der **x**–Wert **verdreifacht**, so **verdreifacht** sich der **y**–Wert,

wird der **x**–Wert **vervierfacht**, so **vervierfacht** sich der **y**–Wert usw..

- Die **y**–Werte ändern sich demnach stets **in gleichem Maße** wie die **x**–Werte. Man sagt auch: *Die **y**–Werte sind **proportional** (verhältnisgleich) zu den **x**–Werten*. Als Formel stellen wir diese proportionale Abhängigkeit zwischen zwei Variablen wie folgt dar:

$$\boxed{y \sim x}$$

b) Darstellung der Funktion in Form eines **Graphen** im **x–y–Koordinatensystem**



- Für unsere beiden **Beispiele** ergeben sich folgende

► Steigungsfaktoren

1. Beispiel: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3}{1} \Rightarrow m = 3$

2. Beispiel: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m = 0{,}5$

► und damit folgende Funktionsgleichungen

1. Beispiel: $y = 3 \cdot x$

2. Beispiel: $y = 0{,}5 \cdot x$

c) Darstellung in Form einer **Funktionsgleichung**

- Der Graph der Funktion **y** = f(**x**) ist in unserem Beispiel eine **Gerade**, genauer: Eine Gerade die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht (Ursprungsgerade). Solche Geraden unterscheiden sich allein durch ihre **Steilheit** oder wie man auch sagt: durch ihre **Steigung**.

- Die Funktionsgleichung, mit der eine solche Gerade in algebraischer Form beschrieben wird, heißt **Geradengleichung**. Sie lautet im Fall der Ursprungsgeraden:

$$\boxed{y = m \cdot x}$$

- Der Faktor **m** ist eine **Konstante**. Sein Wert ist ein Maß für die Steilheit einer Geraden. Er wird daher als **Steigungsfaktor** oder kurz als **Steigung** bezeichnet. Seine Definition lautet:

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1 \\ \Delta x &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Graphisch wird der Steigungsfaktor **m** mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks, dem sog. **Steigungsdreieck**, ermittelt. Um das Steigungsdreieck zu zeichnen, geht man von einem beliebigen Punkt **P** auf der Geraden aus und zeichnet von da aus zunächst nach rechts die waagerechte Kathete mit einer frei wählbaren Länge Δ**x**. Von deren rechtem Endpunkt **A** aus zeichnet man eine senkrechte Linie bis diese die Gerade schneidet und bestimmt anschließend die durch den Schnittpunkt **B** begrenzte Länge Δ**y** der senkrechten Kathete. Der Wert des Steigungsfaktors **m** läßt sich dann mit Hilfe der obigen Definitionsformel berechnen.

Lehrgang : **TECHNISCHE MATHEMATIK**	Name: TEMA-1.DOC - 13.09.05
Arbeitsblatt Nr. :	**Zehnerpotenzen**

1. Zehnerpotenzen und Vorsätze nach DIN 1301

Zehnerpotenz	Zahl	Bezeichnung	Vorsatz	Kurzzeichen	Beispiel
10^0	= 1	Eins			
10^1	= 10	Zehn	Deka	da	dag Dekagramm
10^2	= 100	Hundert	Hekto	h	hl Hektoliter
10^3	= 1 000	Tausend	Kilo	k	km Kilometer
10^4	= 10 000	Zehntausend			
10^5	= 100 000	Hunderttausend			
10^6	= 1 000 000	Million	Mega	M	MW Megawatt
10^9	= 1 000 000 000	Milliarde	Giga	G	GHz Gigahertz
10^{12}	= 1 000 000 000 000	Billion	Tera	T	TΩ Teraohm
10^{-1}	= 0,1	Zehntel	Dezi	d	dm Dezimeter
10^{-2}	= 0,01	Hundertstel	Zenti	c	cm Zentimeter
10^{-3}	= 0,001	Tausendstel	Milli	m	mV Millivolt
10^{-4}	= 0,0001	Zehntausendstel			
10^{-5}	= 0,00001	Hunderttausendstel			
10^{-6}	= 0,000001	Millionstel	Mikro	µ	µA Mikroampere
10^{-9}	= 0,000000001	Milliardstel	Nano	n	nC Nanocoulomb
10^{-12}	= 0,000000000001	Billionstel	Pico	p	pF Picofarad

2. Aufgabenbeispiele

Stellen Sie die folgenden Größenangaben wie im Beispiel **a)** in Zehnerpotenzform und in Normalform dar.

a) 220 kV = $220 \cdot 10^3$ V = 220 000 Volt

b) 1385 kg =

c) 10 µF =

d) 12,7 µm =

e) 5 mA =

f) 2 MΩ =

g) 35 MW =

h) 0,5 nC =

i) 95,6 cm =

j) 85 dm =

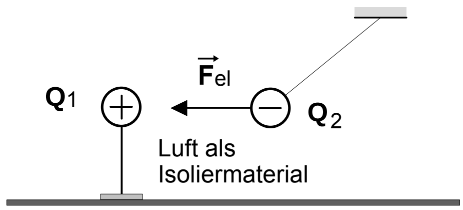
k) 75 mA =

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-2-1.DOC - 21.08.02	
Arbeitsblatt Nr. **2** : Die **Nahewirkungstheorie (Feldtheorie)** von **Michael FARADAY**		Seite **1**

1. Einwände Faradays gegen die Fernwirkungstheorie

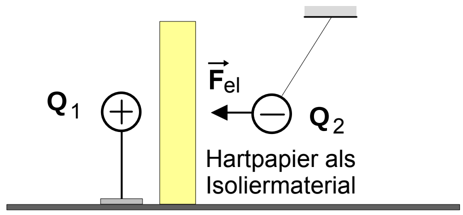
a) Beobachtung im Experiment:

Das Isoliermaterial in dem Raum zwischen zwei elektrisch geladenen Körpern beeinflußt die Größe der elektrischen Kraft zwischen den beiden Ladungen.



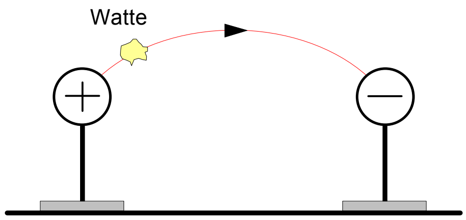
· **Schlußfolgerung:**

Der **Raum** zwischen den elektrischen Ladungen **muß an der Übertragung der elektrischen Kraft** vom Ort ihrer Ursache zum Ort ihrer Wirkung **beteiligt sein**.



b) Beobachtung im Experiment:

Elektrische Kräfte wirken nicht nur entlang gerader Linien auf geladene Körper und breiten sich daher **nicht nur geradlinig** aus, wie die Fernwirkungs-theorie behauptet; **sondern auch auf "krummen Linien"**.



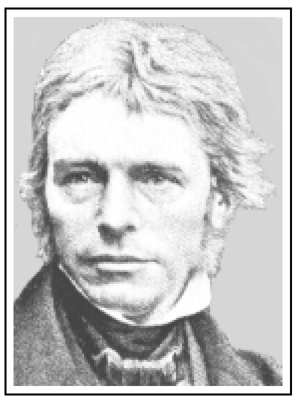
· **Schlußfolgerung:**

Elektrische Kräfte überspringen den Raum zwischen dem Ort ihrer Ursache und dem Ort ihrer Wirkung nicht geradlinig mit unendlich großer Geschwindigkeit, **sondern werden in dem Raum von Raumpunkt zu Raumpunkt mit einer endlichen Geschwindigkeit übertragen.**

c) Philosophisch-spekulativer Einwand Faradays nach der Naturphilosophie des "Dynamismus"

"Fernkräfte" sind für Faraday der "Gipfel der Unvorstellbarkeit", denn von ihnen wird behauptet, sie könnten **gleichzeitig an zwei verschiedenen Orten** sein, dem Ort ihrer Ursache und dem Ort ihrer Wirkung.

In Anlehnung an die Naturphilosophie Friedrich Schellings, dem sog. "Dynamismus", war Faraday vielmehr der Überzeugung, es gäbe so etwas wie eine **"Einheit der Naturkräfte"**. Von daher müsse konsequenterweise angenommen werden, daß auch bei den elektrischen Erscheinungen **Ursache und Wirkung stets eine räumliche Einheit bildeten.**



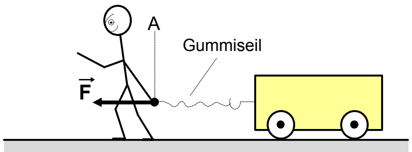
Michael Faraday
1791 – 1867

Dazu eine kurze Einschätzung: "In den Händen von Michael Faraday wurde diese philosophische Spekulation vollends zu einem Zauberstab. Der Dynamismus führte zur Entdeckung wichtiger Effekte wie zur Formulierung des Energieprinzips." (Armin Hermann: Weltreich der Physik, Frankfurt/M. 1983, S.114, vgl. insbesondere auch S.128 f.)

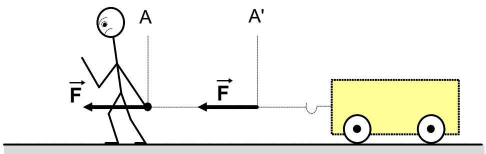
2. Michael FARADAY zur Übertragung elektrischer Kräfte

Ein wesentlicher Ansatzpunkt zur Überwindung der Fernwirkungstheorie ist die grundlegende These FARADAY's, daß auch bei elektrischen und magnetischen Kräften der Ort ihrer **Entstehung (Ursache)** und der Ort ihrer **Wirkung** räumlich zusammenfallen. Die Aufgabe der Übertragung derartiger Kräfte schreibt FARADAY den besonderen physikalischen Eigenschaften des Raumes in der Umgebung elektrischer Ladungen bzw. magnetischer Körper zu. Wir wollen bei der Darstellung der FARADAY'schen Überlegungen (ähnlich wie FARADAY selbst) zunächst an ein mechanisches Modell anknüpfen.

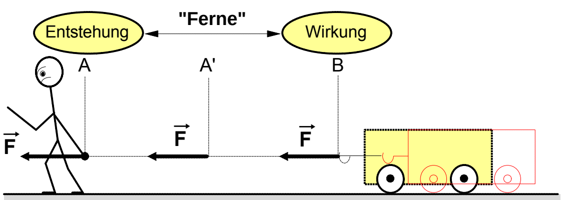
Will man beispielsweise mit der Muskelkraft der Hand einen Körper bewegen, so muß man ihn entweder direkt berühren oder zwischen dem Körper und der Hand z.B. ein Gummiseil spannen; das Gummiseil leitet während des Spannens die Kraft von der Hand weiter bis zu dem räumlich entfernten Körper. Mit anderen Worten: Die Kraft wird durch das Spannen des Seiles von ihrem Entstehungsort (der Hand) Punkt für Punkt zu ihrem Wirkungsort (dem Körper) übertragen. Wäre das Gummiseil nun unsichtbar, so entstünde der Eindruck, als überspringe die Kraft den Zwischenraum zwischen Hand und Körper. Wir hätten es dann mit einer **scheinbaren** Fernkraft zu tun.



a) Das Gummiseil ist noch nicht gespannt. Die Muskelkraft $\vec{F}$ entsteht im Punkt A (Ort der Entstehung der Kraft $\vec{F}$).



b) Das Gummiseil ist "halb" gespannt, der Körper bleibt noch im Ruhezustand. Die Kraft $\vec{F}$ ist bis Punkt A' durch das Seil "gewandert".

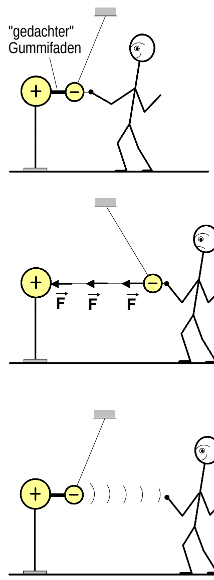


c) Das Gummiseil ist "voll" gespannt, der Körper bewegt sich. Die Kraft $\vec{F}$ ist durch das Seil vom Entstehungsort A zum Wirkungsort B übertragen worden.

FARADAY überträgt diesen Gedankengang auf die anziehende bzw. abstoßende Wirkung **elektrischer Kräfte,** indem er behauptet, daß es sich auch in diesem Fall nur um **scheinbare** Fernkräfte handele. In Wirklichkeit, und dies ist seine entscheidende Annahme, sei der Raum zwischen den elektrischen Ladungen in irgendeiner Weise an der Kraftübertragung beteiligt. Sobald eine elektrische Ladung entsteht, gerät nach FARADAY der Raum in deren Umgebung in einen Zustand, der von dem Normalzustand abweiche. Dieser besonderen Raumzustand –wir bezeichnen ihn heute als **elektrisches Feld–** sei aufgrund seiner physikalischen Eigenschaften in der Lage, die elektrische Kraft zwischen zwei räumlich entfernten Ladungen von ihrem Entstehungsort an ihren Wirkungsort zu übertragen. Zur Bedeutung dieser Vorstellung von FARADAY für die Überwindung der Fernwirkungstheorie bemerkt James Clerk MAXWELL, ein englischer Physiker, auf den später noch näher eingegangen wird, :

> "Wir dürfen nicht vergessen, daß wir bis jetzt erst einen Schritt in der Theorie der Wirkung des Mediums getan haben. Wir haben angenommen, daß es sich in einem Spannungszustand befinde, haben aber in keiner Weise erklärt, wie dieser Spannungszustand zustande kommt und wie er aufrecht erhalten wird. Doch scheint mir dieser Schritt wichtig zu sein, weil damit Erscheinungen, die man früher nur durch die Annahme einer Wirkung in die **Ferne** glaubte erklären zu können, nun durch die Wirkung **benachbarter Teile** des Mediums aufeinander erklärt werden." 1)

In Anlehnung an FARADAY vergleicht Lawrence BRAGG in seiner "gemeinverständlichen Einführung in die Elektrophysik" diesen "besonderen Spannungszustand des Raumes"mit dem eines gespannten Gummiseiles (siehe die Abb. rechts): "Es ist als wären unsichtbare elastische Fäden zwischen den ungleichnamigen Ladungen gespannt, die sich ausdehnen, wenn man die Ladungen trennt, und sich entspannen, wenn man sie zusammenbringt. Natürlich existieren diese elastischen Fäden nicht "wirklich", sie dienen uns **lediglich als Symbole**." 2) Auf welchen Stellenwert die Aufgabe solcher mechanischen Symbole, wie sie dem Gummifaden-Modell zu eigen sind, bei der Darstellung elektrischer und magnetischer Felder zu beschränken sei, weist MAXWELL hin: "Ich bediente mich der mechanischen Bilder bloß zur **Erleichterung der Vorstellung, nicht aber** zur Angabe der Ursachen der Erscheinungen." 3) FARADAY selbst hat gegen mechanistische Deutungsmuster wie dem Gummifaden-Modell, das im wahrsten Sinne des Wortes "fadenscheinig" ist, immer wieder erhebliche Einwände vorgebracht. Seine Argumentation, daß "anders als die Gravitation, vermöge welcher zwei Theilchen in **gerader Linie** aufeinander wirken", die Kraftwirkung elektrischer Ladungen entlang "mehr oder weniger **krummer Linien**" erfolge 4), durchzieht seine Abhandlungen gleichsam wie ein "roter Faden".



Die nach FARADAY's Erkenntnissen auch krummlinig verlaufenden "unsichtbaren Fäden" bezeichnet er als "**lines of force**", als "**Kraftlinien**". Seinen **Kraftlinienbegriff** definiert er 1851 wie folgt:

> "Ich wünsche die Bedeutung des Ausdrucks **Kraftlinie** so zu beschränken, daß er nicht mehr enthalte als den Zustand der Kraft hinsichtlich ihrer Stärke und Richtung an einer gegebenen Stelle und (einstweilen) keine Vorstellung über die Natur der physischen Ursache der Erscheinungen in sich schließe, oder mit einer derartigen Vorstellung verknüpft oder von ihr irgend abhängig sei. Doch liegt in dem Versuche, auf diesem Wege die Erregung, das Dasein und die Fortpflanzung der physikalischen Kräfte zu begreifen, nichts Unstatthaftes.
>
> Wie die magnetische Kraft sich durch die Körper oder den Raum fortpflanzt, ob es nach Art einer reinen Fernwirkung geschieht, wie bei der Schwere, oder durch ein intermediäres Agens, wie beim Licht, der Wärme, dem elektrischen Strome und (wie ich glaube) der elektrostatischen Wirkung, wissen wir nicht. Die Vorstellung von magnetischen Fluidis, wie sie manche anwenden, oder von magnetischen Kraftzentren, begreift nicht die der letzteren Fortpflanzungsart in sich, aber wohl tut dies die Vorstellung von Kraftlinien." 5)

Michael Faraday (1791 - 1867)

1) J.Cl. Maxwell: Elektrizität und Magnetismus, Auszüge, hrsg. v. F.Emde, S.42
2) L. Bragg: Elektrizität, Wien 1951, S.15
3) J.Cl. Maxwell: Über physikalische Kraftlinien, Darmstadt 1976, S.5
4) M. Faraday: Experimentaluntersuchungen, 1.Band, Berlin 1891, S.348
5) M. Faraday, a.a.O., 3.Band, S.299

3. **Beschreibung** von **elektrischen Feldern** mit dem **Feldlinienmodell**

a) **Elektrisches Feld** und **elektrische Feldlinien**

- Das **elektrische Feld** ist der Raum, der elektrisch **geladene Körper** umgibt. In **jedem** Raumpunkt eines elektrischen Feldes erfahren elektrische **Ladungen** elektrische **Kräfte**.
- **Elektrische Feldlinien** sind **Symbole**, mit denen elektrische Felder anschaulich beschrieben werden können. Die Tangenten an die elektrischen Feldlinien geben in jedem Punkt des Feldes die **Richtung** der elektrischen Kräfte an, die eine **positive** Probeladung in dem jeweiligen Punkt erfährt. Elektrische Feldlinien **beginnen** an den positiven Ladungen (Quelle) und **enden** an den negativen Ladungen (Senke).

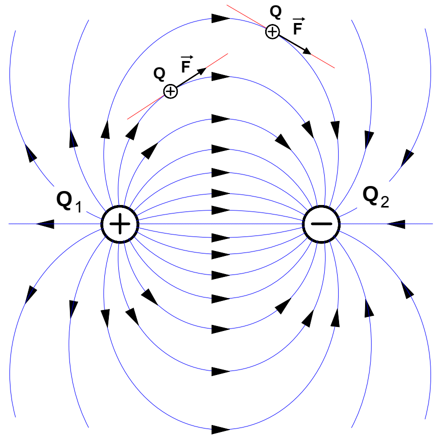


Bild 1 : Feldliniendarstellung des elektrischen Feldes in der Umgebung der ungleichartigen Punktladungen Q_1 und Q_2

b) **"Grießkörnerversuch"** zur Darstellung von elektrischen Feldformen

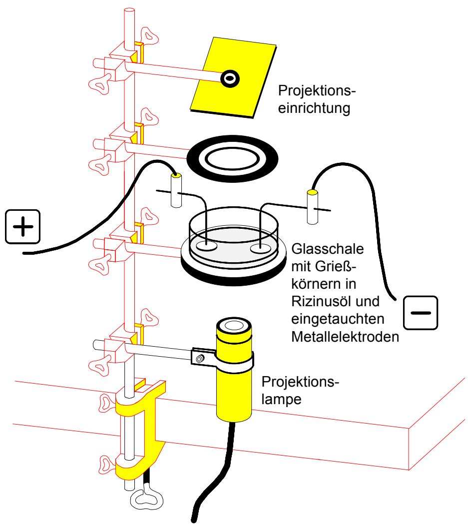


Bild 2 : Versuchsanordnung

Versuch: In einer Glasschale mit Rizinusöl werden Grießkörner gleichmäßig verteilt. In das Öl werden zwei runde Metallscheiben getaucht und mit einem Bandgenerator entgegengesetzt geladen. **Beobachtung:** Die Grießkörner richten sich aus und reihen sich kettenförmig aneinander (und zwar aus Gründen, die später noch ausführlicher behandelt werden).
Deutung: Die Linien, die man sich durch diese Ketten gezeichnet denken kann, legen die Modellvorstellung nahe, daß man sich den Raum in der Umgebung elektrischer Ladungen von beliebig vielen solcher Linien durchsetzt **denken** kann. Diese "gedachten Linien" sind die sog. "Feldlinien". Durch **jeden** Punkt in diesem Raum kann man sich eine solche Feldlinie gezogen denken.

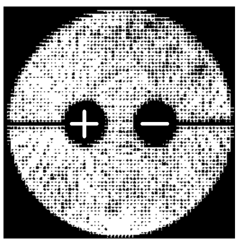


Bild 3: Grießkörnerbild

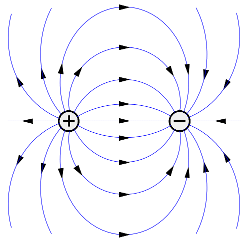
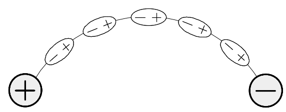
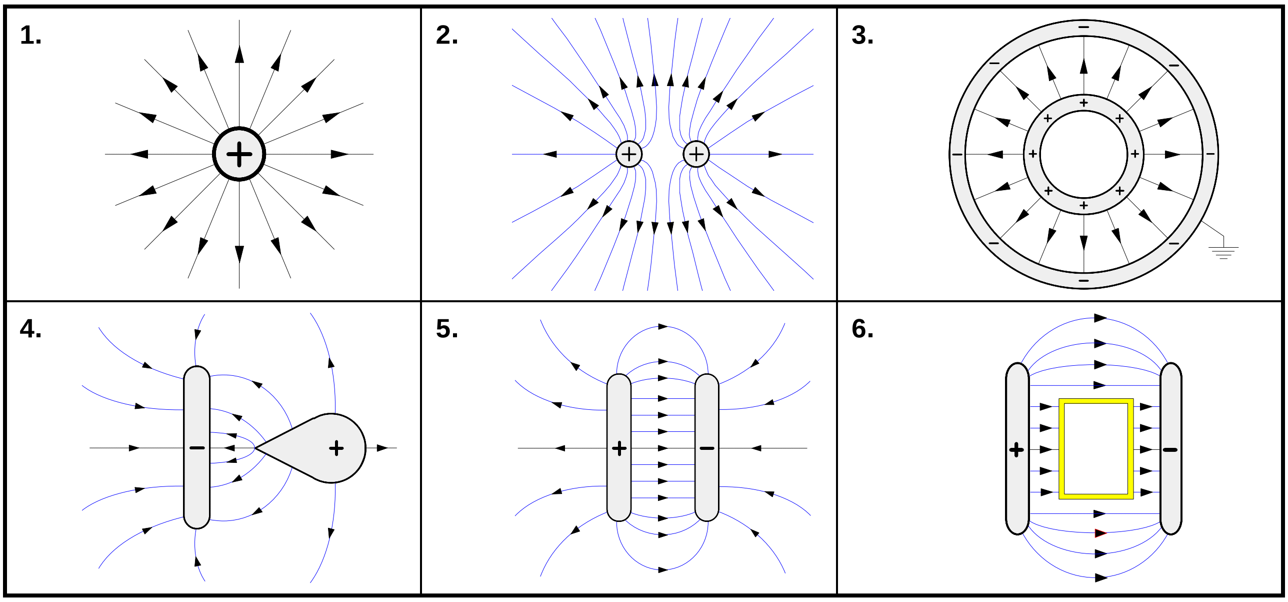


Bild 4: Feldlinienbild



Durch das elektrische Feld ändert sich in den Grießkörnern die Verteilung der dort vorhandenen Ladungen (Influenz). Dadurch werden die Grießkörner zu elektrischen Dipolen. Die entgegengesetzten Ladungen benachbarter Dipole ziehen sich an und reihen sich so kettenförmig aneinander.

c) **Elektrische Feldlinienbilder** in der Umgebung verschieden geformter Elektroden (geladene Metallkörper)



Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1** | Name: | ET1-3-F.DOC - 22.08.02

Arbeitsblatt Nr. **3** : Die elektrische **Feldstärke E** als **Wirkungsgröße** des elektrischen Feldes

1. **Kraftwirkung** eines **elektrischen Feldes** auf eine punktförmige positive **Probeladung Q_P**

● Theoretische Vorüberlegungen

Um eine mathematische Beschreibung elektrischer Felder im Sinne der **Faraday**schen Nahewirkungstheorie zu ermöglichen, hat **Maxwell** zunächst eine Feldgröße definiert, mit deren Hilfe sich das elektrische Feld in einem beliebigen Raumpunkt seiner **Wirkung** nach bestimmen läßt. Dabei ging er von der Kraft**wirkung** des elektrischen Feldes auf einen "sehr kleinen Körper" (Probekörper) mit einer "sehr kleinen Ladung" (punktförmige Probeladung Q_P) aus. Dazu schreibt **Maxwell** in seiner "Abhandlung über Elektrizität und Magnetismus" aus dem Jahre 1873:

> »Das elektrische Feld ist der Raum, der einen elektrisch geladenen Körper umgibt, auf seine elektrischen Erscheinungen hin betrachtet. Er kann mit Luft oder anderen Körpern erfüllt sein, er kann aber auch ein sogenanntes Vakuum sein, d.h. ein Raum, aus dem alle Stoffe entfernt sind, auf die wir mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln einwirken können.
>
> Wenn ein elektrisch geladener Körper an irgendeinen Punkt des elektrischen Feldes gebracht wird, so wird er im allgemeinen eine merkliche Störung auf die Ladung der übrigen Körper ausüben.
>
> Wenn der Körper aber sehr klein ist und seine Ladung auch sehr klein ist, so wird die Ladung der anderen Körper nicht merklich durch ihn gestört werden. Die Lage des Körpers können wir durch die Lage seines Massenzentrums angeben. Die auf den Körper wirkende Kraft ist dann proportional zu seiner Ladung.«

Quelle: J.Cl.Maxwell, Elektrizität und Magnetismus, Auszüge, hrsg. v. F.Emde, S.4

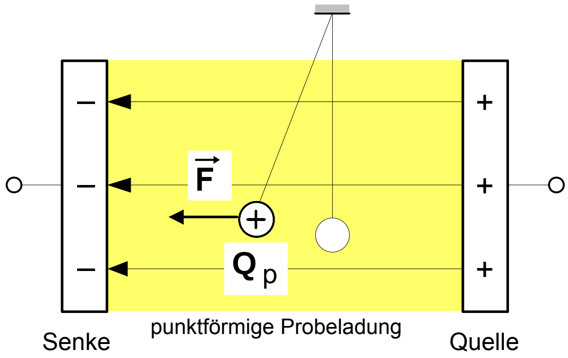
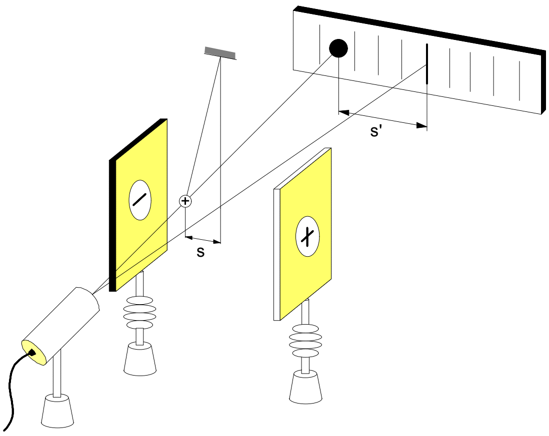


Bild 1: Probeladung in einem elektrischen Feld

● **Versuch** zum **Zusammenhang** zwischen **Kraft** und punktförmiger **Ladung** im elektrischen Feld

Der von Maxwell angedeutete Zusammenhang zwischen der Kraft **F** auf eine **punktförmige** Probeladung im elektrischen Feld und der Größe **Q_P** dieser Probeladung läßt sich mit Hilfe der folgenden Versuchsanordnung nachweisen:



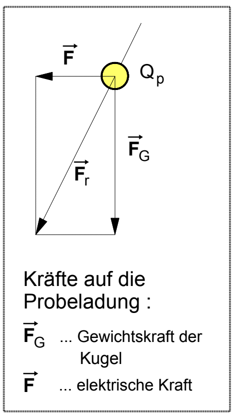
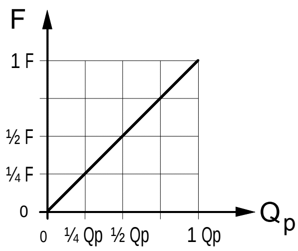


Bild 2: Versuchsanordnung zur Messung der elektrischen Kraft, die ein elektrisches Feld auf eine punktförmige Ladung ausübt



$F \sim Q_P \quad \Rightarrow \quad F = K \cdot Q_P$

mit $K = "E"$: $\quad F = E \cdot Q_P$ – oder allgemeiner

Für die **Kraft F**, die ein elektrisches Feld auf eine **Punktladung Q** ausübt gilt:

$$\boxed{F = E \cdot Q}$$

2. **Definition** der elektrischen **Feldstärke E** als **Wirkungsgröße** des elektrischen Feldes

Zur eindeutigen Beschreibung der Stärke eines elektrischen Feldes ist die von dem Feld auf einen geladenen Probekörper ausgeübte Kraft **F** nicht geeignet, da diese von der Größe der jeweils verwendeten Probeladung **Q_P** abhängt. Dagegen ist der Quotient aus **F** und **Q_P** unabhängig von der Größe der jeweiligen Probeladung. Deshalb hat **Maxwell** für die bereits erwähnte **elektrische Feldstärke E** folgende **Definition** (=Meßvorschrift) gewählt:

> Die **elektrische Feldstärke E** in einem beliebigen Raumpunkt eines elektrischen Feldes ist definiert als der **Quotient** aus der elektrischen **Kraft F**, die das elektrische Feld auf einen punktförmigen und positiv geladenen Probekörper im betrachteten Feldpunkt ausübt, und der Größe der punktförmigen elektrischen **Ladung Q_P** des Probekörpers.

$$\boxed{E = \frac{F}{Q_P}}$$

Mit Hilfe dieser Definition (=Meßvorschrift) läßt sich ein elektrisches Feld in jedem beliebigen Raumpunkt bezüglich der Stärke seiner **Wirkung** (nämlich auf eine Probeladung) nach meßtechnisch bestimmen. Wir wollen die **elektrische Feldstärke E** daher als **Wirkungsgröße** des **elektrischen Feldes** bezeichnen.

Maßeinheit der elektrischen Feldstärke:

$$[E] = \frac{[F]}{[Q]} = \frac{1N}{1C} = 1\frac{N}{C}$$

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name:	ET1-4-F.DOC - 22.08.02
Arbeitsblatt Nr. **4** :	**Ladungstrennung** durch **Influenz** im elektrischen Feld	

1. **Nachweis** der **Influenzwirkung** des **elektrischen Feldes**

Zwei an Isolierstielen befestigte gleich große Metallplatten werden aneinandergepreßt und in das homogene elektrische Feld eines Plattenkondensators mit der Feldstärke $\mathbf{E_1}$ parallel zu den Kondensatorplatten eingeführt (Bild **1** und Bild **2**). Anschließend werden die Probeplatten auseinandergezogen (Bild **3**) und schließlich wieder aus dem elektrischen Feld herausgenommen (Bild **4**). Berührt man die Probeplatten mit einem Elektroskop, so läßt sich zeigen, daß sie entgegengesetzt **geladen** sind. Außerdem ließe sich durch Feldstärkemessungen etwa mit Hilfe einer Probeladung nachweisen, daß das zwischen den Probeplatten verursachte elektrische Feld $\mathbf{E_2}$ genauso stark ist wie das elektrische Feld $\mathbf{E_1}$ des Plattenkondensators.

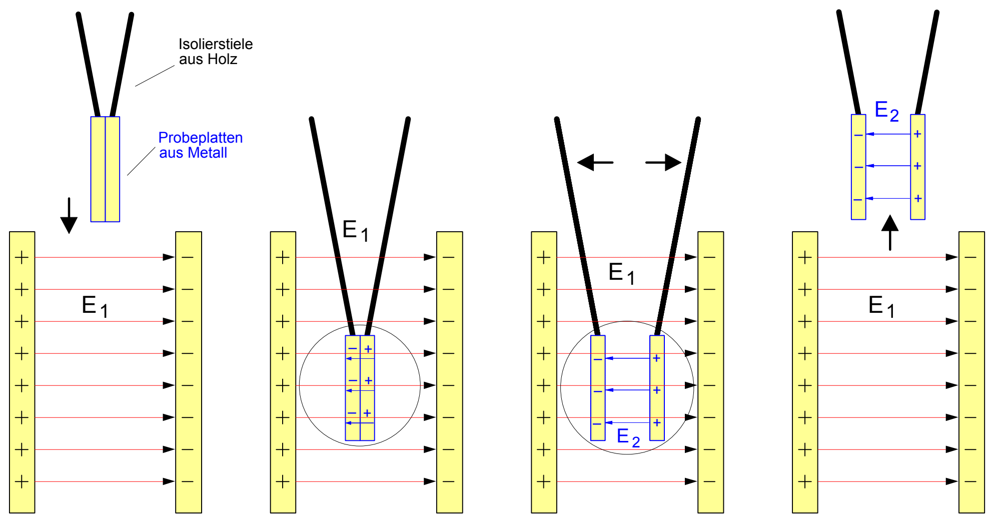


Bild 1 Bild 2 Bild 3 Bild 4

2. **Erklärung** der **Influenzwirkung** des **elektrischen Feldes**

Die leicht beweglichen __**negativen**__ Ladungen (freie Elektronen) auf den metallischen Probeplatten werden unter dem Einfluß des elektrischen Feldes $\mathbf{E_1}$ des Plattenkondensators auf die __**linke**__ Probeplatte verschoben, während auf der __**rechten**__ Probeplatte eine gleich große __**positive**__ Ladung zurückbleibt (siehe Bild **5**). Eine solche Ladungsverschiebung auf einem metallischen Körper durch ein elektrisches Feld bezeichnet man als elektrische __**Influenz**__ . Da die verschiebbare Ladungsmenge auf einem Metallkörper praktisch gesehen nahezu unerschöpflich groß ist, **endet diese Ladungsverschiebung**, wenn das durch die Influenzladung auf den Probeplatten erzeugte elektrische Feld $\mathbf{E_2}$ so groß geworden ist wie das elektrische Feld $\mathbf{E_1}$ des Plattenkondensators. Denn in diesem Fall heben sich das elektrische Feld $\mathbf{E_1}$ des Plattenkondensators und das entgegengesetzt gerichtete Feld $\mathbf{E_2}$ der Probeplatten gegenseitig auf und zwischen den Influenzladungenen entsteht ein __**feldfreier Raum**__ ; daher können jetzt in den Probeplatten keine Ladungen mehr verschoben werden. Werden die Probeplatten in dem elektrischen Feld auseinandergezogen (Bild **6**), so bleibt die Influenzladung erhalten und der feldfreie Raum dehnt sich aus.

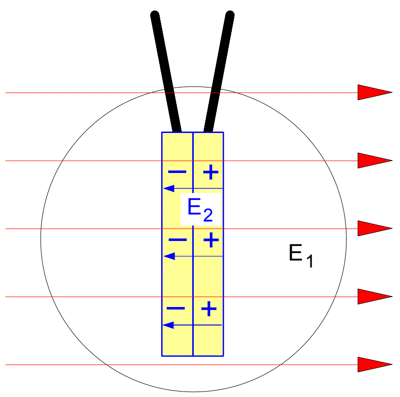


Bild 5 : Ausschnittvergrößerung von Bild 2
E1 : Feld des Plattenkondensators
E2 : Feld der Probeplatten

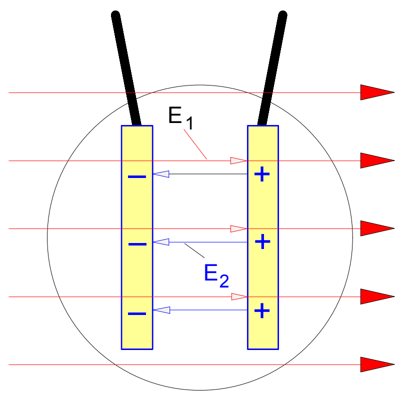


Bild 6 : Ausschnittvergrößerung von Bild 3

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-5-L.DOC - 28.08.02
Arbeitsblatt Nr. **5** : Die elektrische **Erregung D** als **Ursachengröße** des elektrischen Feldes	

1. Zum **Problem** der **feldtheoretischen Bestimmung** einer **Ursachengröße**

Wir konzentrieren uns bei unseren folgenden Überlegungen zur Bestimmung einer **Ursachen**größe auf einen beliebigen Raum**punkt P** im homogenen elektrischen Feld eines Plattenkondensators, auf dessen Platten mit den gleich großen Plattenflächen $\mathbf{A_1}$, sich jeweils eine gleich große positive und negative Ladung ($\mathbf{Q_{1+}}$ und $\mathbf{Q_{1-}}$) befindet.

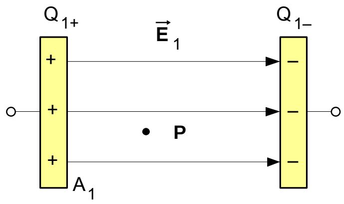


Bild 1

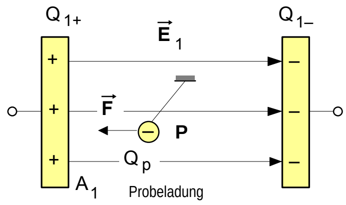


Bild 2

Bringt man an diesen **Punkt P** eine Probeladung $\mathbf{Q_p}$, so übt das elektrische Feld in diesem Punkt auf die Probeladung eine bestimmte Kraft**wirkung** $\vec{\mathbf{F}}$ aus (siehe **Bild 2**). Gemäß der Definition für die elektrische Feldstärke **E** (siehe Arbeitsblatt Nr. **3**) läßt sich demnach die Intensität des elektrischen Feldes in diesem Raumpunkt **P** seiner **Wirkung** nach bestimmen, indem man die Kraft **F** auf die bekannte Probeladung $\mathbf{Q_p}$ mißt und die **Wirkungs**größe, d.h. die elektrische **Feldstärke E** nach der Formel $\mathbf{E = F/Q_p}$ berechnet.

Nach der FARADAYschen Nahewirkungs- oder Feldtheorie sind der Ort der **Wirkung** und der Ort der **Ursache** eines elektrischen Feldes nicht räumlich durch eine bestimmte Entfernung voneinander getrennt (wie dies die sog. "Fernwirkungstheorie" behauptete), sondern **fallen** in **jedem Raumpunkt** des jeweiligen Feldes **zusammen** (siehe Arbeitsblatt Nr.**2** des Lehrgangs Elektrotechnik **1**). Daher wäre als nächstes zu fragen, wie sich die Intensität des elektrischen Feldes im Raumpunkt **P** der **Ursache** nach bestimmen läßt, auch wenn die feldver**ursachende** Ladung, wie in dem vorliegenden Fall die Ladung $\mathbf{Q_1}$ auf den beiden Kondensatorplatten, sich **nicht** in diesem Punkt **P** befindet. Gesucht wird demnach eine Meßanordnung und eine Meßvorschrift (=Definition), die es ermöglicht, die Größe des elektrischen Feldes im Raumpunkt **P** seiner **Ursache** nach zu bestimmen, und zwar unabhängig von der feldverursachenden Ladung $\mathbf{Q_1}$ auf den Kondensatorplatten $\mathbf{A_1}$. Dazu wollen wir von der in den **Bilder 3** und **4** dargestellten Versuchsanordnung ausgehen.

2. **Definition** der elektrischen **Erregung D** als **Ursachengröße** des elektrischen Feldes

Bringt man nun an den Punkt **P** zwei sich berührende metallische Probeplatten mit den Plattenflächen $\mathbf{A_2}$, so ver**ursacht** das elektrische Feld $\vec{\mathbf{E}}_1$ der äußeren Kondensatorplatten auf den Probeplatten eine Ladungsverschiebung und Ladungstrennung durch **Influenz**. Die auf den Probeplatten erzeugten gleich großen Influenzladungen $\mathbf{Q_{2+}}$ und $\mathbf{Q_{2-}}$ ver**ursachen** ihrerseits in dem Punkt **P** ein elektrisches Feld $\vec{\mathbf{E}}_2$, das gegenüber dem Feld $\vec{\mathbf{E}}_1$ entgegengesetzt gerichtet ist. Beide Felder überlagern sich. Während der Ladungsverschiebung nimmt die Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}_2$ des inneren Feldes proportional mit der Influenzladung $\mathbf{Q_2}$ zu. Die Ladungsverschiebung **endet**, wenn die innere Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}_2$ dem Betrage nach genau so groß geworden ist wie die äußere Feldstärke $\vec{\mathbf{E}}_1$ (siehe dazu auch Arbeitsblatt Nr. **4**). Ist dieser Gleichgewichtszustand hergestellt, dann befindet sich einerseits in dem Punkt **P** eine bestimmte, das Feld $\vec{\mathbf{E}}_2$ ver**ursachende** Ladung $\mathbf{Q_2}$. Andererseits ist der Punkt **P** wegen $\mathbf{E_2 = E_1}$ ***feldfrei***, was sich unschwer nachweisen ließe, wenn man die Probeplatten auseinanderzöge und in den Punkt P eine Probeladung brächte.

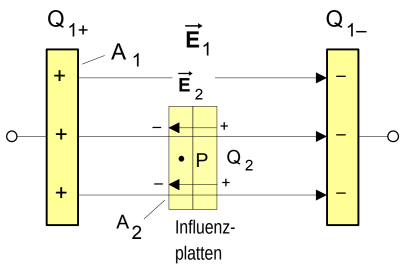


Bild 3

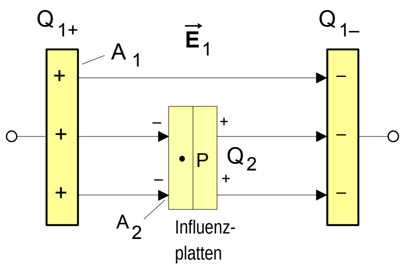


Bild 4

Die Influenzladung $\mathbf{Q_2}$ ist die **Ursache** des Feldes $\vec{\mathbf{E}}_2$. Sie verteilt sich gleichmäßig auf die Fläche $\mathbf{A_2}$ der Probeplatten. Der Punkt **P** ist **ein** Punkt auf dieser Fläche. Will man jetzt gleichsam die feldverursachende Ladung **"pro Punkt"** bestimmen, so muß man die gesamte Ladung $\mathbf{Q_2}$ durch die Fläche $\mathbf{A_2}$ dividieren, denn in dieser Fläche sind ja alle Punkte und damit auch unser Punkt **P** enthalten. Diesen Quotienten $\mathbf{Q_2/A_2}$ bezeichnet man auch als Flächenladungs**dichte**. Diese Dichte $\mathbf{Q_2/A_2}$ der feldverursachenden Ladung kann als Maß für die **Ursache** des Feldes $\vec{\mathbf{E}}_2$ im Punkt **P** betrachtet werden. Da die sich im Punkt **P** überlagernden Felder ihrer **Wirkungs**größe nach gleich groß sind (d.h. $\mathbf{E_2 = E_1}$), so ist die Flächenladungsdichte $\mathbf{Q_2/A_2}$ **zugleich auch** ein Maß für die **Ursache** des **äußeren** Feldes $\vec{\mathbf{E}}_1$ im Raumpunkt **P**. Wir können daher die Flächenladungsdichte auf den Probeplatten als unsere gesuchte **Ursachengröße** bestimmen. Wir bezeichnen sie als **elektrische Erregung D** (auch: "Verschiebungsdichte") und definieren sie allgemeiner wie folgt:

- Definition der **elektrischen Erregung D**

$$\boxed{D = \frac{Q}{A}}$$

A ... Fläche der Probeplatten im Feldpunkt P in m²
Q ... Ladung in C, die durch das Feld auf den Probeplatten verschoben wird
D ... elektrische Erregung im Feldpunkt P in C/m²

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-5A-F.DOC - 29.08.02

Arbeitsblatt Nr. **5 a)** : Meßvorschriften zur **Messung** der elektrischen **Feldgrößen E** und **D**

1. **Definition** und **Meßprinzip** zur Bestimmung der elektrischen **Feldstärke E** als ***Wirkungs***größe

Mit seiner Definition der elektrischen **Feldstärke E** hat James Clerk **Maxwell** (1831 – 1879) zugleich auch ein Verfahren (Meßvorschrift) angegeben, wie die *Intensität eines elektrischen Feldes* mit Hilfe einer **Probeladung** hinsichtlich seiner ***Wirkung*** in jedem beliebigen Raumpunkt ge***messen*** werden kann. Da die Definition der elektrischen **Feldstärke E** auf der Kraft**wirkung** beruht, die das Feld in dem jeweiligen Punkt auf eine Probeladung ausübt, bezeichnen wir diese elektrische Feldgröße als **Wirkungsgröße** des elektrischen Feldes.

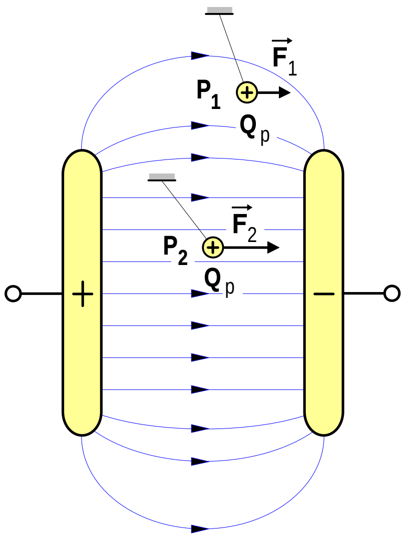
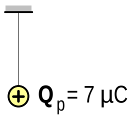


Bild 1: **Probeladungen** in den Raumpunkten P_1 und P_2 eines elektrischen Feldes

- Positive **Probeladung** zur Ermittlung der elektrischen **Feldstärke E**:



- Meßergebnisse (Beispiele):
  - ▶ Raumpunkt P_1:

    F_1 = **0,2** N $\Rightarrow$

    Q_P = **7** µC
  - ▶ Raumpunkt P_2:

    F_2 = **0,35** N $\Rightarrow$

    Q_P = **7** µC

- **Definition** (Meßvorschrift) der elektrischen **Feldstärke E** :

$$\boxed{E = \frac{F}{Q_p}}$$

F ... die von dem Feld auf die Probeladung ausgeübte Kraft in **N**

Q_p ... Probeladung in **C**

- Elektrische **Feldstärke** in dem
  - ▶ Raumpunkt P_1 :

$$\boxed{E_1 = \frac{F_1}{Q_P} = \frac{0{,}2\ N}{7\ \mu N} = 28{,}6\ \frac{k\,N}{C}}$$

  - ▶ Raumpunkt P_2 :

$$\boxed{E_2 = \frac{F_2}{Q_P} = \frac{0{,}35\ N}{7\ \mu N} = 50{,}0\ \frac{k\,N}{C}}$$

2. **Definition** und **Meßprinzip** zur Bestimmung der elektrischen **Erregung D** als ***Ursachen***größe

Ebenfalls von **Maxwell** stammt die Definition der elektrischen **Erregung D**. Damit hat er zugleich ein Verfahren angegeben, wie die *Intensität eines elektrischen Feldes* mit Hilfe zweier **Probeplatten** auch hinsichtlich seiner ***Ursache*** in jedem beliebigen Raumpunkt ge***messen*** werden kann. Denn die Definition der elektrischen **Erregung D** beruht darauf, daß ein elektrisches Feld auf zwei Probeplatten durch Influenz eine Ladung **Q** erzeugt und damit zwischen den Probeplatten selbst ein elektrisches Feld gleicher Intensität ver**ursacht**. Daher bezeichnen wir diese elektrische Feldgröße als **Ursachengröße** des elektrischen Feldes.

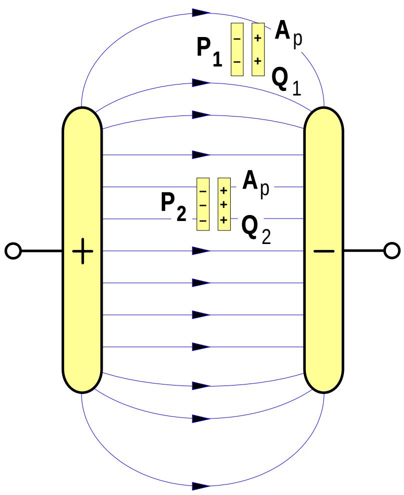
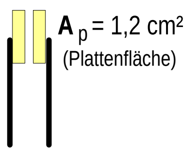


Bild 2: **Probeplatten** in den Raumpunkten P_1 und P_2 eines elektrischen Feldes

- **Probeplatten** zur Ermittlung der elektrischen **Erregung D** :



- Meßergebnisse (Beispiele):
  - ▶ Raumpunkt P_1:

    Q_1 = **30,3** pC $\Rightarrow$

    A_P = **1,2** · 10^{-4} m²
  - ▶ Raumpunkt P_2:

    Q_2 = **53,2** pC $\Rightarrow$

    A_P = **1,2** · 10^{-4} m²

- **Definition** (Meßvorschrift) der elektrischen **Erregung D** :

$$\boxed{D = \frac{Q}{A_p}}$$

Q ... die von dem Feld auf den Probeplatten durch Influenz verursachte Ladung in **C**

A_p ... Fläche der Probeplatten in **m²**

- Elektrische **Erregung** in dem
  - ▶ Raumpunkt P_1 :

$$\boxed{D_1 = \frac{Q_1}{A_P} = \frac{30{,}3\ pC}{1{,}2 \cdot 10^{-4}\ m^2} = 0{,}252\ \frac{\mu\,C}{m^2}}$$

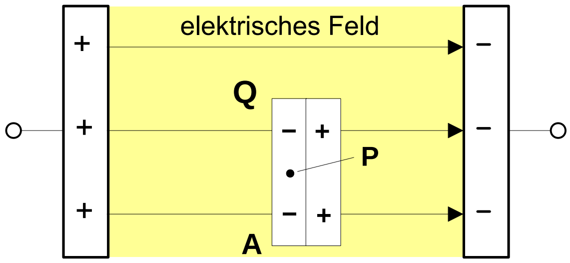
  - ▶ Raumpunkt P_2 :

$$\boxed{D_2 = \frac{Q_2}{A_P} = \frac{53{,}2\ pC}{1{,}2 \cdot 10^{-4}\ m^2} = 0{,}443\ \frac{\mu\,C}{m^2}}$$

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name:	ET1-6-F.DOC - 05.09.02
Arbeitsblatt Nr. **6** :	Das **Grundgesetz** des **elektrostatischen Feldes**	

· Bestimmung der **Ursachen**größe **D** und der **Wirkungs**größe **E** im **elektrischen Feld**

▶ Auf den Metall-**Probeplatten** mit der Fläche **A** erzeugt das **elektrische Feld** durch Influenz eine Ladung **Q**, die ihrerseits ein gleich starkes Gegenfeld ver**ursacht** und damit einen feldfreien Raum zwischen den Ladungen auf den Probeplatten.

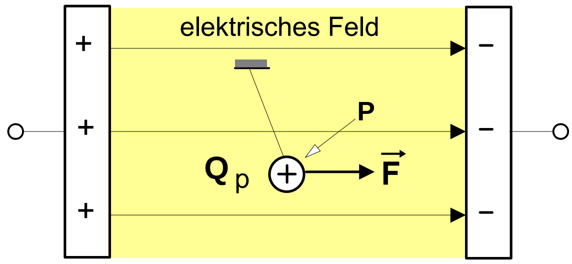


Probeplatten mit der Influenz-Ladung Q im Punkt P

▶ Meßvorschrift (Definition) zur Bestimmung der elektrischen **Erregung D** als **Ursachen**größe des elektrischen Feldes im Raumpunkt **P**:

$$\boxed{D = \frac{Q}{A}}$$

▶ Auf das Metall-Kügelchen mit der positiven **Probeladung Q_P** übt das **elektrische Feld** eine elektrische Kraft **F** aus und be**wirkt** damit eine Ablenkung des Probekörpers in Richtung des elektrischen Feldes



Kraft auf eine Probeladung im Punkt P

▶ Meßvorschrift (Definition) zur Bestimmung der elektrischen **Feldstärke E** als **Wirkungs**größe des elektrischen Feldes im Raumpunkt **P**:

$$\boxed{E = \frac{F}{Q_p}}$$

· Zusammenhang zwischen **Ursachen**größe **D** und **Wirkungs**größe **E** des **elektrischen Feldes**

Ursache **D** - ⇒ **E** - Wirkung

D ~ **E**

D = K · **E**

Die **Konstante K** ist von dem **Material** des Isolierstoffs **abhängig**, in dem sich das elektrische Feld befindet. Sie wird als **"Dielektrizitätskonstante"** ε (auch: Permittivität) bezeichnet (siehe unten).

· Das **Grundgesetz** des **elektrischen Feldes** ruhender Ladungen (Elektrostatik)

$$\boxed{D = \varepsilon \cdot E}$$

E ... elektrische Feldstärke in N/C = V/m
e ... Dielektrizitätskonstante (auch: Permittivität) in C²/Nm² = As/Vm
D ... elektrische Erregung in C/m² = As/m²

· Die **Dielektrizitätskonstante** e

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$$

ε_o ... elektrische Feldkonstante in C²/Nm² = As/Vm
ε_r ... Dielektrizitätszahl (Materialfaktor ohne Einheit)

▶ **Dielektrizitätszahlen** einiger Isolierstoffe:

● Vakuum	ε_r = **1**
○ Luft	ε_r = **1,000576**
○ Isolieröl	ε_r = **2,2**
○ Glycerin	ε_r = **43,0**
○ Titandioxid	ε_r = **60** ... **100**

▶ **Elektrische Feldkonstante:** $\varepsilon_0 = \mathbf{8{,}854 \cdot 10^{-12}}\ \frac{C^2}{N \cdot m^2}$ bzw.

e_o = **8,854 · 10** $^{-12}$ As/Vm

- **Gedankenexperiment**: Wir denken uns eine dünne Metallplatte mit der Plattenfläche **A** so in einem **homogenen** elektrischen Feld angeordnet, daß die gesamte Fläche **A** vollständig von dem Feld mit der Feldstärke **E** durchsetzt wird und die Feldlinien **senkrecht** zur Plattenfläche verlaufen (Bild **1**).

  Durch die Influenzwirkung des elektrischen Feldes **E** wird dann auf der Metallplatte eine Ladung **Q** erzeugt (Bild **2**).

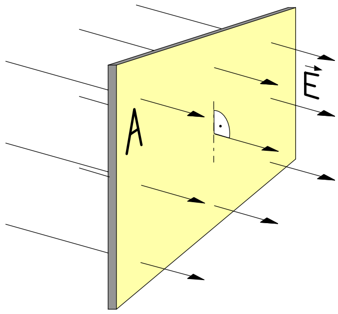


Bild **1**

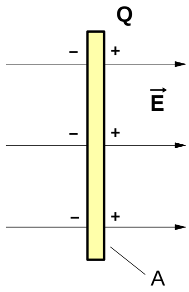


Bild **2**

- Nach dem **Grundgesetz** des elektrostatischen Feldes gilt dann für die **elektrische Erregung D** des Feldes (im Vakuum):

(1) $D = \varepsilon_o \cdot E$ mit $D = \dfrac{Q}{A}$

(2) $\dfrac{Q}{A} = \varepsilon_o \cdot E$

(3) $\dfrac{Q}{\varepsilon_o} = \underbrace{E \cdot A}_{= \Phi_{el}}$ (Gaußscher Satz)*

Carl Friedrich Gauß

- Definition des **elektrischen Feldflusses** :

$$\boxed{\Phi_{el} = E \cdot A}$$ wobei $E \cdot A = \dfrac{Q}{\varepsilon_o}$

A ... ebene Fläche senkrecht im elektrischen Feld in **m²**

E ... elektrische Feldstärke in jedem Punkt der Fläche A in **N/C**

Φ_{el} ... elektrischer Feldfluss in **Nm²/C**

* nach Carl Friedrich Gauß (1777-1855): dt. Mathematiker u. Physiker

- Das **Produkt** » **E · A** « auf der rechten Seite der Gleichung (3) definieren wir als den sog. »**elektrischen Feldfluss** Φ_{el}« (siehe rechts).

- Da mit der Feldstärke **E** die in jedem Punkt auf der Fläche **A** vorhandene Intensität des elektrisches Feldes gekennzeichnet wird und in der Fläche A alle nur denkbaren Punkte enthalten sind, ist das Produkt » **E · A** « und damit der elektrische Feldfluss Φ_{el} gleichsam ein Maß dafür, »wieviel Feld mit der Feldstärke **E**« durch eine bestimmte Fläche **A** »hindurchströmt«. Im Feldlinienmodell ließe sich (bei einer vereinbarten Feldliniendichte als Maß für die Feldstärke E) der elektrische Feldfluss Φ_{el} als »Anzahl der Feldlinien« deuten, die eine bestimmte Fläche durchsetzen (siehe Bild **3**).

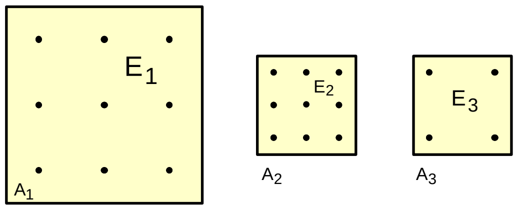


Bild **3**

- Da sowohl im Bild **4** (Influenz-Platte im homogenen Feld eines Plattenkondensators) als auch im Bild **5** (Influenz-Hohlkugel im radialsymmetrischen Feld einer geladenen Kugel) jeweils der gesamte, von der jeweiligen **felderzeugenden** Ladung $\mathbf{Q_1}$ ausgehende elektrische Feldfluß Φ_{el} von den Flächen $\mathbf{A_2}$ der Influenzkörper erfasst wird, gilt *in beiden Fällen* für die Größe der **influenzierten** Ladung $\mathbf{Q_2}$:

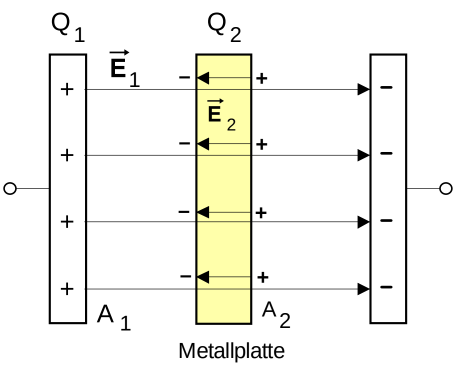


Bild **4**

- Da $\mathbf{E_2 = E_1}$ und $\mathbf{A_2 = A_1}$, gilt auch:
- $\mathbf{E_2 \cdot A_2 = E_1 \cdot A_1}$

bzw.

$\Phi_{el2} = \Phi_{el1}$

- Da außerdem

$\Phi_{el} = E \cdot A = \dfrac{Q}{\varepsilon_o}$, gilt:

$$\frac{Q_2}{\varepsilon_o} = \frac{Q_1}{\varepsilon_o}$$

- **Fazit:** $\boxed{Q_2 = Q_1}$

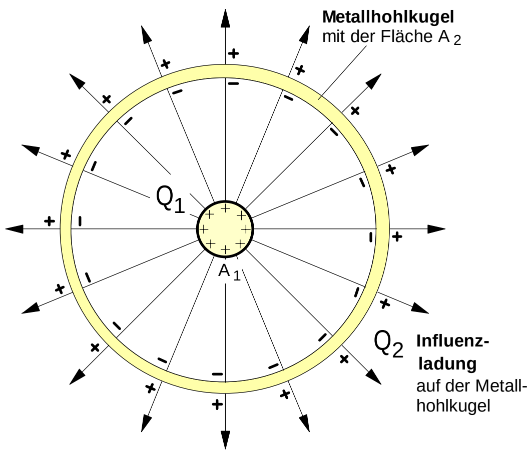
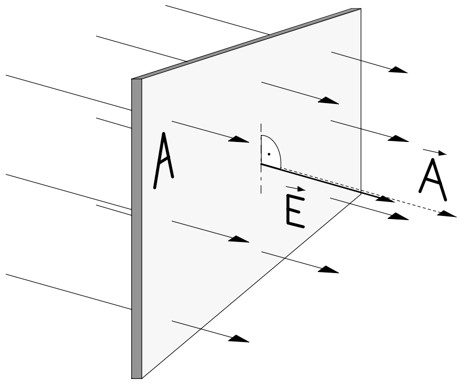


Bild **5**

$\boxed{Q_2 = Q_1}$

1. Sonderfall **1** : Ein **homogenes elektrisches Feld** verläuft **senkrecht** durch eine ebene **Fläche A**

Bei unseren bisherigen Überlegungen zum elektrischen Feldfluss Φ_{el} sind wir davon ausgegangen, dass ein **homogenes** elektrisches Feld mit der Feldstärke **E** **senkrecht** durch eine vorgegebene Fläche **A** »hindurchströme«. In diesem Sonderfall läßt sich der elektrische Feldfluss nach folgender Formel berechnen:



$$\boxed{\Phi_{el} = E \cdot A}$$

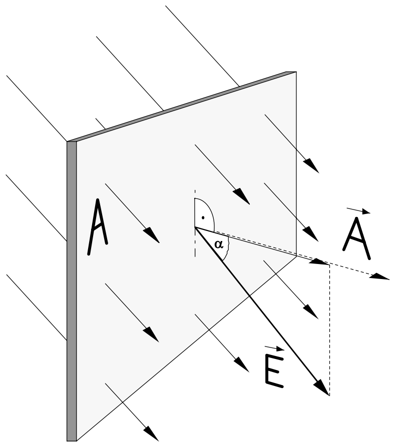
A ... ebene Fläche senkrecht im elektrischen Feld in m²

E ... elektrische Feldstärke in jedem Punkt der Fläche in N/C

Φ_{el} ... elektrischer Feldfluss in N · m² / C

2. Sonderfall **2** : Ein **homogenes elektrisches Feld** verläuft **schräg** durch eine ebene **Fläche A**

Häufig wird eine ebene Fläche **A** nicht senkrecht, sondern **schräg** von einem **homogenen** elektrischen Feld mit der Feldstärke **E** durchsetzt, d.h. der **Vektor** der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und der Flächenvektor $\vec{A}$ haben nicht mehr die gleiche Raumrichtung, sondern schließen einen von Null verschiedenen **Winkel** α ein. In diesen Fällen ist der elektrische Feldfluss Φ_{el} zu bestimmen als das **Skalarprodukt** der **Vektoren** $\vec{E}$ und $\vec{A}$.



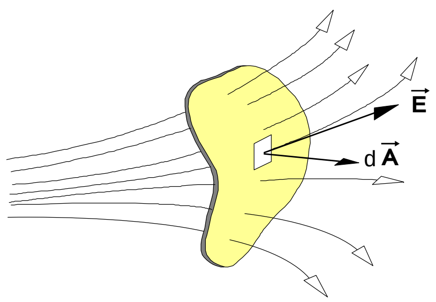
$$\boxed{\Phi_{el} = \vec{E} \cdot \vec{A}}$$

Mit den ***Beträgen*** $|\vec{E}| = E$ und $|\vec{A}| = A$ lässt sich der elektrische Feldfluss in diesem Fall wie folgt berechnen:

$$\boxed{\Phi_{el} = E \cdot A \cdot \cos\alpha}$$

Wobei α der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{E}$ und $\vec{A}$ ist.

3. Allgemeiner Fall : Ein **inhomogenes elektrisches Feld** durchsetzt eine **beliebige Fläche A**



In den meisten Fällen ist das eine Fläche A durchsetzende elektrische Feld **inhomogen**, d.h. in jedem Punkt der Fläche herrscht dem Betrage **und** der Richtung nach eine andere elektrische Feldstärke $\vec{E}$. In diesem Fall denken wir uns die Gesamtfläche A in mehrere Flächenstücke $\Delta \vec{A}_i$ mit jeweils einer durchschnittlichen Feldstärke $\vec{E}_i$ zerlegt. Für den elektrischen Feldfluss gilt dann näherungsweise die Summe:

$$\Phi_{el} \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Für die exakte Bestimmung des elektrischen Feldflusses ist der **Grenzwert dieser Summe** zu bilden:

$$\Phi_{el} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Dieser Grenzwert ist das Flächenintegral :

$$\boxed{\Phi_{el} = \int E \cdot dA}$$

Arbeitsblatt Nr. **6 b)**: **Erste Aufgabenbeispiele** zum **elektrostatischen Grundgesetz**

1. In dem homogenen elektrischen Feld eines Plattenkondensators wird in dem Raumpunkt **P** ein kleiner Probekörper, auf dem sich eine punktförmige Probeladung von **7** µC befindet, mit einer Kraft von **0,28** N abgelenkt (siehe **Bild 1**).

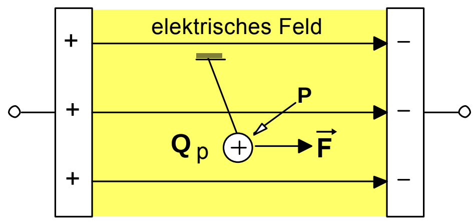


Bild 1

Welche Ladung $\mathbf{Q_x}$ würde auf einem dünnen Metallplättchen mit einer Fläche von $\mathbf{A_x}$ = **10** cm² durch Influenz verschoben, wenn man das Plättchen in diesem Kondensatorfeld senkrecht zu den Feldlinien anordnen würde (siehe **Bild 2**)? [354 pC]

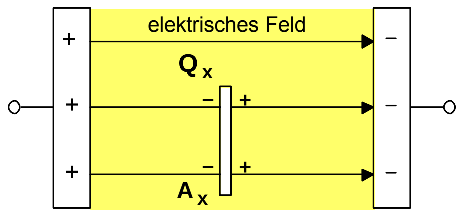


Bild 2

2. Eine punktförmige positive Ladung $\mathbf{Q_1}$ = **1** µC erzeugt in ihrer Umgebung ein radialsymmetrisches elektrisches Feld (siehe **Bild 3**).

a) Bestimmen Sie die **elektrische Feldstärke** $\mathbf{E_x}$ in einem Punkt $\mathbf{P_x}$, der sich in einer Entfernung von **0,2** m vom Mittelpunkt der punktförmigen Ladung befindet. [225 · 10³ N/C]

b) Berechnen Sie den von $\mathbf{Q_1}$ ausgehenden **elektrischen Feldfluss**. [113 · 10³ Nm²/C]

c) Mit welcher **Kraft** würde eine punktförmige Ladung $\mathbf{Q_2}$ = **7** µC abgelenkt, wenn man sie in den Punkt $\mathbf{P_x}$ brächte? [1,573 N]

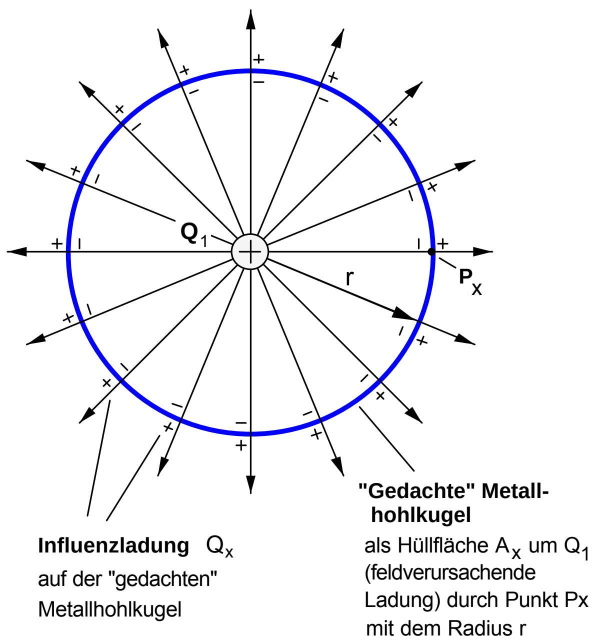


Bild 3

3 **Weitere Übungsaufgaben** aus dem Aufgabenbuch von **H. Lindner, Band 1, S.81**

Nr. **796** **a)** und **b)**

Nr. **797** **a)** und **b)**

Nr. **798** **a)** und **b)**

Nr. **800** (Hinweis: Die Spannungsquelle wird nach dem Laden abgeklemmt.)

Nr. **801**

Wichtiger Hinweis

Für die Lösung einiger Aufgaben aus dem Buch von Lindner benötigen Sie folgende Formel zur Berechnung der **Spannung** im elektrischen Feld **eines Plattenkondensators** (die Begründung folgt später - siehe Arbeitsblatt Nr. 7 a)):

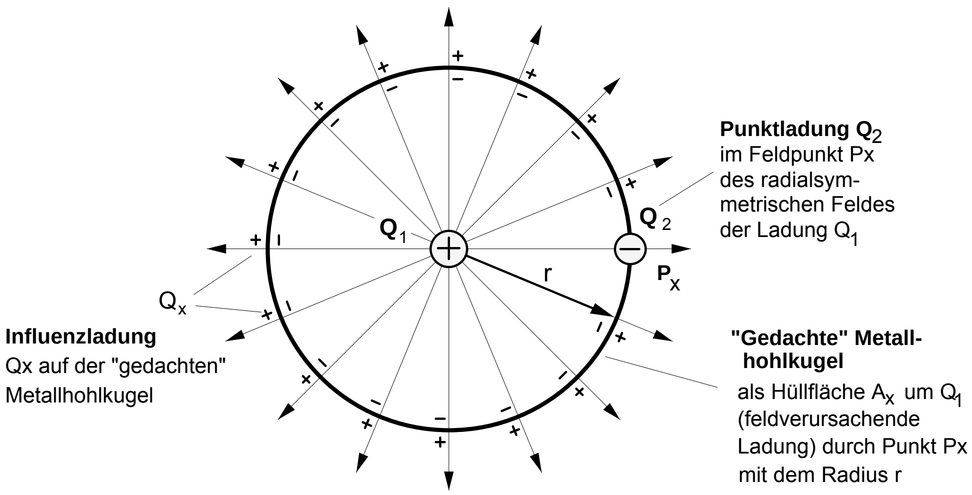
$$\boxed{U = E \cdot d}$$

E ... Feldstärke in N/C = V/m
d ... Plattenabstand in m
U ... elektrische Spannung in V

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-6C-F.DOC - 12.09.02

Arbeitsblatt Nr. **6 c)** : **Feldtheoretische Begründung** des **Coulombschen Gesetzes**

- Zur **systematischen Begründung** des **Coulombschen Gesetzes** mit dem Grundgesetz des elektro-- statischen Feldes gehen wir im folgenden davon aus, daß sich in dem radialsymmetrischen Feld einer Punktladung $\mathbf{Q_1}$ eine zweite Punktladung $\mathbf{Q_2}$ in einem Feldpunkt $\mathbf{P_x}$ im Abstand **r** von der Ladung $\mathbf{Q_1}$ befindet.



a) Da der **gesamte**, von der feldverursachenden Ladung $\mathbf{Q_1}$ ausgehende elektrische Feldfluß F_{el} gleichsam durch die als Hüllfläche $\mathbf{A_x}$ "gedachte" Metallhohlkugel "hindurchströmt", gilt für die auf dieser "gedachten" Metallhohlkugel verschobene **Influenzladung** $\mathbf{Q_x}$:

$$Q_x = Q_1$$

b) Für die **Elektrische Erregung** $\mathbf{D_x}$ und damit für die Größe der **Ursache** des elektrischen Feldes von $\mathbf{Q_1}$ im Punkt $\mathbf{P_x}$ gilt dann:

(1) $D_x = \frac{Q_x}{A_x}$ mit $\mathbf{Q_x = Q_1}$ und $\mathbf{A_x = 4 \cdot p \cdot r^2}$ (**Oberfläche** der **Hüllkugel** mit dem Radius **r**)

(2) $D_x = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$

c) Die Verknüpfung der **Ursache** mit der **Wirkung** des elektrischen Feldes der Ladung $\mathbf{Q_1}$ im Feldpunkt $\mathbf{P_x}$ erfolgt über das **Grundgesetz des elektrostatischen Feldes :**

(3) $\boxed{D_x = \varepsilon_o \cdot E_x}$ wobei $e_o = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

d) Damit kann die **elektrische Feldstärke** $\mathbf{E_x}$ als **Wirkungs**größe des elektrischen Feldes der Ladung $\mathbf{Q_1}$ im Punkt $\mathbf{P_x}$ wie folgt berechnet werden :

(4) $E_x = \frac{D_x}{\varepsilon_o}$ **.** Für $\mathbf{D_x}$ gemäß Gleichung **(2)** $D_x = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$ eingesetzt, ergibt sich dann :

(5) $E_x = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon_o}$

e) Für die **elektrische Kraft F**, die das elektrische Feld mit der Feldstärke $\mathbf{E_x}$ im Punkt $\mathbf{P_x}$ auf die dort befindliche Ladung $\mathbf{Q_2}$ ausübt, gilt die Formel

(6) $F = E_x \cdot Q_2$

f) Setzt man schließlich die Gleichung **(5)** in Gleichung **(6)** ein, so ergibt sich für die von der Punktladung $\mathbf{Q_1}$ auf die im im Abstand **r** befindliche Ladung $\mathbf{Q_2}$ ausgeübte Kraft **F** das von Coulomb 1785 auf der Grundlage einer spekulativen Übertragung des Gravitationsgesetzes gewonnene **Coulombsche Gesetz :**

$$\boxed{F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}}$$

Erst durch diese systematische Begründung mit dem feldtheoretischen Prinzip D = e_o · E konnte der spekulative Charakter des Gesetzes von Coulomb als Fernwirkungsgesetz überwunden werden.

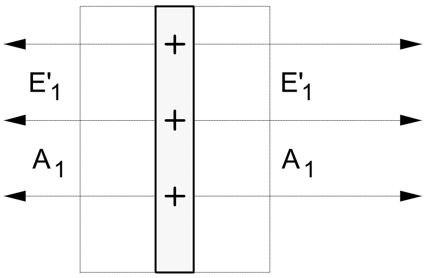
Arbeitsblatt Nr. **6 d)** : **Anziehungskraft zwischen zwei Kondensatorplatten**

Bei der folgenden Darstellung soll von der Annahme ausgegangen werden, daß die Ladungen auf den Kondensatorplatten ein homogenes Feld hervorrufen, das von den Rändern der Platten scharf begrenzt sei.

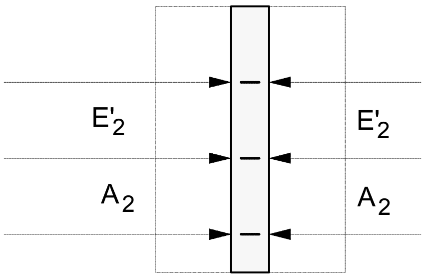
1. Die Kondensatorplatten mit den gleich großen Ladungen $\mathbf{Q_{1+}}$ und $\mathbf{Q_{2-}}$ werden zunächst **getrennt** betrachtet

Platte 1 mit $\mathbf{Q_{1+}}$

Die Ladung $\mathbf{Q_{1+}}$ auf der Platte **1** erzeugt ein homogenes Feld mit der Feldstärke $\mathbf{E'_1}$.



Platte 2 mit $\mathbf{Q_{2-}}$



Die Ladung $\mathbf{Q_{2-}}$ auf der Platte **2** erzeugt ein homogenes Feld mit der Feldstärke $\mathbf{E'_2}$.

2. Parallele Gegenüberstellung der Platten im Abstand **d** und **Überlagerung** der **Felder** $\mathbf{E'_1}$ und $\mathbf{E'_2}$:

Kraft $\mathbf{F_1}$, die das Feld $\mathbf{E'_1}$ auf die Platte mit der Ladung $\mathbf{Q_{2-}}$ ausübt:

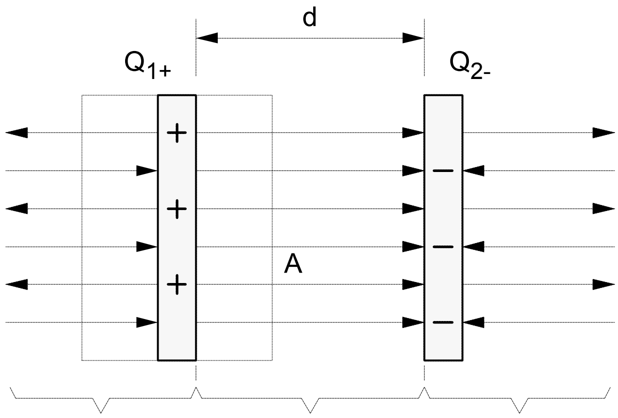
$$\boxed{F_1 = E'_1 \cdot Q_{2-}}$$

mit $Q_{2-} = Q_{1+} = Q$

und $E'_1 = E'_2 = E'$

gilt dann:

$$F_1 = E' \cdot Q$$



E = 0 | $\mathbf{E = E'_1 + E'_2}$ | **E = 0**

mit $\mathbf{E'_1 = E'_2 = E'}$

gilt für die Feldstärke **zwischen** den Platten :

$$\mathbf{E = 2 \cdot E'}$$

Kraft $\mathbf{F_2}$, die das Feld $\mathbf{E'_2}$ auf die Platte mit der Ladung $\mathbf{Q_{1+}}$ ausübt:

$$\boxed{F_2 = E'_2 \cdot Q_{1+}}$$

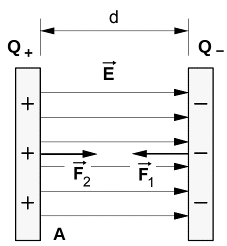
mit $Q_{1+} = Q_{2-} = Q$

und $E'_1 = E'_2 = E'$

gilt dann:

$$F_2 = E' \cdot Q$$

3. Bestimmung des Betrages der **Anziehungskraft F** (= $\mathbf{F_1}$ = $\mathbf{F_2}$) zwischen den Platten



- Für den elektrischen **Feldfluß** zwischen den Platten gilt die Beziehung

$$\Phi_{el} = E \cdot A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{mit} \qquad E = 2 \cdot E'$$

$$2 \cdot E' \cdot A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{mit} \qquad E' = \frac{F}{Q}$$

$$2 \cdot \frac{F}{Q} \cdot A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad Þ \qquad \boxed{F = \frac{Q^2}{2 \cdot A \cdot \varepsilon_0}}$$

Q ... Ladung auf einer Platte in **C**

F ... Kraft auf eine Platte in **N**

A ... Plattenfläche in **m²**

d ... Plattenabstand in **m**

- bzw. mit $Q = \varepsilon_0 \cdot E \cdot A \Rightarrow F = \dfrac{(\varepsilon_0 \cdot E \cdot A)^2}{2 \cdot A \cdot \varepsilon_0}$ Þ $\boxed{F = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot A \cdot E^2}$

E... Feldstärke in **N/C**

- oder mit $E = \dfrac{U}{d}$ Þ $\boxed{F = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot A \cdot \frac{U^2}{d^2}}$

U... Spannung in **V**

1. **Zum Prinzip der Überlagerung elektrischer Felder** (auch: Superposition)

Überlagerung: Treffen in einem Raumgebiet die elektrischen Felder verschiedener Ladungen zusammen, so kann das daraus resultierende elektrische Gesamtfeld nach dem Prinzip der ungestörten Überlagerung bestimmt werden. Mathematisch bedeutet dies, daß die **Vektoren der elektrischen Feldstärken**, die von den verschiedenen Ladungen in dem jeweiligen Raumpunkt erzeugt werden, **geometrisch** gemäß dem Parallelogrammsatz addiert werden müssen.

Richtungsregel (zur Erinnerung): Die **Richtung** eines **Feldstärke-Vektors** stimmt stets überein mit der Richtung jener elektrischen Kraft, die das elektrische Feld in dem jeweiligen Raumpunkt auf eine **positive** Ladung ausüben würde.

Sonderfall: Wir beschränken uns bei der Behandlung dieses Themas auf die Überlagerung elektrischer Felder von ruhenden **punktförmigen** Ladungen.

2. **Beispiel**: Überlagerung der elektrischen Felder zweier Punktladungen

Der Abstand zwischen einer positiven Punktladung $\mathbf{Q_1}$ **= 30** nC und einer negativen Punktladung $\mathbf{Q_2}$ **= 70** nC beträgt **a = 50** cm. Zu bestimmen ist

a) der Betrag und die Richtung der elektrischen **Feldstärke** $\vec{E}$ in einem Feldpunkt **P**, der $\mathbf{r_1}$ **= 30** cm von der Ladung $\mathbf{Q_1}$ und $\mathbf{r_2}$ **= 50** cm von der Ladung $\mathbf{Q_2}$ entfernt ist, und

b) Betrag und Richtung der **Kraft** $\vec{F}$ auf eine positive Ladung $\mathbf{Q_3}$ **= 110** nC, die in den Feldpunkt **P** gebracht wird.

Lösung zu Aufgabe **a)**

1. Betrag $\mathbf{E_1}$ jener Feldstärkekomponente, die von der Ladung $\mathbf{Q_1}$ im Punkt **P** verursacht wird:

$$D_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_1}{4\cdot\pi\cdot r_1^2} = \frac{30\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{4\cdot\pi\cdot(0{,}3\,\mathrm{m})^2} \Rightarrow \underline{D_1 = 26{,}5\cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}}$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0} = \frac{26{,}5\cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}}{8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N\,m^2}}} \Rightarrow \underline{E_1 = 2993\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}} \Rightarrow \ell_{E_1} = \frac{E_1}{m_E} = \frac{2993\,\mathrm{N/C}}{1000\,\frac{\mathrm{N/C}}{\mathrm{cm}}} = 2{,}993\,\mathrm{cm}$$

2. Betrag $\mathbf{E_2}$ jener Feldstärkekomponente, die von der Ladung $\mathbf{Q_2}$ im Punkt **P** verursacht wird:

$$D_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{Q_2}{4\cdot\pi\cdot r_2^2} = \frac{70\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{4\cdot\pi\cdot(0{,}5\,\mathrm{m})^2} \Rightarrow \underline{D_2 = 22{,}3\cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}}$$

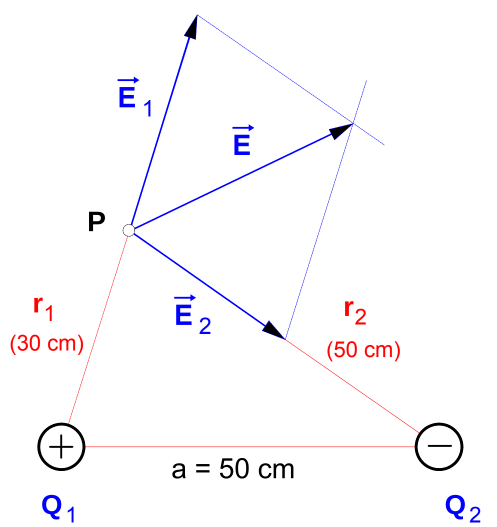
$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0} = \frac{22{,}3\cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}}{8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N\,m^2}}} \Rightarrow \underline{E_2 = 2517\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}} \Rightarrow \ell_{E_2} = \frac{E_2}{m_E} = \frac{2517\,\mathrm{N/C}}{1000\,\frac{\mathrm{N/C}}{\mathrm{cm}}} = 2{,}517\,\mathrm{cm}$$

3. Bestimmung der resultierenden elektrischen Feldstärke im Punkt **P** durch **geometrische** Addition der Vektoren $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ (siehe dazu die Abb. rechts)

Länge des resultierenden Vektors: $\ell_E = 3{,}28\,\mathrm{cm}$

$$E = \ell_E\cdot m_E = 3{,}28\,\mathrm{cm}\cdot 1000\,\frac{\mathrm{N/C}}{\mathrm{cm}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E = 3280\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}}}$$



Lösung zu Aufgabe **b)** :

$$F = E\cdot Q_3 = 3280\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\cdot 110\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C} \Rightarrow \underline{\underline{F = 0{,}361\,\mathrm{mN}}}$$

Die Kraft $\vec{F}$ hat die gleiche **Richtung** wie $\vec{E}$.

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-6F.DOC - 28.09.08
Arbeitsblatt Nr. **6 f)** : **Übungsaufgaben** zur **Überlagerung elektrischer Felder**	

1. Gegeben sind zwei ortsfeste positive Punktladungen $\mathbf{Q_1}$ = **8,52** nC und $\mathbf{Q_2}$ = **5,44** nC, die im Abstand **d** = **15,5** cm voneinander entfernt angeordnet sind.

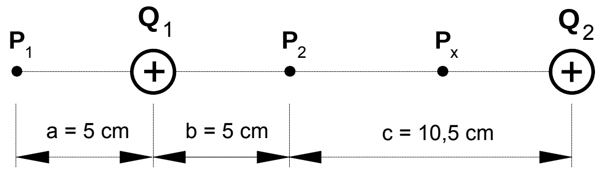


Bild 1

a) Berechnen Sie die elektrischen Feldstärken in den Punkten $\mathbf{P_1}$ und $\mathbf{P_2}$. [31 794 N/C, 180°; 26 195 N/C, 0°]

b) Auf der Verbindungsgeraden zwischen den Ladungen befindet sich ein Punkt $\mathbf{P_x}$, in dem die **elektrische Feldstärke Null** ist. Wie weit ist dieser feldfreie Raumpunkt $\mathbf{P_x}$ von der Ladung $\mathbf{Q_1}$ entfernt ? [r_x = 0,0862 m]

---

2. Der Abstand zwischen zwei positiven Punktladungen $\mathbf{Q_1}$ = **30** nC und $\mathbf{Q_2}$ = **70** nC beträgt **a** = **50** cm. Zu bestimmen sind

a) der Betrag und die Richtung der elektrischen **Feldstärke** $\vec{\mathbf{E}}$ in einem Feldpunkt **P**, der $\mathbf{r_1}$ = **30** cm von der Ladung $\mathbf{Q_1}$ und $\mathbf{r_2}$ = **50** cm von der Ladung $\mathbf{Q_2}$ entfernt ist, [4453 N/C; 105,2°]

b) Betrag und Richtung der **Kraft** $\vec{\mathbf{F}}$ auf eine positive Ladung $\mathbf{Q_P}$ = **11** nC, die in den Feldpunkt **P** gebracht wird [0,049 mN].

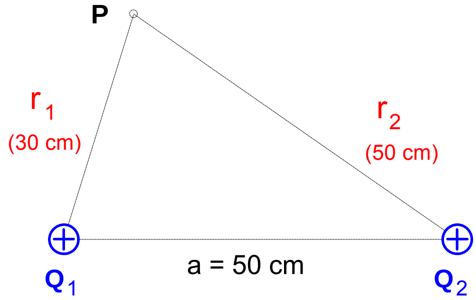


Bild 2

---

3. Der Abstand zwischen zwei positiven Punktladungen $\mathbf{Q_1}$ = **30** nC und $\mathbf{Q_2}$ = **70** nC beträgt **a** = **50** cm. Eine dritte Ladung $\mathbf{Q_3}$ = 20 nC befindet sich genau in der Mitte der Verbindungsgeraden zwischen $\mathbf{Q_1}$ und $\mathbf{Q_2}$. Zu bestimmen sind

a) der Betrag und die Richtung der elektrischen **Feldstärke** $\vec{\mathbf{E}}$ in einem Feldpunkt **P**, der $\mathbf{r_1}$ = **30** cm von der Ladung $\mathbf{Q_1}$ und $\mathbf{r_2}$ = **50** cm von der Ladung $\mathbf{Q_2}$ entfernt ist, [2860 N/C; 97°]

b) Betrag und Richtung der **Kraft** $\vec{\mathbf{F}}$ auf eine positive Ladung $\mathbf{Q_P}$ = **11** nC, die in den Feldpunkt **P** gebracht wird [0,031 mN].

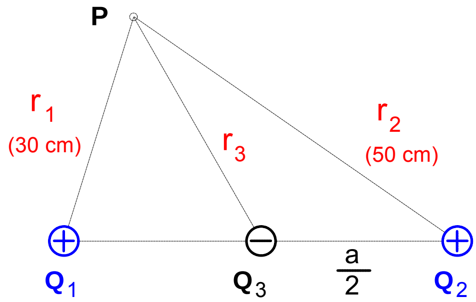


Bild 3

---

4. Drei Punktladungen $\mathbf{Q_1}$ = **20** nC, $\mathbf{Q_2}$ = **40** nC und $\mathbf{Q_3}$ = **60** nC sind gemäß nebenstehender Abbildung so angeordnet, daß sie die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge **a** = **3** cm bilden.

Wie groß ist die elektrische **Feldstärke E** im Raumpunkt **P**?
[E = 1,202 · 10^6 N/C , 103,6°]

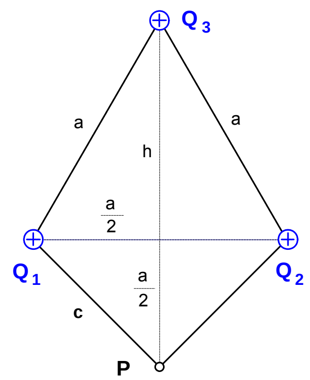


Bild 4

---

5. Auf einer Metall-Hohlkugel (Radius **R** = **4** cm) befindet sich eine positive Ladung $\mathbf{Q_1}$ = **5** nC (siehe **Bild 5**).

a) Stellen Sie den **Verlauf** der elektrischen **Feldstärke E** in der Umgebung der Kugel **in Abhängigkeit** vom **Abstand r** vom Kugelmittelpunkt zwischen **r** = **R** und **r** = **8** cm in einem maßstäblichen **E-r**-Diagramm dar.

b) Mit welcher **Kraft F** wird eine negative punktförmige Probeladung $\mathbf{Q_2}$ = **0,3** pC angezogen, die in einem Abstand von **2** cm von der Kugeloberfläche aufgehängt ist?
Bestimmen Sie die Kraft nach zwei unterschiedlichen Berechnungsverfahren!
[F = 3,75 · 10^{-9} N]

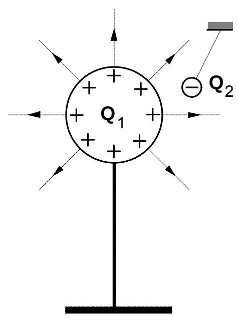


Bild 5

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name:	ET1-7-F.DOC - 17.09.02
Arbeitsblatt Nr. **7** :	Zwischenbetrachtung zu den Begriffen **Arbeit** und **Energie**	

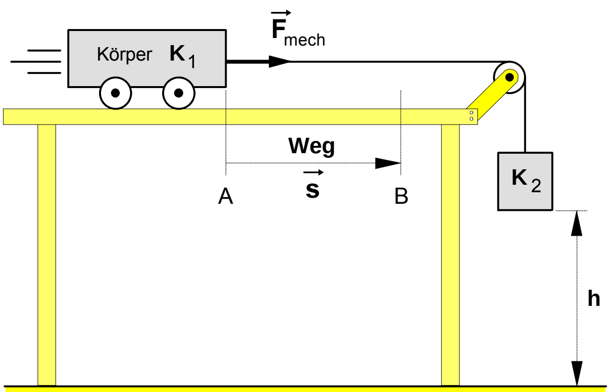
· Einige kurze **Hinweise** zu den Begriffen **Arbeit** und **Energie**

Allgemein gilt für die an einem Körper verrichtete **physikalische Arbeit**:

$$\boxed{W = F \cdot s}$$

in Worten: **Arbeit = Kraft · Weg**

1. **Mechanische Kraft F_{mech}** auf einen bewegten Körper **K1** mit der Masse **m**



· An dem Körper **K1** wird von dem Körper **K2** eine **mechanische Arbeit W_{mech}** verrichtet:

$$\boxed{W_{mech} = F_{mech} \cdot s}$$

Maßeinheit: $[W] = [F] \cdot [s] = 1\ N \cdot 1\ m = 1\ Nm$

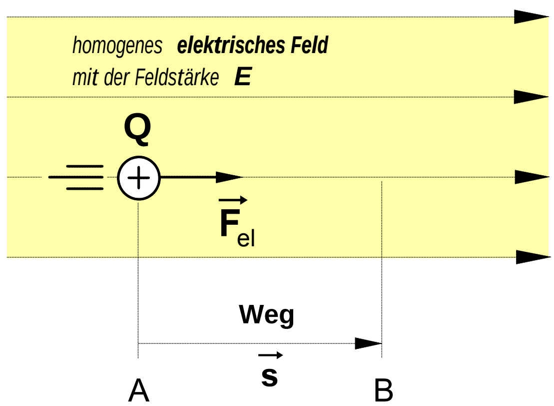
· Der auf die Höhe **h** angehobene Körper **K2** hat das Vermögen an dem Körper **K1** eine **mechanische Arbeit** zu verrichten. Dieses **Arbeitsvermögen** heißt **Energie**, genauer:

potentielle m e c h a n i s c h e Energie

· Diese potentielle mechanische Energie des Körpers **K2** wird während des Bewegungsvorganges der Körper in

B e w e g u n g s e n e r g i e umgeformt.

2. **Elektrische Kraft F_{el}** auf einen bewegten Körper mit der **Ladung Q**



· An der Ladung **Q** wird von dem **elektrischen Feld** eine **elektrische Arbeit W_{el}** verrichtet:

$$W_{el} = F_{el} \cdot s \quad \text{mit} \quad F_{el} = E \cdot Q$$

$$\boxed{W_{el} = E \cdot Q \cdot s} \quad [W] = 1\frac{N}{C} \cdot 1\ C \cdot 1\ m = 1\ Nm$$

· Das elektrische Feld hat das Vermögen an der Ladung **Q** eine **elektrische Arbeit** zu verrichten. Das **elektrische Feld** besitzt demnach ebenfalls **Energie**, genauer:

potentielle e l e k t r i s c h e Energie

· Diese potentielle elektrische Energie des elektrischen Feldes wird während des Bewegungsvorganges der Ladung **Q** in

B e w e g u n g s e n e r g i e umgeformt.

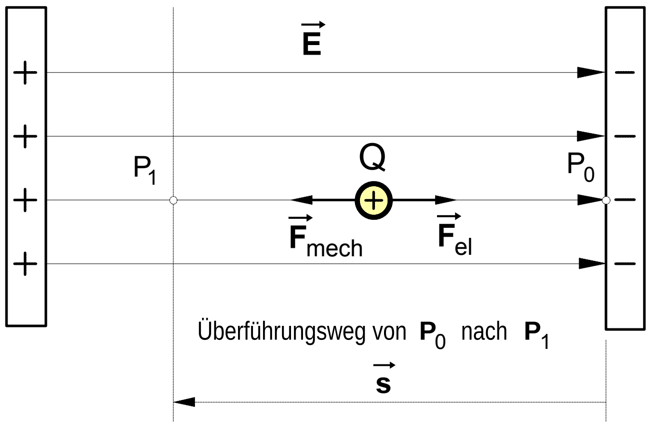
· **Satz** von der **Erhaltung** der **Energie** (kurz auch: **Energieerhaltungssatz**)

In einem abgeschlossenen System bleibt bei allen Vorgängen die **Gesamtheit der** **E n e r g i e** stets **e r h a l t e n** . Daher kann Energie **weder** verlorengehen **noch** "aus dem Nichts" erzeugt werden. Sie kann von einer Energie**form** (z.B. mechanische Energie) in eine andere Energie**form** (z.B. elektrische Energie) **umgewandelt** werden. Demnach läßt sich Energie nur durch **U m f o r m u n g** aus einer bereits vorhandenen Energie gewinnen. Ein ***Perpetuum mobile*** ist **u n m ö g l i c h** .

Ein ***Perpetuum mobile*** („das von selbst dauernd Bewegte“) ist eine sich selbst bewegende Maschine, die fortwährend ihren eigenen Energiebedarf selbst deckt oder sogar mehr Energie abgibt als ihr zugeführt wird.

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-7A1F.DOC - 17.09.02	
Arbeitsblatt Nr. **7 a)** : **Elektrisches Potential** j und **elektrische Spannung U**		Seite **1**

· **Überführungsarbeit** an einer **positiven Punktladung Q** im *homogenen* elektrischen Feld



1. Auf die positive Ladung **Q** in dem elektrischen Feld wirkt die elektrische Feldkraft $\mathbf{F}_{el}$:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}$$

2. Soll die Ladung **Q gleichförmig** gegen die Feldrichtung längs der Feldlinie von $\mathbf{P}_0$ nach $\mathbf{P}_1$ verschoben werden, dann muß gegen die elektrische Feldkraft $\vec{F}_{el}$ eine gleich große äußere mechanische Gegenkraft $\vec{F}_{mech}$ wirken, d.h. für die Beträge:

$$\mathbf{F}_{mech} = \mathbf{F}_{el}$$

3. Bei der Überführung von $\mathbf{P}_0$ nach $\mathbf{P}_1$ wird dann an der Ladung **Q** entlang des Weges **s** folgende **mechanische Arbeit** verrichtet:

$$\mathbf{W}_{mech} = \mathbf{F}_{mech} \cdot \mathbf{s} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{F}_{mech} = \mathbf{F}_{el}$$

$$\mathbf{W}_{mech} = \mathbf{F}_{el} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{W}$$

4. Die dem elektrischen Feld zugeführte Arbeit $\mathbf{W}_{mech}$ steht in dem Punkt $\mathbf{P}_1$ als **elektrische Feldenergie W** (Þ Arbeitsvermögen gegenüber der Ladung Q) zur Verfügung, d.h.:

$$\mathbf{W} = \mathbf{F}_{el} \cdot \mathbf{s} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{F}_{el} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{s} \qquad \text{Þ} \qquad \frac{\mathbf{W}}{\mathbf{Q}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{s}$$

5. Der Quotient **W : Q** (Arbeitsvermögen pro Ladung) wird allein durch die Merkmale **E** und **s** des elektrischen Feldes bestimmt. Wir können diesen Quotienten daher als weitere Größe zur Beschreibung eines elektrischen Feldes einführen und nennen diese ***skalare*** (d.h.: ungerichtete) Feldgröße[1)]

► **"elektrisches Potential"** j (Phi) :

$$\boxed{\varphi = \frac{W}{Q}}$$

W ... Arbeitsvermögen (Energie) in Nm
Q ... Ladung in C
j ... elektrisches Potential in V ("Volt")

• Maßeinheit:

$$[\varphi] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{1\,\text{Nm}}{1\,\text{C}} = 1\,\text{V}$$

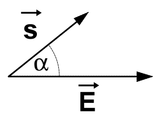
Das **elektrische Potential** j ist bestimmt durch die **Fähigkeit** des elektrischen Feldes, **an einer Ladung Q eine Arbeit verrichten zu können**. Diese Fähigkeit ist abhängig von dem **Überführungsweg s** und von der elektrischen **Feldstärke E** entlang der Feldlinie. Im *homogenen* Feld gilt demnach:

$$\boxed{\varphi = E \cdot s}$$

E ... elektrische Feldstärke in N/C
s ... Überführungsweg in m
j ... elektrisches Potential in V ("Volt")

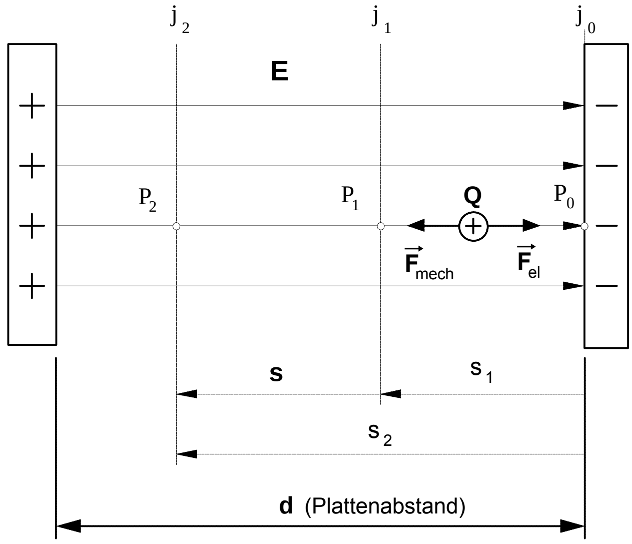
Unter Berücksichtigung des Vektorcharakters der Feldstärke $\vec{E}$ und des Überführungsweges $\vec{s}$ ergibt sich das **Skalarprodukt** (wobei a der Winkel zwischen dem $\vec{E}$-Vektor und dem $\vec{s}$-Vektor ist):

$$\boxed{\varphi = -\vec{E} \cdot \vec{s}} \qquad \text{mit den **Beträgen** :} \qquad \boxed{\varphi = -E \cdot s \cdot \cos\alpha}$$



1) Während die elektrische Feldstärke E eine **gerichtete** Feldgröße, also eine **Vektor**größe ist, die sowohl durch ihren **Betrag** als auch ihre **Richtung** bestimmt ist, ist das elektrische Potential j eine **ungerichtete** Feldgröße, d.h. eine **skalare** Größe, die nur durch ihren **Betrag** bestimmt ist.

Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten im elektrischen Feld eines Plattenkondensators



- Wir gehen bei den folgenden Überlegungen wiederum von dem **homogenen** Feld eines Plattenkondensators aus. In jedem Raumpunkt eines solchen homogenen Feldes herrscht bekanntlich die **gleiche** elektrische **Feldstärke E**.

- Als **Bezugspunkt** für unsere Überlegungen wählen wir einen **Punkt P_0** auf der negativ geladenen Platte.

- Um eine positive Ladung **Q** in dem elektrischen Feld mit der Feldstärke **E von P_0 nach P_1** zu überführen, ist die Arbeit $\mathbf{W_1 = E \cdot Q \cdot s_1}$ zu verrichten, um sie von **P_0 nach P_2** zu überführen die Arbeit $\mathbf{W_2 = E \cdot Q \cdot s_2}$.

- Durch die jeweils zu verrichtende Überführungsarbeit $\mathbf{W_1}$ bzw. $\mathbf{W_2}$ wird das **elektrische Potential**, also die auf eine Ladung **Q** bezogene Arbeitsfähigkeit des elektrischen Feldes, in dem jeweiligen Raumpunkt bestimmt. Dementsprechend gilt

  ►für das **Potential** φ_1 im Punkt P_1 : $\varphi_1 = \dfrac{W_1}{Q} = E \cdot s_1$ und

  ►für das **Potential** φ_2 im Punkt P_2 : $\varphi_2 = \dfrac{W_2}{Q} = E \cdot s_2$

- Zwischen den Punkten P_1 und P_2 des elektrischen Feldes besteht ein Potentialunterschied, denn $\mathbf{W_2}$ ist größer als $\mathbf{W_1}$ bzw. $\mathbf{s_2}$ größer als $\mathbf{s_1}$. Diesen Unterschied hinsichtlich der Fähigkeit des Feldes, in dem jeweiligen Feldpunkt an einer Ladung Q eine bestimmte Arbeit verrichten zu können, bestimmen wir als Potential**differenz** $\Delta\varphi$.

  ►**Potentialdifferenz** $\Delta\varphi$ = $\varphi_2 - \varphi_1 = E \cdot s_2 - E \cdot s_1$

  $$\Delta\varphi = E \cdot (s_2 - s_1) \quad \text{mit} \quad (s_2 - s_1) = s$$

  $$\Delta\varphi = E \cdot s$$

  ►Eine solche **Potentialdifferenz** $\Delta\varphi$ zwischen zwei Raumpunkten eines elektrischen Feldes bezeichnet man auch als **elektrische S p a n n u n g U** .

  Mit **U** = $\Delta\varphi$ ergibt sich für die **elektrische Spannung U** zwischen den Feldpunkten P_1 und P_2 eines *homogenen* elektrischen Feldes die folgende Formel:

$$\boxed{U = E \cdot s}$$

E ... elektrische Feldstärke in N/C
s ... Überführungsweg in m
U ... elektrische Spannung in V

Gemäß der Potential-Definition $E \cdot s = \dfrac{W}{Q}$ gilt dann für die Spannung **U** auch:

$$\boxed{U = \frac{W}{Q}}$$

►**Maßeinheit** der elektrischen Spannung U:

$$[U] = [E] \cdot [s] = 1\,\frac{N}{C} \cdot 1\,m = 1\,\frac{N \cdot m}{C} = 1\,V \quad (\text{"Volt"})$$

►Demnach gilt für die Potentialdifferenz und damit für die elektrische **Spannung U** ***zwischen den beiden Kondensatorplatten*** (mit **s = d** ⇒ Plattenabstand) :

$$\boxed{U = E \cdot d}$$

• **"Expander"– Modell** zum Begriff der **elektrischen Spannung**

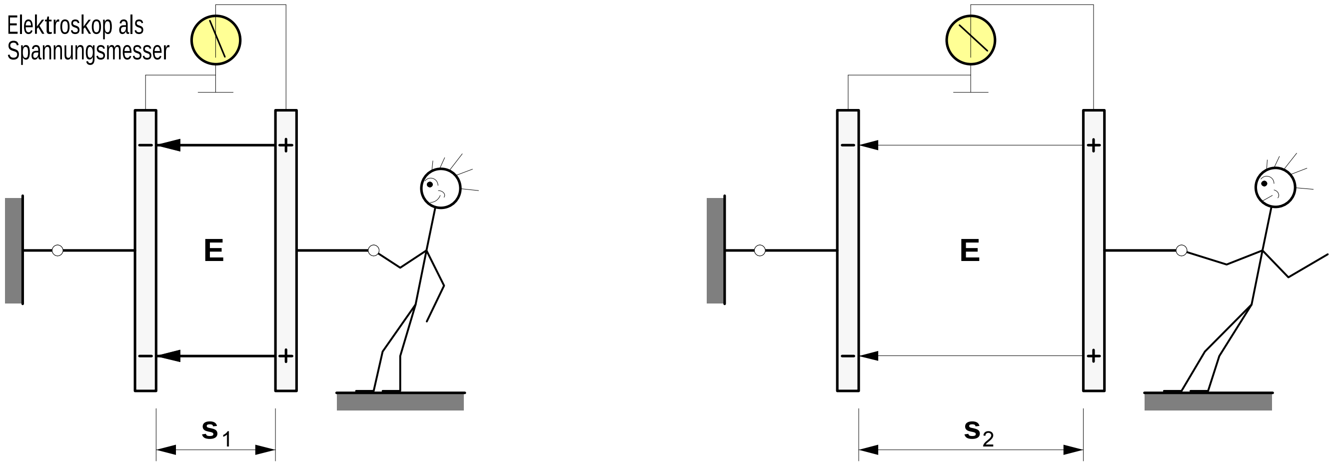
Nach unseren bisherigen Überlegungen hatten wir die elektrische Spannung **U** als Potentialdifferenz und damit als eine von dem Produkt aus elektrischer Feldstärke **E** und Überführungsweg **s** einer Ladung abhängige skalare elektrische Feldgröße definiert. Daraus ergab sich die Formel:

$$\boxed{U = E \cdot s}$$

E ... elektrische Feldstärke in N/C
s ... Überführungsweg in m
U ... Spannung in V

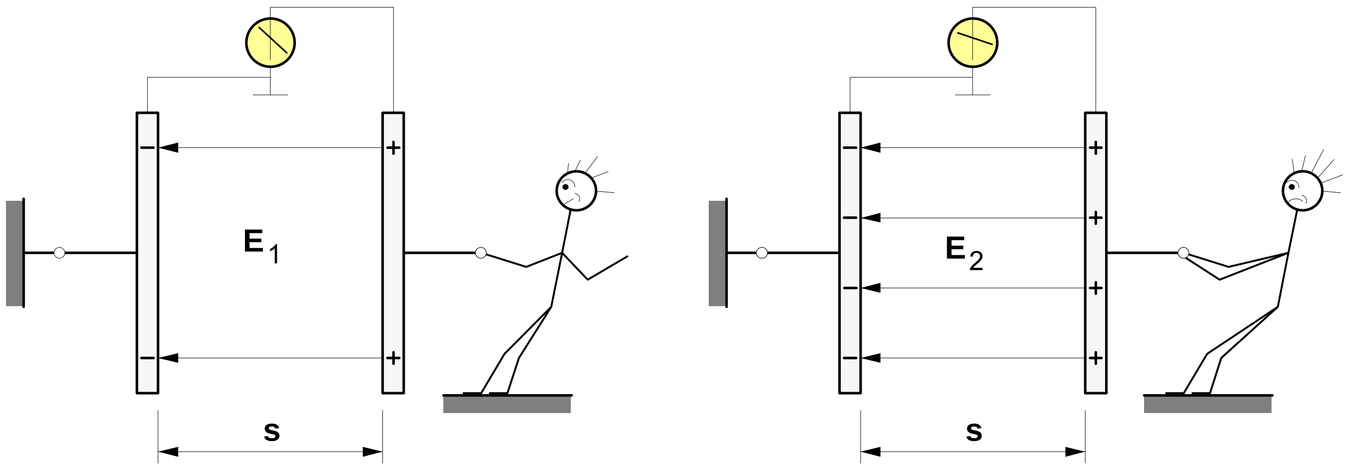
Um nun eine anschauliche Vorstellung von dem Begriff der elektrischen **Spannung** zu gewinnen, wollen wir das **homogene** Feld eines Plattenkondensators als "Expander"-Modell betrachten. Gemäß dem Feldlinienmodell interpretieren wir dabei den Überführungsweg **s** als Feldlinien*länge* (= Plattenabstand) und die elektrische Feldstärke **E** als Feldlinien*dichte*.

1. Veränderung der elektrischen **Spannung U** bei *konstanter* **Feldstärke E**



Durch das Auseinanderziehen der Platten werden die "gedachten elastischen Fäden" (⇒ elektrische Feldlinien) **länger** und damit stärker **"gespannt"**. M.a.W: Bei konstanter elektrischer Feldstärke **E** steigt die elektrische **Spannung U** zwischen den Platten, wenn der Plattenabstand und damit die **Feldlinienlänge s** vergrößert wird.

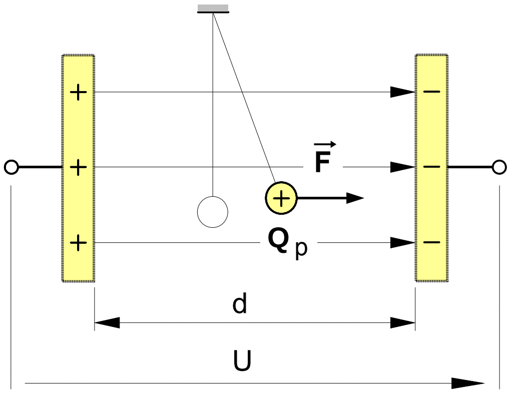
2. Veränderung der **elektrischen Spannung U** bei *konstantem* **Plattenabstand s**



Bei konstanter Feldlinienlänge **s** läßt sich eine Vergrößerung der elektrischen **Spannung U** zwischen den ungleichartig geladenen Kondensatorplatten dadurch erreichen, daß man gleichsam die Anzahl der zwischen die Platten gespannten "elastischen Fäden" (⇒ elektrische Feldlinien) und damit die **Dichte** der Feldlinien erhöht, indem man z.B. mit Hilfe eines Bandgenerators die Ladung auf den Platten erhöht. M.a.W.: Bei konstanter Feldlinienlänge **s** steigt die elektrische **Spannung U**, wenn die elektrische **Feldstärke E** vergrößert wird.

· **Übungsaufgaben** zum Begriff der **elektrischen Spannung**

1. Die punktförmige Probeladung $\mathbf{Q_p} = \mathbf{0{,}5} \cdot 10^{-6}$ C wird in dem elektrischen Feld des nebenstehenden Plattenkondensators (**d** = **5** cm) mit einer Kraft von **8** mN abgelenkt.

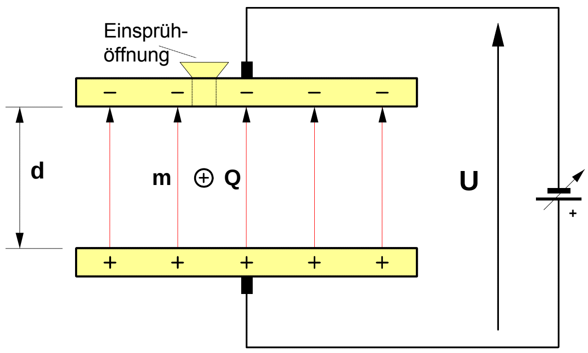


a) Wie groß ist die **Spannung U** zwischen den Kondensatorplatten? [U = 800 V]

b) Auf welchen Wert **U' ändert** sich die **Spannung**, wenn die Platten auf einen Abstand **d'** = **6** cm auseinandergezogen werden? [U' = 960 V]

---

2. In dem elektrischen Feld des nebenstehenden Millikan-Kondensators (**d** = **20** mm) befindet sich ein Öltröpfchen mit der Masse **m** = **2** mg und einer positiven Ladung von **3,2** · 10^{-10} C. (Erdbeschleunigung: **g** = **9,81** m/s² – Der Versuch wurde 1909 erstmals von R.A. Millikan in den USA durchgeführt.)



Auf welchen Wert muß die **Spannung U** zwischen den Platten eingestellt werden, damit das Öltröpfchen in dem elektrischen Feld **schwebt**? [U = 1226,3 V]

---

3. Um eine negative Punktladung von **4,8 µC** in einem homogenen elektrischen Feld entlang einer Feldlinie von einem Punkt P_1 nach einem Punkt P_2 gleichförmig zu verschieben, muß in Feldrichtung eine Kraft von **20** mN aufgebracht werden. Der Abstand zwischen den Punkten beträgt **12** mm.

Wie groß ist die **Spannung** zwischen den beiden Punkten? [U = 50 V]

---

4. Ein **Elektron** mit der negativen Elementarladung **e** = **1,6** · 10^{-19} C und der Masse **9,11** · 10^{-31} kg wird in dem elektrischen Feld eines Plattenkondensators (horizontaler Plattenabstand **d** = **6** cm) beschleunigt.

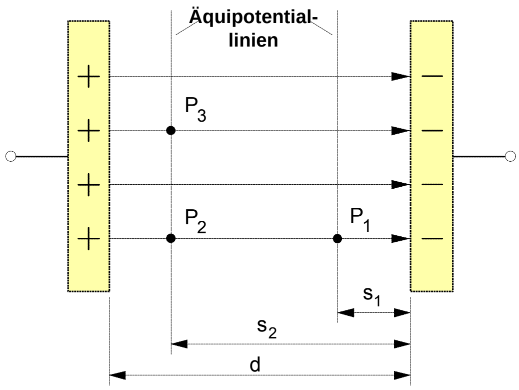
a) Welche elektrische **Kraft** wirkt auf das Elektron, wenn die Spannung zwischen den Platten **120** V beträgt?

b) Welche horizontale **Beschleunigung a** erfährt das Elektron? [a = 3,5 · 10^{14} m/s²]

c) Um welchen Betrag **ändert** sich dadurch dessen horizontale **Geschwindigkeit** innerhalb von **15** Nanosekunden? [Δv = 5265 km/s]

---

5. Zwischen den Platten eines Plattenkondensators mit **d** = **0,5** cm wird eine Spannung von **U** = **500** V gemessen.



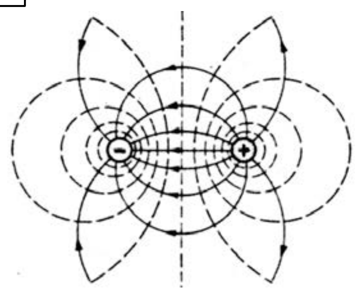
a) Berechnen Sie die **Spannung** $\mathbf{U_{21}}$ zwischen den Feldpunkten $\mathbf{P_2}$ und $\mathbf{P_1}$. Die Abstände dieser Punkte von der negativen Platte betragen $\mathbf{s_1}$ = **1,5** mm bzw. $\mathbf{s_2}$ = **2,7** mm. [U = 120 V]

b) Wie groß ist die **Spannung** $\mathbf{U_{31}}$ zwischen den Punkten $\mathbf{P_3}$ und $\mathbf{P_1}$ sowie $\mathbf{U_{32}}$ zwischen den Punkten $\mathbf{P_3}$ und $\mathbf{P_2}$?

• **Veranschaulichung** von **Potentialfeldern:** **Feldlinien** und **Äquipotentiallinien** verschiedener Elektrodenanordnungen

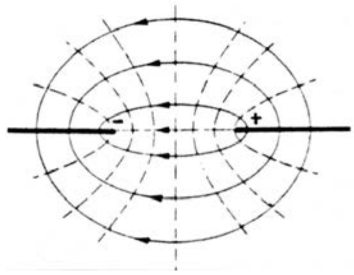
Die **Feldlinien** (durchgezogene Vollinien) treten aus elektrischen Leitern senkrecht aus und treten in Leiter senkrecht ein. Die **Äquipotentiallinien** (Linien gleichen Potentials; gestrichelte Linien) stehen stets *senkrecht* auf den Feldlinien. Für die Überführung von Ladungen längs einer Äquipotentiallinie ist *keine Arbeit* erforderlich. Denn das Skalarprodukt $\mathbf{W = Q \cdot \vec{E} \cdot \vec{s}}$ ist in jedem Punkt entlang einer Äquipotentiallinie gleich Null, da $\mathbf{W = Q \cdot E \cdot s \cdot \cos 90° = 0}$.

1.



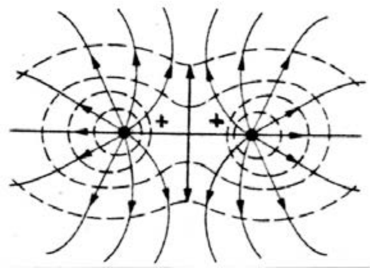
Zwei ungleichnamig geladene Kugelkörper oder Parallelleiter

2.



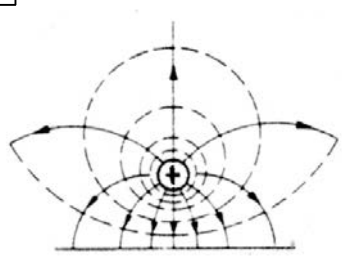
Zwei ungleichnamig geladene gegenüberliegende Kanten

3.



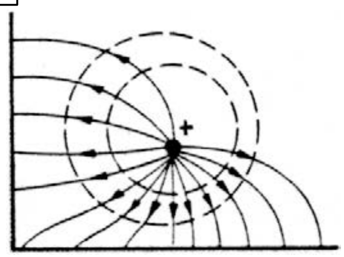
Zwei gleichnamig geladene Kugelkörper oder Parallelleiter

4.



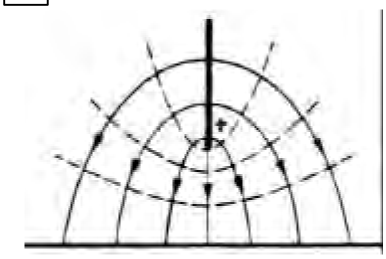
Positiv geladene Kugel gegenüber einer Ebene niedrigeren Potentials

5.



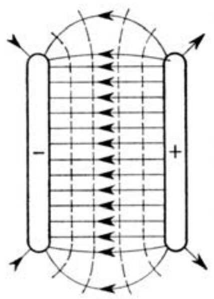
Positiv geladene Kugel gegenüber zwei Ebenen niedrigeren Potentials

6.



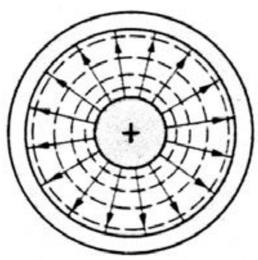
Positiv geladene Kante gegenüber einer Ebene niedrigeren Potentials

7.



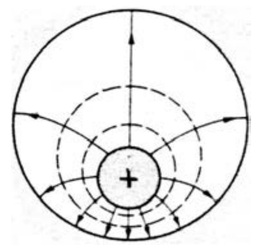
Ungleichnamig geladene Kondensatorplatten mit Randfeld

8.



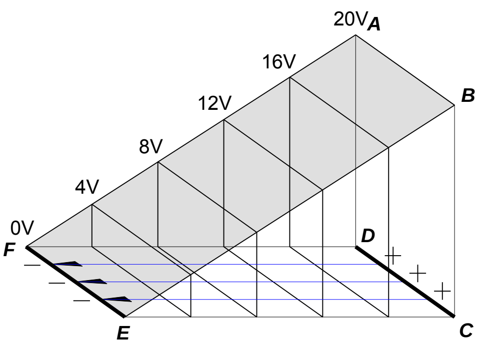
Koaxialleitung oder Zylinderkondensator

9.



Positiv geladener Erdkabelleiter im Metallschutzrohr

• **Potentialgebirge** des homogenen Feldes eines Plattenkondensators



Die Abb. links zeigt die räumliche Darstellung eines ebenen Feldes durch ein Potentialgebirge. Ein solches Gebirge entsteht, wenn über jedem Punkt eines ebenen Feldes der zugehörige Wert des Potentials φ als Höhe abgetragen wird. Einer Äquipotentiallinie, die die Punkte mit gleichen Potentialwerten verbindet, entspricht dann eine Höhenlinie des Potentialgebirges. Soll in einem elektrischen Feld ein positiv geladenes Teilchen gegen die Feldrichtung verschoben werden, so ist hierzu Überführungsarbeit notwendig, um das Teilchen vom "niedrigeren" Potential auf "höheres" Potential zu "heben"; das Teilchen muß den "Potentialberg hinauflaufen". Andererseits wird ein frei bewegliches positiv geladenes Teilchen vom elektrischen Feld in Feldrichtung beschleunigt; es "läuft den Potentialberg hinunter" und gelangt von Punkten "höheren" zu solchen "niedrigeren" Potentials.

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name:	ET1-7B-F.DOC - 22.09.02
Arbeitsblatt Nr. **7 b)** : Berechnung von **Arbeit** und **Potential** im homogenen elektrischen Feld		

Vorbemerkung

Gemäß der in Arbeitsblatt Nr. **7 a)** entwickelten Bestimmungen für das **elektrische Potential** φ in einem beliebigen Punkt $\mathbf{P_k}$ eines *homogenen* elektrischen Feldes gegenüber einem frei wählbaren Bezugspunkt $\mathbf{P_0}$ gilt

a) *einerseits* unter Berücksichtigung des **Vektor**charakters von $\vec{E}$ und $\Delta\vec{s}$:

$$\boxed{\varphi = -\vec{E}\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta\vec{s}_i}$$

bzw. mit den **Beträgen** für $\vec{E}$ und $\Delta\vec{s}_i$:

$$\boxed{\varphi = -E\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\cdot\cos\left(\vec{E};\Delta\vec{s}_i\right)}$$

b) *andererseits* im Hinblick auf die **Arbeitsfähigkeit** des elektrischen Feldes in dem jeweiligen Punkt $\mathbf{P_k}$:

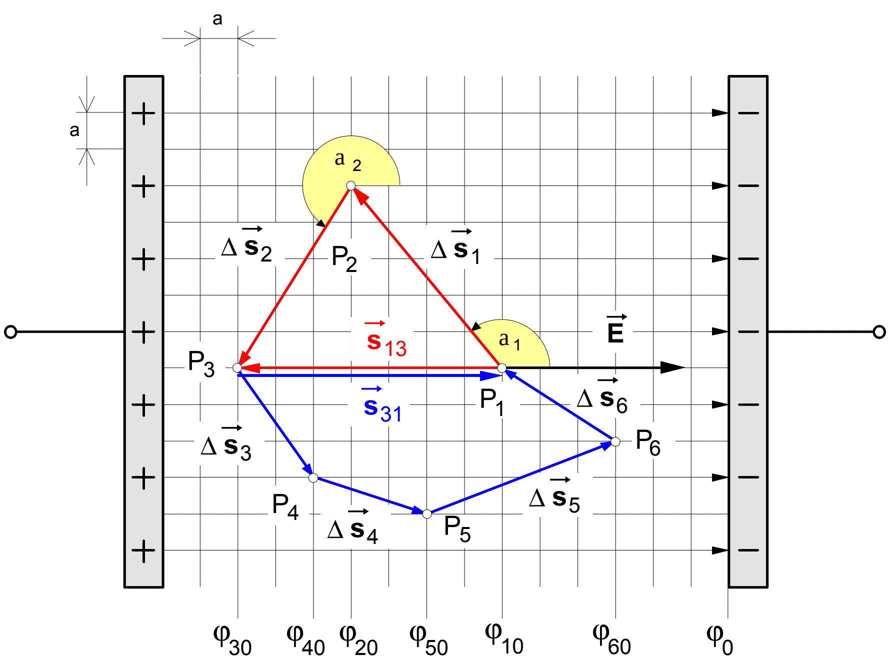
$$\boxed{\varphi = \frac{W_{P_0P_k}}{Q}}$$

wobei $\mathbf{W_{P_0P_k}}$ die physikalische Arbeit darstellt, die verrichtet werden muß, um die positive Ladung **Q** von Punkt $\mathbf{P_0}$ nach Punkt $\mathbf{P_k}$ zu überführen.

Beispiel

Von dem nebenstehenden Plattenkondensator sind folgende Daten bekannt :

- Spannung zwischen den Platten:
  U = 15 kV
- Plattenabstand :
  d = 7,5 mm
- Plattenfläche :
  A = $7\cdot10^{-4}$ m²
- Dielektrikum :
  Luft mit $\varepsilon_r = 1$
- Rastermaß :
  a = 0,5 mm



1. Berechnen Sie die elektrischen Potentiale φ_{10} bis φ_{60} gegenüber dem Bezugspotential φ_0 = 0 V.
2. Wie groß ist die Spannung $\mathbf{U_{26}}$ zwischen den Feldpunkten $\mathbf{P_2}$ und $\mathbf{P_6}$ **?**
3. Welche Ladung **Q** ist auf den Kondensatorplatten gespeichert **?**
4. Welche physikalische Arbeit **W** muß verrichtet werden, um eine positive Probeladung $\mathbf{Q_p}$ = **2** µC zu überführen und zwar
   a) von Punkt $\mathbf{P_1}$ nach Punkt $\mathbf{P_3}$,
   b) von Punkt $\mathbf{P_1}$ über Punkt $\mathbf{P_2}$ nach Punkt $\mathbf{P_3}$,
   c) von Punkt $\mathbf{P_3}$ nach Punkt $\mathbf{P_1}$,
   d) von Punkt $\mathbf{P_3}$ über $\mathbf{P_4}$, $\mathbf{P_5}$, $\mathbf{P_5}$ und $\mathbf{P_6}$ nach Punkt $\mathbf{P_1}$ und
   e) von Punkt $\mathbf{P_1}$ über $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_4}$, $\mathbf{P_5}$ und $\mathbf{P_6}$ zurück nach Punkt $\mathbf{P_1}$ **?**

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name:	ET1-7C.DOC - 22.09.02
Arbeitsblatt Nr. **7 c)** : **Potential** im **radialsymmetrischen Feld** einer **Punktladung**		

Im folgenden soll das elektrische Potential im Abstand **r** von einer positiven Punktladung **Q** berechnet werden. Als Bezugspunkt mit dem Potential φ_A **= 0** wählen wir zunächst den Punkt **A** im Abstand r_A von der Punktladung **Q** (Bild 2). Für das Potential im Punkt **B** gilt dann gemäß Arbeitsblatt Nr. **7** :

$$\boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{n} E_i \cdot \Delta s_i}$$

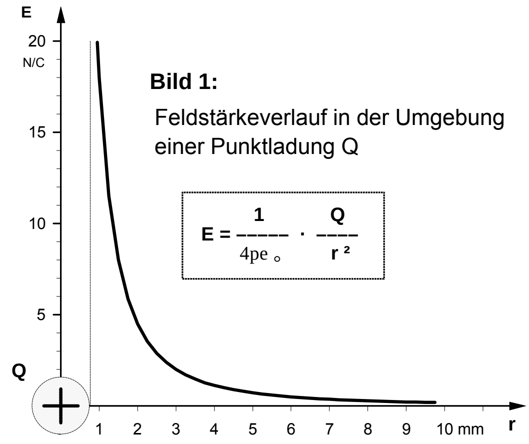


Bild 1:
Feldstärkeverlauf in der Umgebung einer Punktladung Q

Im Punkt **A** am *Anfang* des *ersten* Wegintervalls

$$\Delta s_1 = r_1 - r_2 = r_A - r_2$$

hat die **Feldstärke** gemäß **Bild 1** den Betrag

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r_A^2} \quad \text{und}$$

im Punkt $\mathbf{P_2}$ am *Ende* des Wegeintervalls Δs_1 den Betrag

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r_2^2} \ .$$

Wählt man das Wegintervall Δs_1 hinreichend klein, so ist $r_A \approx r_2$. Von daher kann angenommen werden, daß sich der *Mittelwert* der *Feldstärke* auf diesem Wegabschnitt Δs_1 wie folgt berechnen läßt :

$$\overset{3/4}{\mathbf{E}}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r_A \cdot r_2}$$

Entsprechend gilt für den *zweiten* Wegabschnitt Δs_2

$$\overset{3/4}{\mathbf{E}}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r_2 \cdot r_3} \quad \text{usw.}$$

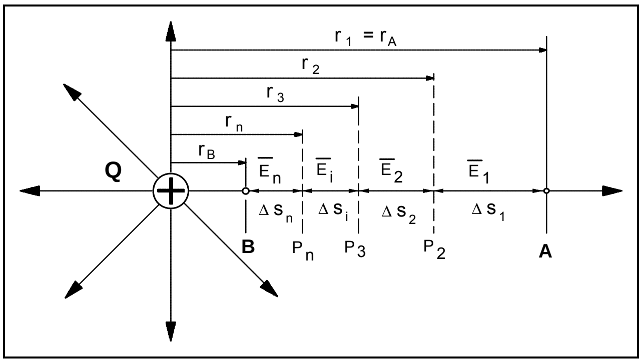


Bild 2 : Potentialpunkte im Feld einer Punktladung

Für den *letzten* Wegabschnitt

$\Delta s_n = r_n - r_B$ ergibt sich demnach für die *mittlere Feldstärke* : $\overset{3/4}{\mathbf{E}}_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r_n \cdot r_B}$.

Das **Potential** j im Punkt **B** läßt sich unter dieser Voraussetzung wie folgt berechnen:

$$j = \sum_{i=1}^{n} \overset{3/4}{\mathbf{E}}_i \cdot \Delta s_i = \overset{3/4}{\mathbf{E}}_1 \cdot \Delta s_1 + \overset{3/4}{\mathbf{E}}_2 \cdot \Delta s_2 + \overset{3/4}{\mathbf{E}}_3 \cdot \Delta s_3 + \overset{3/4}{\mathbf{E}}_4 \cdot \Delta s_4 + \ldots + \overset{3/4}{\mathbf{E}}_n \cdot \Delta s_n \ .$$

Setzt man für die Feldstärkemittelwerte die obigen Ausdrücke und für $\Delta s_1 = r_A - r_2$, $\Delta s_2 = r_2 - r_3$, $\Delta s_3 = r_3 - r_4$ ... $\Delta s_n = r_n - r_B$ ein , so ergibt sich :

$$j = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left[\frac{r_A - r_2}{r_A \cdot r_2} + \frac{r_2 - r_3}{r_2 \cdot r_3} + \frac{r_3 - r_4}{r_3 \cdot r_4} + \ldots + \frac{r_n - r_B}{r_n \cdot r_B} \right]$$

$$j = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left[\left(\frac{r_A}{r_A \cdot r_2} - \frac{r_2}{r_A \cdot r_2} \right) + \left(\frac{r_2}{r_2 \cdot r_3} - \frac{r_3}{r_2 \cdot r_3} \right) + \left(\frac{r_3}{r_3 \cdot r_4} - \frac{r_4}{r_3 \cdot r_4} \right) + \ldots + \left(\frac{r_n}{r_n \cdot r_B} - \frac{r_B}{r_n \cdot r_B} \right) \right]$$

Da $\mathbf{r_n} \gg \mathbf{r_4}$ ergibt sich für das Potential im Punkt **B** gegenüber $\varphi_A = 0$:

$$\boxed{\varphi = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]}$$

Verlegt man den Bezugspunkt **A** ins **Unendliche**, dann geht r_A gegen Unendlich und der Bruch $1/R_A$ gegen Null, und für das Potential im Punkt B gilt : $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_B}$.

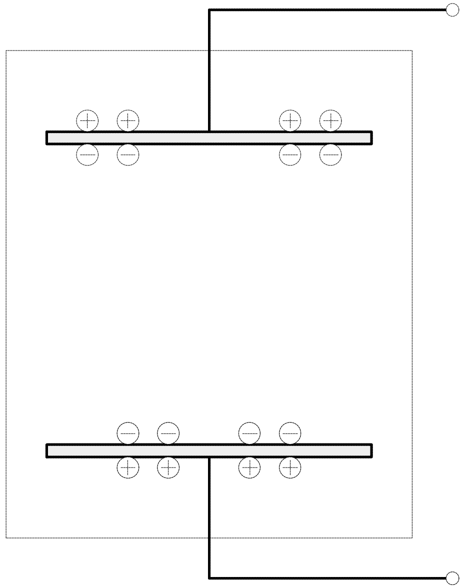
Wenn der Bezugspunkt mit dem **Bezugspotential** φ_A **= 0 im Unendlichen** liegt, gilt somit allgemein für das Potential in einem beliebigen Punkt im Abstand **r** von einer Punktladung **Q** :

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}}$$

Überführungsarbeit in Spannungsquellen

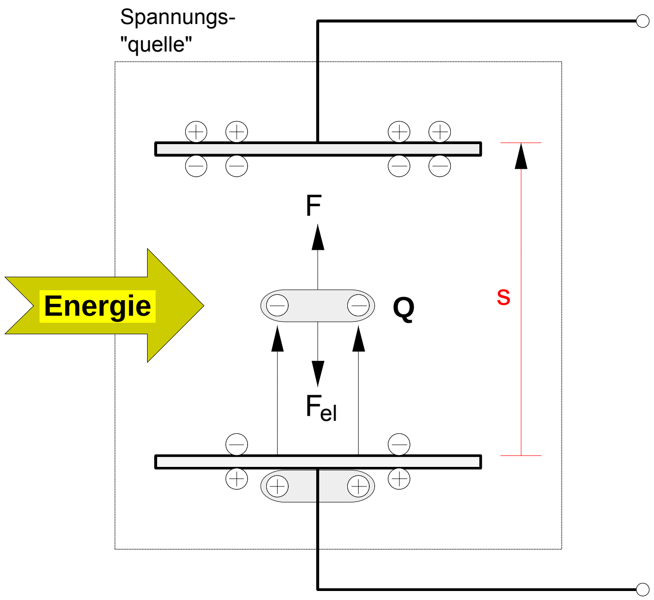
Name:

1. Elektrisch **neutrale** Metallplatten



Zufuhr mechanischer, magnetischer, thermischer, optischer oder chemischer **Energie** (= Arbeitsvermögen)

2. Umsetzung von **Energie** in Überführungsarbeit zur **Ladungstrennung**



Die zugeführte **Energie** wird in der Spannungsquelle in **Überführungsarbeit W** zur Trennung der negativen von den positiven Ladungen umgesetzt. Dabei werden gleichsam zwischen die Platten Feldlinien "gespannt", d.h. es entsteht ein elektrisches Feld **E** und damit eine elektrische **Spannung U** zwischen den Platten.

- **Überführungsarbeit** zur Ladungstrennung in der Spannungsquelle:

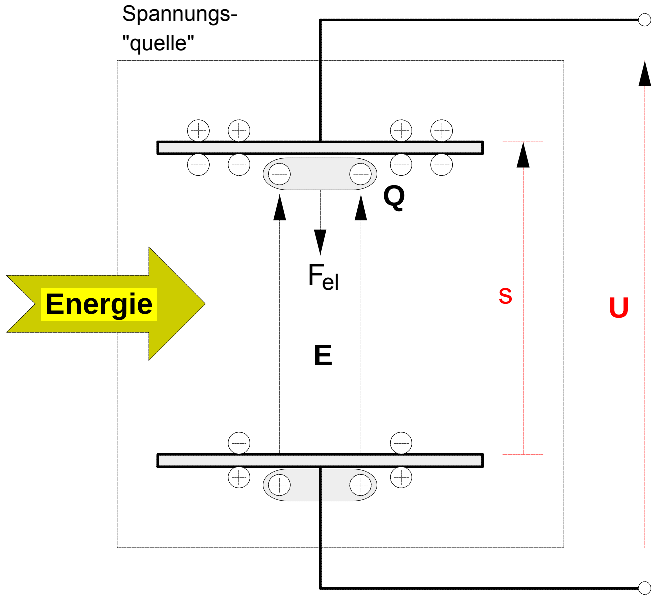
$$\mathbf{W = F \cdot s}$$

- Wird die gesamte **Überführungsarbeit** in elektrische Energie umgeformt, so gilt:

$$\mathbf{W = F \cdot s = W_{el}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F = F_{el}}$$

$$\mathbf{W_{el} = F_{el} \cdot s}$$

3. Erhaltung der Ladungstrennung durch weitere **Energiezufuhr**



Die elektrische **Spannung U** äußert sich auch in dem Bestreben der getrennten Ladungen, sich wieder ausgleichen zu wollen, d.h. die Ladungstrennung wieder aufzuheben und die Platten wieder in ihren ursprünglichen, elektrisch **neutralen Zustand** zu versetzen. Dies wird durch die weitere Zufuhr von Energie in die Spannungsquelle verhindert. Solange dies der Fall ist, steht gleichsam an ihren Klemmen elektrische Energie (Arbeitsfähigkeit gegenüber Ladungen) zur Verfügung.

- **Verfügbare elektrische Feldenergie** in der Spannungsquelle:

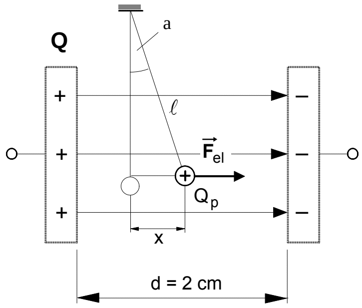
$$\mathbf{W_{el} = F_{el} \cdot s} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F_{el} = E \cdot Q}$$

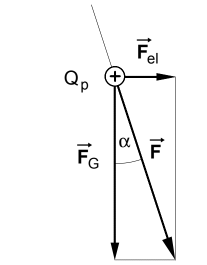
$$\mathbf{W_{el} = E \cdot Q \cdot s} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E \cdot s = U}$$

$$\mathbf{W_{el} = U \cdot Q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{U = \frac{W_{el}}{Q}}}$$

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-7E.DOC - 28.09.08	
Arbeitsblatt Nr. **7 e)** :	**Übungsaufgaben** zum **elektrostatischen Feld**	Seite 1

1. In dem als homogen angenommenen elektrischen Feld eines Plattenkondensators (Plattenabstand **d** = **2** cm; Plattenfläche **A** = **0,09** m²) befindet sich eine an einem Faden aufgehängte Holundermarkkugel mit einer Mase **m** = **5** g, einem Radius **r** = **0,1** cm und einer positiven Probeladung von $\mathbf{Q_p}$ = **0,5** µC. Die Auslenkweite beträgt **x = 0,5** cm, die Fadenlänge ℓ **= 10** cm (siehe **Bild 1**).





Kräfte auf die Probeladung

Bild 1

a) Berechnen Sie die **Spannung U** zwischen den Kondensatorplatten. [U = 97,2 V]

b) Welche elektrische **Ladung Q** befindet sich auf den Kondensatorplatten? [Q = 3,87 nC]

c) Mit welcher **Kraft F** ziehen sich die beiden Platten gegenseitig an ? [F = 9,4 µN]

d) Auf welche Werte würden sich die unter **a)** bis **c)** berechneten Größen ändern, wenn man die beiden Kondensatorplatten auf einen Plattenabstand **d'** = **3** cm auseinanderzöge? (Gehen Sie davon aus, dass die zum Aufladen des Kondensators erforderliche Spannungsquelle nach dem Aufladevorgang **abgeklemmt** wurde.) [U' = 145,8 V ; Q' = Q ; F' = F]

e) Auf welche Werte würden sich die unter **a)** bis **c)** berechneten Größen ändern, wenn man die Kondensatorplatten wie in Aufgabe **d)** auf **d' = 3** cm auseinanderzöge, die zur Aufladung verwendete Spannungsquelle jedoch angeschlossen bliebe, um die Spannung U gemäß Aufgabe **a)** zwischen den Platten konstant zu halten? [U'' = U = 97,2 V; Q'' = 2,58 nC ; F'' = 4,18 µN]

---

2. Ein Elektron mit der Elementarladung **e** = **1,6 ·** 10^{-19} C und der Elektronenmasse **m** = **0,911 ·** 10^{-30} Kg wird auf der Kathoden-Anoden-Strecke des Beschleunigungskondensators in einer Braunschen Röhre beschleunigt (siehe **Bild 2**). Der Plattenabstand beträgt **8** cm, die Spannung zwischen den Platten **2** kV. Es sei angenommen, dass die Elektronen mit einer vernachlässigbar kleinen Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v_o}$ aus der Glühkathode austreten.

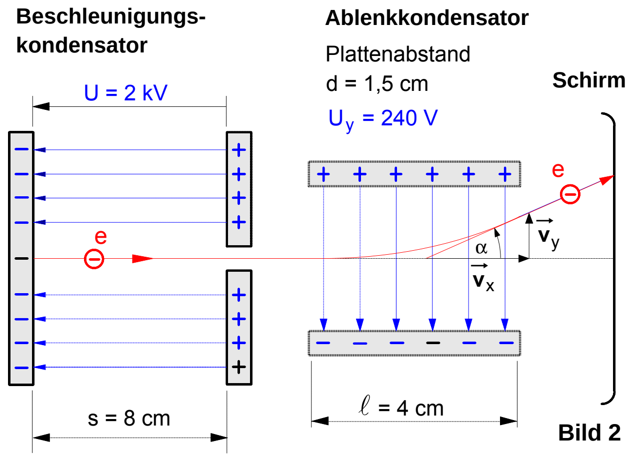


Bild 2

a) Auf welche **Geschwindigkeit v** wird das Elektron in dem elektrischen Feld des **Beschleunigungskondensators** beschleunigt ? [v = 26505 km/s]

b) Wie groß ist der **Ablenkwinkel** a, wenn an dem **Ablenkkondensator** eine Spannung $\mathbf{U_y}$ **= 240** V anliegt (siehe **Bild 7**). Gehen Sie davon aus, dass der Betrag der Geschwindigkeitskomponente $\mathbf{v_x}$ so groß wie **v** gemäß Aufgabe **a)** sei. [α = 9,1°]

---

3. In dem homogenen elektrischen Feld des Plattenkondensators in **Bild 3** befinden sich zwei dünne Metallplättchen mit einer Fläche von je **A** = **10** cm². Sie sind senkrecht zum Feldlinienverlauf angeordnet und berühren sich zunächst.

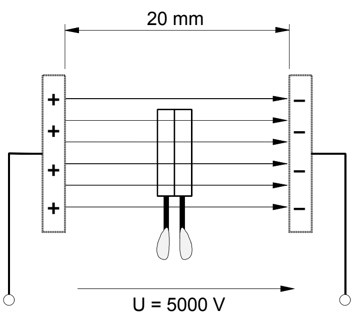


Bild 3

a) Berechnen Sie die **Influenzladung** auf den Plättchen.[Q = 2,2 nC]

b) Wie groß ist die **Spannung U'** zwischen den Plättchen, wenn diese in dem Feld auf einen Abstand **a = 1** mm auseinandergezogen und anschließend aus dem Feld herausgenommen werden? [U' = 250 V]

---

4. Im Bereich der Erdoberfläche beträgt die durchschnittliche Feldstärke des elektrischen Feldes der Erde etwa **E** = **120** N/C.

Wie groß ist die negative **Ladung Q** der Erde? Der mittlere Erdradius beträgt **6370** km.
[Q = 5,4·10^5 C]

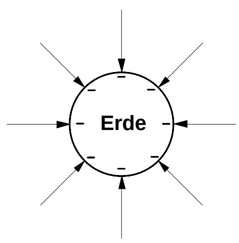
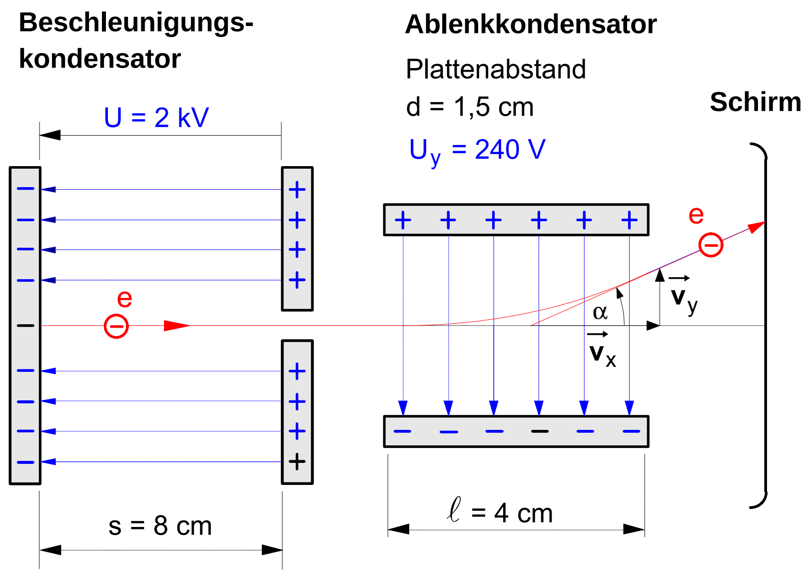


Bild 4

Lösungshinweise zu Aufgabe **2.** : **Kondensatoranordnung in einer Braunschen Röhre**



a) Auf welche **Geschwindigkeit v** wird das Elektron in dem elektrischen Feld des **Beschleunigungs-kondensators** beschleunigt **?**

b) Wie groß ist der **Ablenkwinkel** α , wenn an dem **Ablenkkondensator** eine Spannung U_y = 240 V angelegt wird (v_x = v gemäß Aufgabe a)) ?

- **Allgemeine Form** der Lösung zu **a)** :

$v = a \cdot t$ aus $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ ergibt sich für die Zeit: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$

$$v = a \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 2 \cdot s}{a}}$$

$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}$ aus $F = m \cdot a$ und $F = F_{el} = E \cdot e$

ergibt sich für die Beschleunigung : $a = \frac{E \cdot e}{m}$

$v = \sqrt{2 \cdot \frac{E \cdot e}{m} \cdot s}$ mit $E = \frac{U}{s}$ für die Feldstärke ergibt sich schließlich für

die **Geschwindigkeit** :

$$\boxed{v = \sqrt{2 \cdot \frac{U \cdot e}{m}}}$$

- **Lösungshinweis** zu Aufgabe **b)** :

In dem **Ablenkkondensator** führt das Elektron **gleichzeitig zwei Bewegungen** aus:

▶ in **x**-Richtung eine **gleichförmige geradlinige Bewegung** mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_x$ (= $\vec{v}$ gemäß Aufgabe **a)**) aufgrund seiner **Trägheit** und

▶ in **y**-Richtung eine **gleichmäßig beschleunigte Bewegung** mit der Beschleunigung a_y aufgrund der **elektrischen Kraft** $\vec{F}_{ely}$ im elektrischen Feld $\vec{E}_y$ des Ablenkkondensators.

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1_ABI 8 bis 11.doc - 28.08.2021
Arbeitsblatt Nr. **8** : **Kapazität von Kondensatoren**	

1. Die **Kapazität** einer Kondensatoranordnung

► Bei einer gegebenen Kondensatoranordnung gilt für den **Zusammenhang zwischen Ladung und Spannung**:

$$\boxed{Q \sim U} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = C \cdot U}$$

Die beiden Kondensatoren in **Bild 1** unterscheiden sich dadurch, dass der Kondensator 1 im Vergleich zu Kondensator 2 bei ein und derselben Spannung **U** eine größere Ladungsmenge **Q** aufnehmen und speichern kann, d.h. er besitzt eine größere "Kapazität". Dementsprechend ist der Proportionalitätsfaktor Q/U definiert als die *Kapazität **C*** einer Kondensatoranordnung.

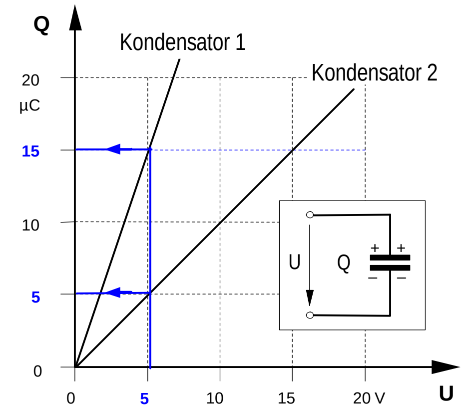


Bild 1

► **Allgemeine Definition** der **Kapazität C** :

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

Q ... Ladung in C oder As
U ... Spannung in V
C ... Kapazität in C/V = As/V = F (Farad)

2. Sonderfall **1** : **Kapazität eines Plattenkondensators**

► Gemäß der allgemeinen Definition der Kapazität gilt:

$$C = \frac{Q}{U} \quad \text{mit} \quad Q = E \cdot A \cdot \varepsilon \quad \text{und} \quad U = E \cdot d$$

$$C = \frac{E \cdot A \cdot \varepsilon}{E \cdot d} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \quad \text{wobei} \quad \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}$$

► Damit ergibt sich für die Kapazität eines Plattenkondensators:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d}}$$

A ... Plattenfläche in m²
d ... Plattenabstand in m
ε_0 ... elektrische Feldkonstante (siehe oben)
ε_r ... Dielektrizitätszahl
C ... Kapazität in F

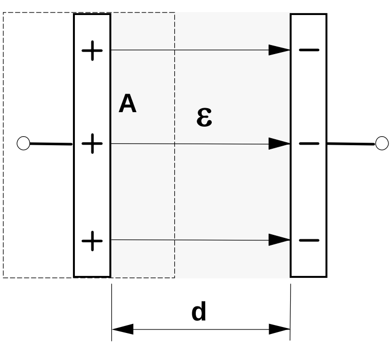


Bild 2 : Plattenkondensator

3. Sonderfall **2** : **Kapazität eines Kugelkondensators**

► Wir denken uns zunächst die positive Ladung +Q auf der Innenkugel als Punktladung in den Mittelpunkt der Anordnung konzentriert.

► Das Potential auf der äußeren Hohlkugel sei das Bezugs-potential φ_A = **0** V.

► Gemäß Arbeitsblatt Nr. **7 c)** kann das Potential φ_B auf der Innenkugel (also im Abstand $\mathbf{r_i}$ von der im Mittelpunkt konzentrierten Punktladung +Q) wie folgt bestimmt werden:

$$\textbf{(1)} \quad \varphi_B = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon}\left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right]$$

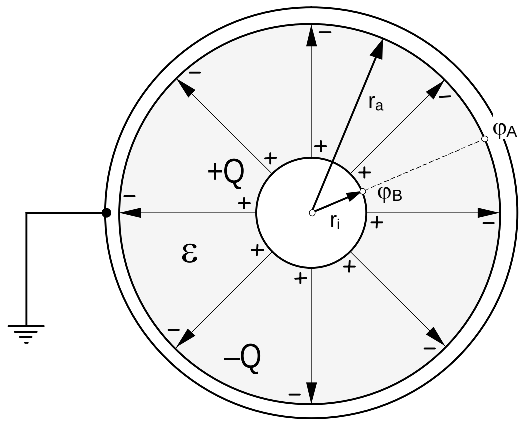


Bild 3 : Kugelkondensator

► Für die **Spannung U** (=Potentialdifferenz) zwischen der äußeren und der inneren Kugel gilt dann:

$$\textbf{(2)} \quad U = \Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A \quad \text{mit Gleichung } \textbf{(1)}$$

$$\textbf{(3)} \quad U = \Delta\varphi = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon}\left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right] - 0$$

► Daraus folgt für die Kapazität eines Kugel-kondensators:

$$C = \frac{Q}{U} \quad \text{mit Gleichung } \textbf{(3)} \text{ ergibt sich}$$

$$C = \frac{Q}{\dfrac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon}\left[\dfrac{1}{r_i} - \dfrac{1}{r_a}\right]}$$

Fortsetzung: siehe Tafelanschrieb (auf der Rückseite notieren)

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1_ABl 8 bis 11.doc - 28.08.2021
Arbeitsblatt Nr. **9** : **Polarisation** von **Isolierstoffen** im elektrischen Feld	

1. **Polarisierung** eines **unpolaren Atoms** im elektrischen Feld

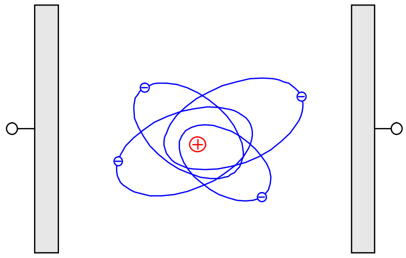


Bild **1**: **unpolarisiertes** Atom

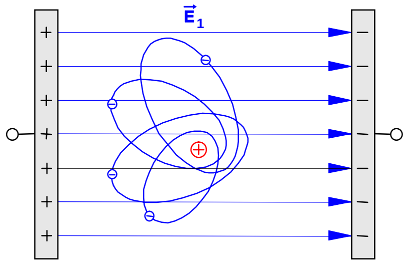
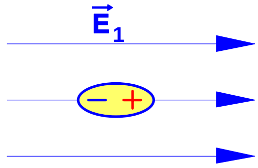


Bild **2**: **polarisiertes** Atom



Vereinfachte Darstellung eines polarisierten Atoms oder Moleküls als elektrischer Dipol

2. **Verschiebungspolarisation** eines Isolierstoffs aus **unpolaren Molekülen**

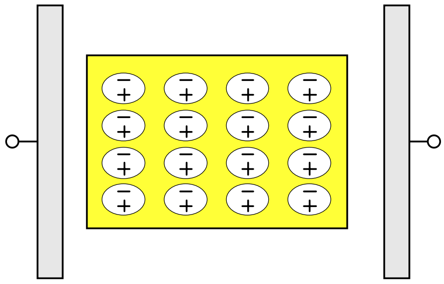


Bild **3**: Isolierstoff aus **unpolaren** Molekülen im feldfreien Raum – Die Moleküle und der Stoff sind nach außen elektrisch **neutral**.

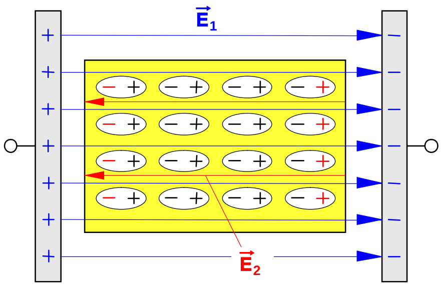
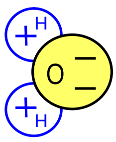


Bild **4**: Isolierstoff aus **unpolaren** Molekülen im elektrischen Feld $\vec{E}_1$ – Die Moleküle werden zu Dipolen, der Isolierstoff erscheint nach außen als **geladen** und es entsteht das Gegenfeld $\vec{E}_2$. $\Rightarrow$ $\underline{E_2 < E_1}$

Dielektrische Stoffe

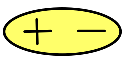
In Stoffen mit *unpolaren Molekülen* bilden die Moleküle an sich keine Dipole. Ihr *elektrisches Moment, entsteht erst im elektrischen Feld* durch geringfügige Ladungsverschiebungen. Es kommt zur Ausbildung von Oberflächenladungen an den Grenzflächen des Dielektrikums. Man spricht in diesem Falle von *Verschiebungspolarisation.* Die Dielektrizitätszahl ε_r, von Stoffen mit unpolaren Molekülen ist von der elektrischen Feldstärke und der Temperatur *unabhängig.* Man nennt diese Stoffe *dielektrische* Stoffe.

3. **Richtungspolarisation** eines Isolierstoffs aus ungeordneten **polaren Molekülen**



Polares Molekül

z. B. Wassermolekül aus einem Sauerstoff- und zwei Wasserstoffatomen



Vereinfachte Darstellung eines polaren Moleküls als elektrischer Dipol

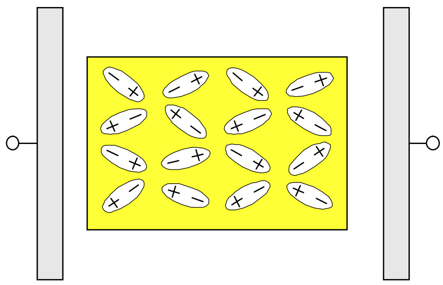


Bild **5**: Isolierstoff aus **polaren** Molekülen (Dipole) im feldfreien Raum – Die Dipole sind **ungeordnet** und der Stoff ist nach außen elektrisch **neutral**.

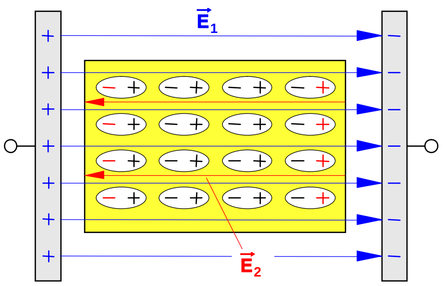


Bild **6**: Isolierstoff aus **polaren** Molekülen (Dipole) im elektrischen Feld – Die Dipole werden **ausgerichtet**, der Isolierstoff erscheint nach außen als **geladen** und es entsteht ein Gegenfeld $\vec{E}_2$. $\Rightarrow$ $\underline{E_2 < E_1}$

Paraelektrische Stoffe

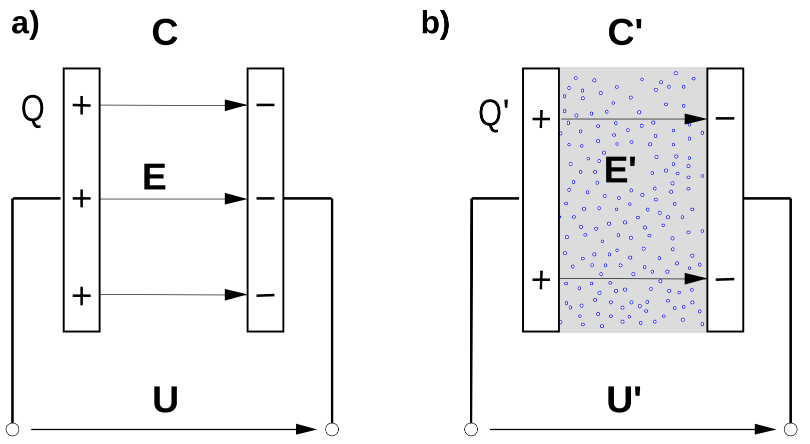
Stoffe, in deren Molekülen die Ladungen so unsymmetrisch verteilt sind, dass die Moleküle bereits ohne äußeres elektrisches Feld ein elektrisches Moment besitzen, nennt man *paraelektrische* Stoffe. Ein solcher Stoff erscheint ohne äußeres Feld elektrisch neutral, weil sich die elektrischen Wirkungen der infolge der Wärmebewegung regellos verteilten Dipole gegenseitig aufheben. In einem elektrischen Feld werden diese Dipole ausgerichtet (Richtungspolarisation). Der ordnenden Wirkung des äußeren Feldes auf die Dipole wirkt Wärmezufuhr zum Dielektrikum entgegen. Die Dielektrizitätszahl ε_r, ist unabhängig von der Feldstärke, aber abhängig von der Temperatur.

- **Fazit**: Bringt man einen Isolierstoff in ein elektrisches Feld $\vec{E}_1$, so werden je nach Art des Stoffes entweder unpolare Moleküle durch Ladungsverschiebung innerhalb der Moleküle polarisiert (Verschiebungspolarisation) oder ungeordnete polare Moleküle (Dipole) ausgerichtet (Richtungspolarisation).

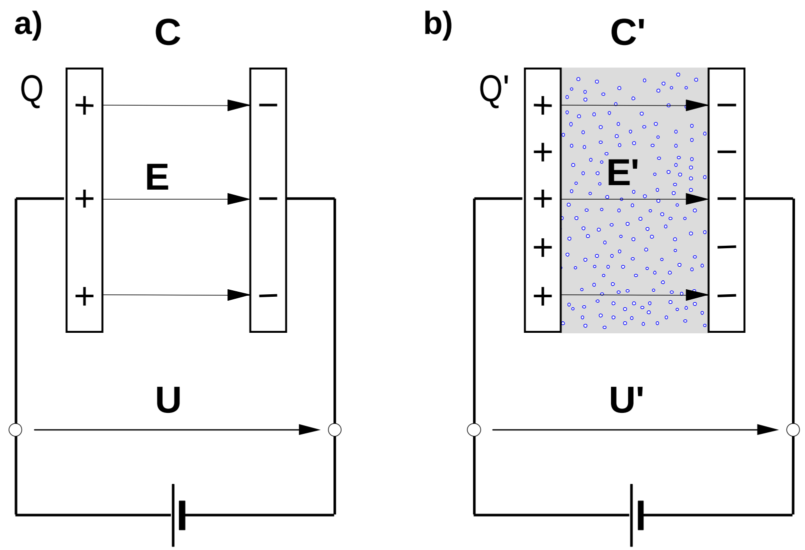
  Der Effekt ist in beiden Fällen der gleiche: An den Grenzflächen des Isolierstoffs bilden sich elektrische Ladungen aus, die in dem Isolierstoff ein elektrisches Gegenfeld $\vec{E}_2$ hervorrufen, welches das äußere elektrische Feld $\vec{E}_1$ **schwächt**, jedoch nicht –wie bei der Influenzwirkung in Metallen– ganz aufhebt.

  Vgl. auch: H. Stöcker, Taschenbuch der Physik, Frankfurt am Main 2000, S. 973 ff. und W. Kuhn, Physik, Felder und Ladungen, Braunschweig 1974, S. 81

Fall **1.** : Der Kondensator wird ohne Dielektrikum geladen. **Nach dem Laden wird die Spannungsquelle abgeklemmt**. Danach wird der Isolierstoff zwischen die Platten geschoben.



Fall **2.** : Der Kondensator wird ohne Dielektrikum geladen. **Nach dem Laden bleibt die Spannungsquelle angeschlossen** und der Isolierstoff wird zwischen die Platten geschoben.

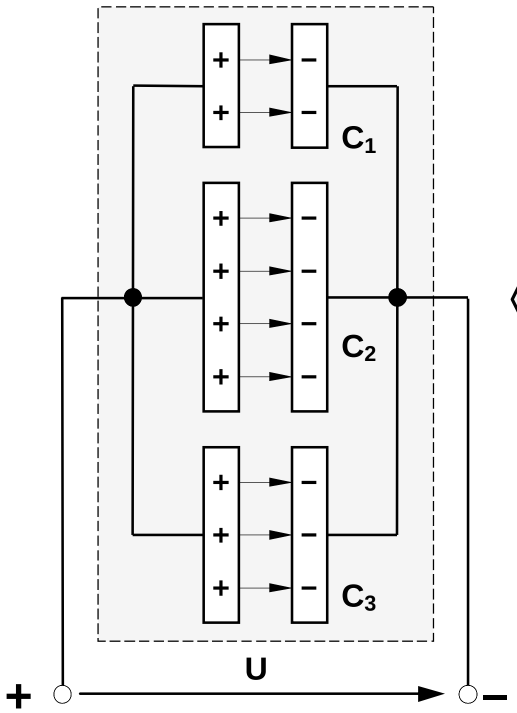


Plattenfläche: **A = A'** Plattenabstand: **d = d'**	**a) ohne** Isolierstoff (ε_r **= 1**)	**b) mit** Isolierstoff (ε_r **> 1**)
Ladung $\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q' = Q}$
Erregung $D = \dfrac{Q}{A}$	$\mathbf{D}$	$\mathbf{D' = D}$
Feldstärke $E = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{E' < E}$
Spannung $U = E \cdot d$	$\mathbf{U}$	$\mathbf{U' < U}$
Kapazität $C = \dfrac{Q}{U}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C' > C}$

Plattenfläche: **A = A'** Plattenabstand: **d = d'**	**a) ohne** Isolierstoff (ε_r **= 1**)	**b) mit** Isolierstoff (ε_r **> 1**)
Spannung $\mathbf{U}$	$\mathbf{U}$	$\mathbf{U' = U}$
Feldstärke $E = \dfrac{U}{d}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{E' = E}$
Erregung $D = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E$	$\mathbf{D}$	$\mathbf{D' > D}$
Ladung $Q = D \cdot A$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q' > Q}$
Kapazität $C = \dfrac{Q}{U}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C' > C}$

1. **Parallelschaltung** von **Kondensatoren**

- **Parallelschaltung** aus drei Einzelkondensatoren mit den Kapazitäten C_1, C_2 und C_3

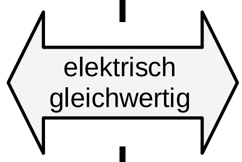


- **Ladung der** Einzelkondensatoren

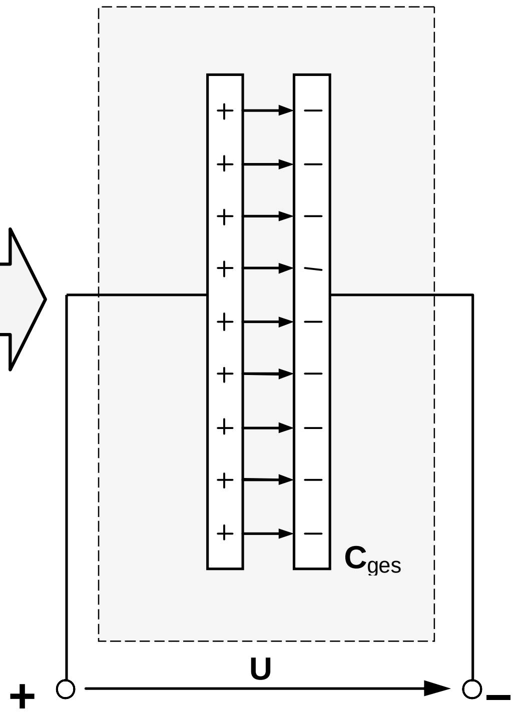
$$Q_1 = C_1 \cdot U$$

$$Q_2 = C_2 \cdot U$$

$$Q_3 = C_3 \cdot U$$



- **Ersatzkondensator** mit der Gesamtkapazität C_{ges}



- **Ladung des** Ersatzkondensators

$$Q_{ges} = C_{ges} \cdot U$$

- **Forderung:** Soll die Parallelschaltung durch einen **elektrisch gleichwertigen Ersatzkondensator** ersetzt werden, so muss dessen **Kapazität C_{ges}** so groß sein, dass er bei der Ladespannung **U** eine **Ladung Q_{ges}** aufnimmt, die so groß ist wie die **von der Parallelschaltung** aus den drei Einzelkondensatoren bei **gleicher** Ladespannung **U insgesamt** aufgenommene Ladung. Demnach muss der Ersatzkondensator folgende Ladung aufnehmen:

$$Q_{ges} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \qquad \text{mit} \quad Q = C \cdot U$$

$$C_{ges} \cdot U = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U + C_3 \cdot U \quad \Big| \cdot \frac{1}{U}$$

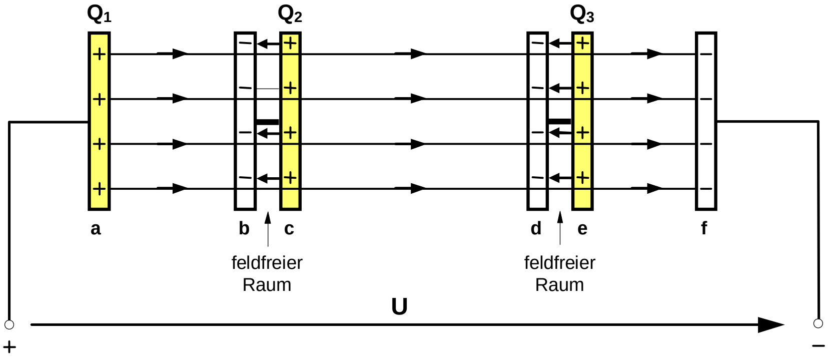
$$\boxed{\mathbf{C}_{ges} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 + \ldots}$$

- **Fazit:**

Durch das **Parallelschalten** von **Kondensatoren** wird eine **Gesamtkapazität C_{ges}** erzielt, die so groß ist wie die **Summe der Einzelkapazitäten** .

2. Reihenschaltung von Kondensatoren

a) Zwei **Influenzplattenpaare** im **elektrischen Feld** eines **Plattenkondensators**

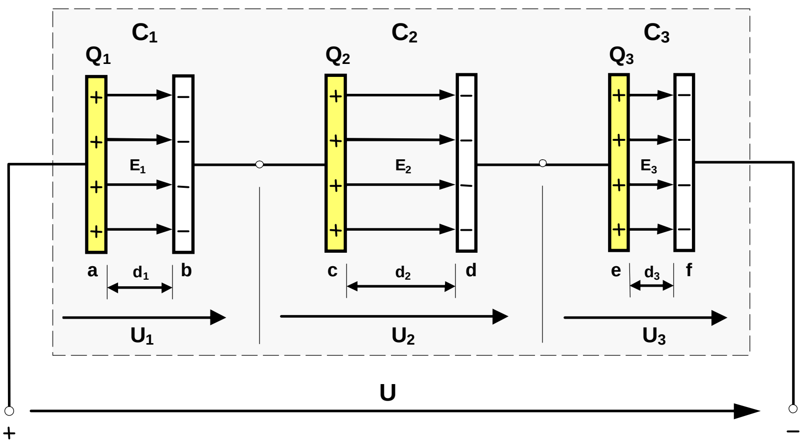


- Durch die Influenzwirkung des elektrischen Feldes der äußeren Platten **a** und **f** werden die inneren Influenzplattenpaare **b-c** und **d-e** elektrisch geladen. Das äußere Feld der mit der Spannung **U** geladenen Platten **a** und **f** verursacht auf den inneren Platten **b** und **d** eine **negative** Ladung und auf den Platten **c** und **e** eine **positive** Ladung. Durch das Gegenfeld der Influenzladungen entsteht zwischen den Influenzplatten jeweils ein feldfreier Raum.

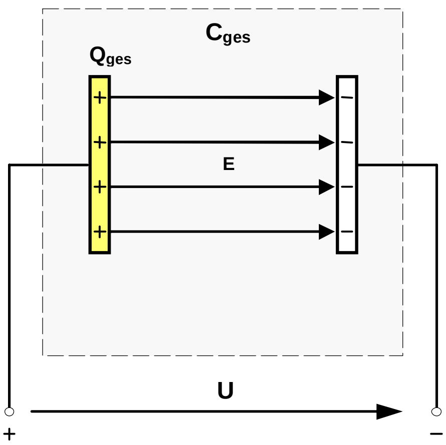
- Da bei gleich großen Flächen der inneren und äußeren Platten der **gesamte**, von den äußeren Platten ausgehende elektrische **Feldfluss** von den Flächen der inneren Platten erfasst wird, ist die **Influenzladung** auf den inneren Platten **genauso groß** wie die **felderzeugende Ladung** auf den äußeren Platten (siehe Arbeitsblatt Nr. **5**).

- Zieht man die (z.B. durch eine elastische Leitung) elektrisch miteinander verbundenen Influenzplattenpaare auseinander, so **entsteht eine Reihenschaltung aus 3 Kondensatoren** mit den Plattenpaaren **a-b** , **c-d** und **e-f** , von denen wir der Einfachheit halber zunächst annehmen wollen, daß sich deren Kapazitäten allein durch verschiedene Plattenabstände voneinander unterscheiden.

b) **Reihenschaltung** aus **3 Einzelkondensatoren** mit den Kapazitäten C_1 , C_2 und C_3



c) **Ersatzkondensator** mit der **Gesamtkapazität** C_{ges}



- Trotz unterschiedlicher Kapazitäten der Einzelkondensatoren ergibt sich infolge der Influenzvorgänge gemäß **a)** folgende **Ladungsverteilung** :

- Erforderliche **Ladung**saufnahme des **Ersatzkondensators**:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_{ges} = Q$$

- Von den äußeren Anschlüssen an den Platten **a** und **f** aus betrachtet, nimmt die gesamte Reihenschaltung bei einer Spannung **U** demnach eine **Ladung Q** auf, die lediglich so groß ist wie die der Einzelkondensatoren. Die Kapazität C_{ges} des **Ersatzkondensators** muß daher auch nur so groß sein, dass er bei gleicher Spannung **U** eben diese Ladung **Q** aufnimmt.

- Die durch die elektrischen Felder der Einzelkondensatoren gemäß $U = E \cdot d$ jeweils bewirkten **Teilspannungen** zwischen den Platten der Einzelkondensatoren **addieren** sich nach der **Maschenregel** zur **Gesamtspannung U**, d.h.:

$$U_1 + U_2 + U_3 = U$$

- Da jede Teilspannung zugleich auch gemäß $Q = C \cdot U$ durch das Verhältnis $Q / C = U$ bestimmt ist, gilt damit auch:

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = \frac{Q}{C_{ges}} \quad \Big| \cdot \frac{1}{Q}$$

- Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit **1 / Q** , so kann **Q** gekürzt werden und es ergibt sich schließlich für die

Reihenschaltung von Kondensatoren:

$$\boxed{\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots}$$

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name:	ET1_ABI 8 bis 11.doc - 28.08.2021
Arbeitsblatt Nr. **11** :	**Berechnung von Kondensatoren** (Übungsaufgaben)	

1. Bei einem Plattenkondensator mit Glimmer als Dielektrikum (ε_r = **7**) beträgt die Fläche einer Platte **A** = **0,1** m^2**,** der Plattenabstand **d** = **2** mm und die anliegende Spannung **U** = **1000** V. Berechnen Sie

a) die **Kapazität** des Kondensators, [3,1 nF]

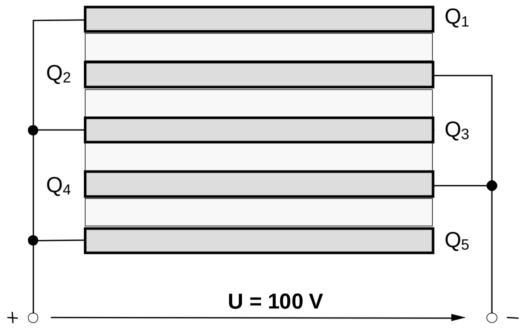
b) die auf den Platten gespeicherte **Ladung**, [3,1 µC]

c) die elektrische **Erregung** (= Verschiebungsdichte) und [31 µC/m²]

d) die elektrische **Feldstärke** zwischen den Platten. [500 kV/m]

---

2. Der in der Abbildung rechts dargestellte Mehrplattenkondensator wird mit einer Spannung **U** = **100** V geladen. Die Fläche einer Platte beträgt **A** = **0,5** m^2, der Abstand zwischen den einzelnen Platten jeweils **d** = **0,5** mm. Zwischen den Platten befindet sich Papier (ε_r = **4**) als Dielektrikum.



a) Wie groß ist die **Kapazität** des Kondensators?[142 nF]

b) Welche Ladungen Q_1 bis Q_5 befinden sich auf den einzelnen Platten (siehe Abbildung)?
[$Q_1 = Q_5$ = 3,54 µC ; $Q_2 = Q_3 = Q_4$ = 7,08 µC]

---

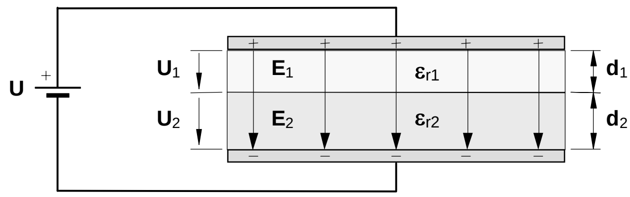
3. Ein Kondensator mit dem Plattenabstand d_1 = **3** mm und Luft als Dielektrikum (ε_r = **1**) wird kurzzeitig mit einer Spannungsquelle verbunden und dadurch auf U_1 = **600** V aufgeladen. Nach dem Aufladen wird die Spannungsquelle **abgeklemmt**.

a) Welche Spannung U_2 liegt an dem Kondensator, wenn der Plattenabstand auf d_2 = 5 mm vergrößert wird? [1000 V]

b) Anschließend wird bei dem Plattenabstand $d_2' = d_2$ = **5** mm eine Isolierstoffplatte mit ε_{r2}' = **5** eingefügt. Welche Spannung U_2' liegt jetzt an dem Kondensator? [200 V]

---

4. In einem Plattenkondensator (siehe Abbildung rechts) sind zwei Isolierstoffplatten (ε_{r1} = **2,5** und ε_{r2} = **4**) mit d_1 = **3** mm und d_2 = **4** mm Plattendicke als geschichtetes Dielektrikum untergebracht. Die Fläche einer Platte beträgt **A** = **800** cm^2, die anliegende Spannung **U** = **5000** V.

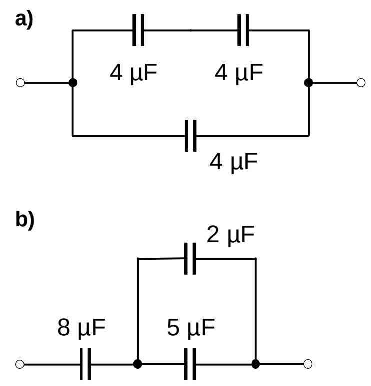


a) Wie groß ist die **Kapazität** des Kondensators? [322 pF] (*Lösungshinweis*: Die quergeschichtete Anordnung kann als **Reihenschaltung** zweier Kondensatoren aufgefaßt werden!)

b) Mit welchen elektrischen Feldstärken E_1 und E_2 und mit welchen Spannungen U_1 und U_2 werden die Isolierstoffplatten beansprucht? [U_1 = 2727 V ; U_2 = 2272 V]

---

5. Wie groß sind die **Gesamtkapazitäten** der nebenstehenden Kondensatorschaltungen? [6 µF ; 3,73 µF]



Schaltungen zu Aufgabe **5.**

---

6. Ein Kondensator mit C_1 = **400** pF soll mit einem zweiten Kondensator so zusammengeschaltet werden, daß sich eine Ersatzkapazität von **80** pF ergibt. Berechnen Sie die Kapazität C_2 des zweiten Kondensators. [100 pF]

---

7. Welche Kapazitätswerte C_1 und C_2 haben zwei Kondensatoren, die in Reihe geschaltet **50** pF und parallel geschaltet **300** pF ergeben. [236,6 pF; 63,4pF]

1. Bei einem Plattenkondensator mit Glimmer als Dielektrikum (ε_r = **7**) beträgt die Fläche einer Platte **A** = **0,1** m^2**,** der Plattenabstand **d** = **2** mm und die anliegende Spannung **U** = **1000** V. Berechnen Sie

a) die **Kapazität** des Kondensators

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 7 \cdot \frac{0{,}1\,m^2}{2 \cdot 10^{-3}\,m} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C = 3{,}1 \cdot 10^{-9}\ F = 3{,}1\,nF}}$$

b) die auf den Platten gespeicherte **Ladung**

$$Q = C \cdot U = 3{,}1 \cdot 10^{-9} \frac{As}{V} \cdot 1000\ V \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Q = 3{,}1 \cdot 10^{-6}\ As = 3{,}1\,\mu As}}$$

c) die elektrische **Erregung** (= Verschiebungsdichte)

$$D = \frac{Q}{A} = \frac{3{,}1 \cdot 10^{-6}\ As}{0{,}1\,m^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Q = 31 \cdot 10^{-6}\ As/m^2 = 31\,\mu As/m^2}}$$

d) die elektrische **Feldstärke** zwischen den Platten

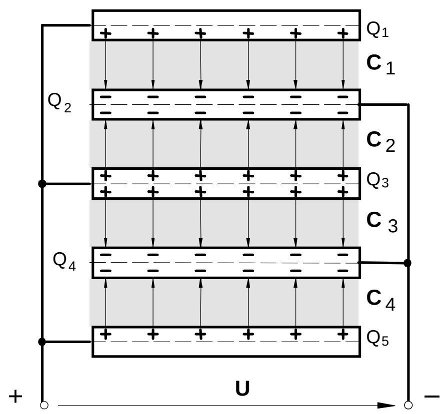
$$E = \frac{U}{d} = \frac{1000\ V}{2 \cdot 10^{-3} m} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E = 500 \cdot 10^3 \frac{V}{m}}}$$

oder

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} = \frac{31 \cdot 10^{-6}\ As/m^2}{8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 7} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E = 500 \cdot 10^3 \frac{V}{m}}}$$

---

2. Der in der Abbildung rechts dargestellte Mehrplattenkondensator wird mit einer Spannung **U** = **100** V geladen. Die Fläche einer Platte beträgt **A** = **0,5** m^2, der Abstand zwischen den einzelnen Platten jeweils **d** = **0,5** mm. Zwischen den Platten befindet sich Papier (ε_r = **4**) als Dielektrikum.



a) Wie groß ist die **Kapazität** des Kondensators?[142 nF]

- ► Da alle 4 Kondensatoren an der gleichen Spannung liegen, sind sie **parallel** geschaltet.
- ► Da Plattenfläche, Plattenabstand und Dielektrikum gleich sind, gilt für die **Einzelkapazität C** bzw. für die **Gesamtkapazität** C_{ges} :

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 4 \cdot \frac{0{,}5\,m^2}{0{,}5 \cdot 10^{-3}\,m} \quad \Rightarrow \quad \underline{C = 35{,}42 \cdot 10^{-9}\ F = 35{,}42\ nF}$$

$$C_{ges} = 4 \cdot C = 4 \cdot 141{,}66 \cdot 10^{-9}\ F \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C_{ges} = 141{,}66 \cdot 10^{-9}\ F = 141{,}66\ nF}}$$

b) Welche Ladungen **Q_1** bis **Q_5** befinden sich auf den einzelnen Platten (siehe Abbildung)?

- ► Für die **Ladung Q_1** und **Q_5** auf den **äußeren** Kondensatorplatten gilt :

$$Q_1 = Q_5 = Q = C \cdot U = 35{,}4 \cdot 10^{-9} \frac{As}{V} \cdot 100\ V \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Q_1 = Q_5 = Q = 3{,}54 \cdot 10^{-6}\ As = 3{,}54\,\mu As}}$$

- ► Für die Ladungen **Q_2**, **Q_3** und **Q_4** auf den **inneren Platten** gilt :

$$Q_2 = Q_3 = Q_4 = \mathbf{2} \cdot Q = 2 \cdot 3{,}54 \cdot 10^{-6}\ As \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Q_2 = Q_3 = Q_4 = 7{,}08 \cdot 10^{-6}\ As}}$$

3. Ein Kondensator mit dem Plattenabstand $\mathbf{d_1}$ = **3** mm und Luft als Dielektrikum (ε_r = **1**) wird kurzzeitig mit einer Spannungsquelle verbunden und dadurch auf $\mathbf{U_1}$ = **600** V aufgeladen. Nach dem Aufladen wird die Spannungsquelle **abgeklemmt**.

a) Welche Spannung $\mathbf{U_2}$ liegt an dem Kondensator, wenn der Plattenabstand auf $\mathbf{d_2}$ = **5** mm vergrößert wird?

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1 \quad Q_2 = C_2 \cdot U_2$$

$$Q_1 = Q_2$$

$$C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2$$

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \frac{A_1}{d_1} \cdot U_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A_2}{d_2} \cdot U_2 \quad \text{mit} \quad A_1 = A_2 \text{ und } \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1}$$

$$\frac{U_1}{d_1} = \frac{U_2}{d_2} \Rightarrow U_2 = \frac{U_1 \cdot d_2}{d_1} = \frac{600\text{ V} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\text{m}}{3 \cdot 10^{-3}\text{m}} \Rightarrow \underline{\underline{U_2 = 1000\text{ V}}}$$

Oder über das elektrostatische Grundgesetz:

$$\text{Da } Q_1 = Q_2 \quad \text{und} \quad A_1 = A_2 \quad \text{ist auch } \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_2}{A_2} \text{ und damit } \quad D_1 = D_2 \Rightarrow$$

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot E_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot E_2 \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{U_1}{d_1} = \frac{U_2}{d_2} \Rightarrow U_2 = \text{.... (Rest wie oben)}$$

b) Anschließend wird bei dem Plattenabstand $\mathbf{d_2}$ = **5** mm eine Isolierstoffplatte mit ε_r = **5** eingefügt. Welche Spannung $\mathbf{U_2'}$ liegt jetzt an dem Kondensator?

$$Q_2' = Q_2 \quad \text{mit} \quad Q_2' = C_2' \cdot U_2' \quad \text{und} \quad Q_2 = C_2 \cdot U_2$$

$$C_2' \cdot U_2' = C_2 \cdot U_2$$

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}' \cdot \frac{A_2'}{d_2'} \cdot U_2' = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{A_2}{d_2} \cdot U_2 \quad \text{mit} \quad A_2' = A_2 \text{ und } d_2' = d_2 \text{ und } \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1}$$

$$\varepsilon_{r2}' \cdot U_2' = \varepsilon_{r1} \cdot U_2 \Rightarrow U_2' = \frac{\varepsilon_{r1} \cdot U_2}{\varepsilon_{r2}'} = \frac{1 \cdot 1000\text{ V}}{5} \Rightarrow \underline{\underline{U_2' = 200\text{ V}}}$$

Oder über das elektrostatische Grundgesetz:

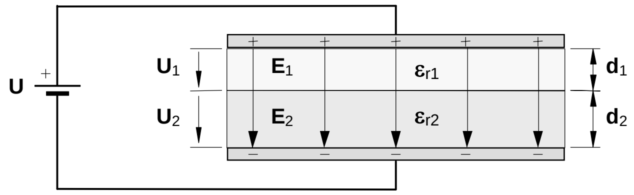
$$\text{Da } Q_2' = Q_2 \quad \text{und} \quad A_2' = A_2 \quad \text{ist auch } \frac{Q_2'}{A_2'} = \frac{Q_2}{A_2} \text{ und damit } \quad D_2' = D_2 \Rightarrow$$

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}' \cdot E_2' = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot E_2 \quad \text{mit} \quad E_2' = \frac{U_2'}{d_2'} \quad \text{und} \quad E_2 = \frac{U_2}{d_2}$$

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}' \cdot \frac{U_2'}{d_2'} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot \frac{U_2}{d_2} \quad \text{mit } d_2' = d_2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1}$$

$$\varepsilon_{r2}' \cdot U_2' = \varepsilon_{r1} \cdot U_2 \quad \Rightarrow U_2' = \text{.... (Rest wie oben)}$$

4. In einem Plattenkondensator (siehe Abbildung rechts) sind zwei Isolierstoffplatten (ε_{r1} = **2,5** und ε_{r2} = **4**) mit $\mathbf{d_1}$ = **3** mm und $\mathbf{d_2}$ = **4** mm Plattendicke als geschichtetes Dielektrikum untergebracht. Die Fläche einer Platte beträgt **A** = **800** cm², die anliegende Spannung **U** = **5000** V.



a) Wie groß ist die **Kapazität** des Kondensators? [322 pF]

(*Lösungshinweis*: Die quergeschichtete Anordnung kann als **Reihenschaltung** zweier Kondensatoren aufgefaßt werden!)

$$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r_1} \cdot \frac{A}{d} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 2{,}5 \cdot \frac{800 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} \Rightarrow \underline{C_1 = 590 \cdot 10^{-12}\ \text{F} = 590\ \text{pF}}$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r_2} \cdot \frac{A}{d} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 4{,}0 \cdot \frac{800 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} \Rightarrow \underline{C_1 = 708 \cdot 10^{-12}\ \text{F} = 708\ \text{pF}}$$

$$C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{590\ \text{pF} \cdot 708\ \text{pF}}{590\ \text{pF} + 708\ \text{pF}} \Rightarrow \underline{\underline{C_{ges} = 322\ \text{pF}}}$$

b) Mit welchen elektrischen Feldstärken $\mathbf{E_1}$ und $\mathbf{E_2}$ und mit welchen Spannungen $\mathbf{U_1}$ und $\mathbf{U_2}$ werden die Isolierstoffplatten beansprucht? [U_1 = 2727 V ; U_2 = 2272 V]

$$Q_{ges} = C_{ges} \cdot U_{ges} = 322 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 5000\ \text{V} \Rightarrow \underline{Q_{ges} = 1{,}61 \cdot 10^{-6}\ \text{As} = 1{,}61\,\mu\text{As}}$$

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1 \text{ und } Q_2 = C_2 \cdot U_2$$

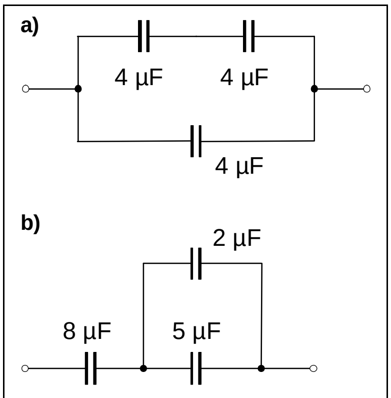
$$\text{Da } Q_1 = Q_2 = Q_{ges} = Q \quad \text{gilt auch:} \quad Q = C_1 \cdot U_1 \quad \text{bzw.} \quad Q = C_2 \cdot U_2$$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{1{,}61 \cdot 10^{-6}\ \text{As}}{590 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{V}}} \Rightarrow \underline{\underline{U_1 = 2728{,}8\ \text{V}}} \Rightarrow E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{2728{,}8\ \text{V}}{3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} \Rightarrow \underline{\underline{E_1 = 909600\,\frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{1{,}61 \cdot 10^{-6}\ \text{As}}{708 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{V}}} \Rightarrow \underline{\underline{U_1 = 2274{,}0\ \text{V}}} \Rightarrow E_2 = \frac{U_2}{d_2} = \frac{2274{,}0\ \text{V}}{4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} \Rightarrow \underline{\underline{E_2 = 568500\,\frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$

---

5. Wie groß sind die **Gesamtkapazitäten** der nebenstehenden Kondensatorschaltungen? [6 µF ; 3,73 µF]



Schaltungen zu Aufgabe **5.**

a) $$C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} + C_3 = \frac{4\,\mu\text{F} \cdot 4\,\mu\text{F}}{4\,\mu\text{F} + 4\,\mu\text{F}} + 4\,\mu\text{F} \Rightarrow \underline{\underline{C_{ges} = 6\,\mu\text{F}}}$$

b)

$$C_{ges} = \frac{C_1 \cdot (C_2 + C_3)}{C_1 + (C_2 + C_3)} = \frac{8\,\mu\text{F} \cdot (2\,\mu\text{F} + 5\,\mu\text{F})}{8\,\mu\text{F} + (2\,\mu\text{F} + 5\,\mu\text{F})} \Rightarrow \underline{\underline{C_{ges} = 3{,}73\,\mu\text{F}}}$$

6. Ein Kondensator mit $\mathbf{C_1}$ = **400** pF soll mit einem zweiten Kondensator so zusammengeschaltet werden, daß sich eine Ersatzkapazität von **80** pF ergibt. Berechnen Sie die Kapazität $\mathbf{C_2}$ des zweiten Kondensators.

Da $C_{ges} < C_2$, müssen C_1 und C_2 in Reihe geschaltet werden.

$$C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_{ges} \cdot (C_1 + C_2) = C_1 \cdot C_2$$

$$C_{ges} \cdot C_1 + C_{ges} \cdot C_2 = C_1 \cdot C_2$$

$$C_{ges} \cdot C_1 = C_1 \cdot C_2 - C_{ges} \cdot C_2$$

$$C_{ges} \cdot C_1 = C_2 \cdot (C_1 - C_{ges})$$

$$C_2 = \frac{C_{ges} \cdot C_1}{(C_1 - C_{ges})} = \frac{80\text{ pF} \cdot 400\text{ pF}}{400\text{ pF} - 80\text{ pF}} \Rightarrow \underline{\underline{C_2 = 100\text{ pF}}}$$

---

7. Welche Kapazitätswerte $\mathbf{C_1}$ und $\mathbf{C_2}$ haben zwei Kondensatoren, die in Reihe geschaltet **50** pF und parallell geschaltet **300** pF ergeben.

$$\text{parallel: } C_{ges_1} = 300\text{ pF} \qquad \text{in Reihe: } C_{ges_2} = 50\text{ pF}$$

$$C_{ges_1} = C_1 + C_2$$

$$C_{ges_2} = \frac{(C_{ges_1} - C_2) \cdot C_2}{C_{ges_1} - C_2 + C_2} \qquad \text{mit} \quad C_1 = C_{ges_1} - C_2$$

$$C_{ges_2} = \frac{C_{ges_1} \cdot C_2 - C_2^{\,2}}{C_{ges_1}}$$

$$C_{ges_2} \cdot C_{ges_1} = C_{ges_1} \cdot C_2 - C_2^{\,2}$$

$$-C_{ges_2} \cdot C_{ges_1} = -C_{ges_1} \cdot C_2 + C_2^{\,2}$$

$$C_2^{\,2} - C_{ges_1} \cdot C_2 + C_{ges_2} \cdot C_{ges_1} = 0$$

$$C_{2_{1/2}} = -\frac{-C_{ges_1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-C_{ges_1}}{2}\right)^2 - C_{ges_2} \cdot C_{ges_1}}$$

$$C_{2_{1/2}} = -\frac{-300\text{ pF}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-300\text{ pF}}{2}\right)^2 - 50\text{ pF} \cdot 300\text{ pF}}$$

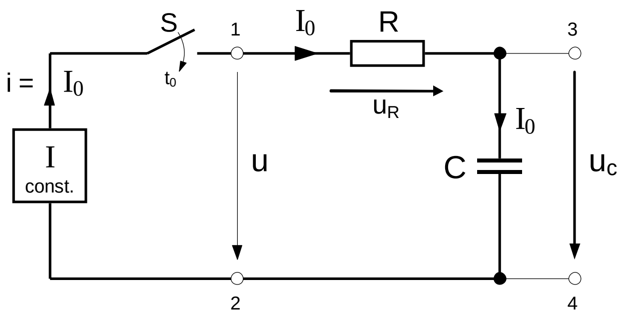
$$C_{2_{1/2}} = 150\text{ pF} \pm 86{,}6\text{ pF}$$

Zwei Lösungen:

$$C_{2_1} = 236{,}6\text{ pF} \Rightarrow \text{Dann ist } C_{1_1} = 300\text{ pF} - 236{,}6\text{ pF} = 63{,}4\text{ pF}$$

$$C_{2_2} = 63{,}4\text{ pF} \Rightarrow \text{Dann ist } C_{1_2} = 300\text{ pF} - 63{,}4\text{ pF} = 236{,}6\text{ pF}$$

Arbeitsblatt Nr. **11 a)** : **Laden** des **Kondensators** mit **konstantem Ladestrom**



- ***Annahme***: Nachdem der Schalter S zum Zeitpunkt $\mathbf{t_0}$ geschlossen worden ist, soll der Kondensator **C** über den Widerstand **R** mit Hilfe einer Konstantstromquelle mit einem ***konstantem*** **Ladestrom** I_0 geladen werden.
- Für die in der Zeit **t** auf die Kondensatorplatten transportierte **Ladung q** gilt dann gemäß Arbeitsblatt Nr.**12 b)** :

$$\boxed{q = I_0 \cdot t}$$

Da der Ladestrom I_0 **konstant** ist, steigt demnach die **Ladung q** in dem Kondensator ***linear*** in Abhängigkeit von der Zeit **t** an.

- Für die **Spannung** $\mathbf{u_C}$ am Kondensator gilt gemäß Arbeitsblatt Nr. **8 a)** die Beziehung:

$$q = C \cdot u_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_c = \frac{q}{C}}$$

Mit $\mathbf{q = I_0 \cdot t}$ ergibt sich dann für die Zeitabhängigkeit der Kondensatorspannung $\mathbf{u_C}$:

$$\boxed{u_c = \frac{I_o}{C} \cdot t}$$

Da sowohl I_0 als auch **C** konstant sind, ist auch der Quotient I_0/C eine **Konstante** und es ist $\mathbf{u_C \sim t}$. Damit steigt bei diesem *speziellen Ladevorgang mit konstantem Ladestrom* auch die **Kondensatorspannung** $\mathbf{u_C}$ in Abhängigkeit von der Zeit **t** ***linear*** an.

- Für die **Spannung** $\mathbf{u_R}$ **an dem Ladewiderstand R** gilt gemäß dem Ohmschen Gesetz :

$$\boxed{u_R = R \cdot I_o}$$

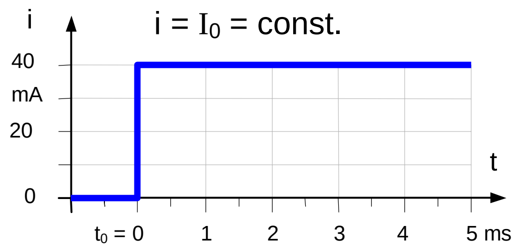
- Für die **Gesamtspannung u** an der Reihenschaltung von Widerstand **R** und Kondensator **C** gilt in jedem Augenblick während des Ladevorgangs die Maschenregel, d.h. :

$$\boxed{u = u_R + u_c}$$

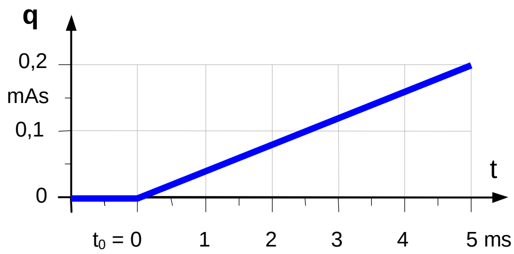
- **Aufgabe**: Zeichnen Sie die Zeitdiagramme von $\mathbf{t_0}$ = 0 s bis **t** = **5** ms für den Fall, dass ein Kondensator mit **C** = **100** µF über einen Ladewiderstand **R** = **25** Ω mit einem konstanten Ladestrom I_0 = **40** mA geladen wird.

- **Zeitdiagramme** des Ladevorganges bei ***konstantem*** **Ladestrom**

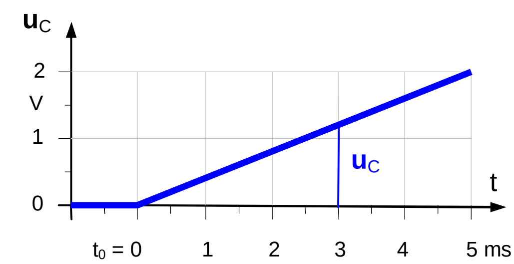
1. Ladestrom i



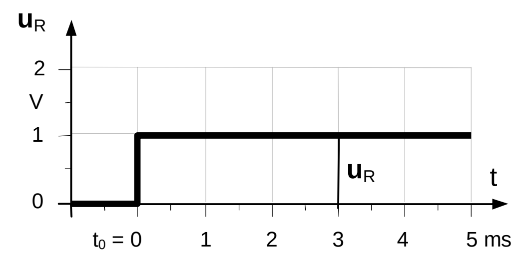
2. Ladung q im Kondensator



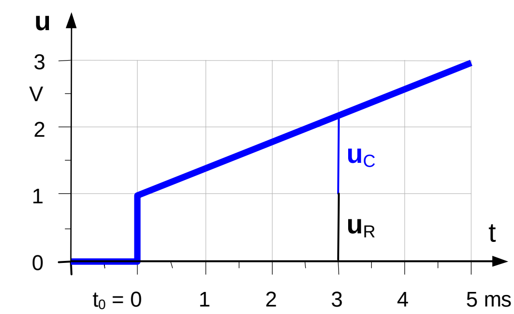
3. Spannung u_C am Kondensator

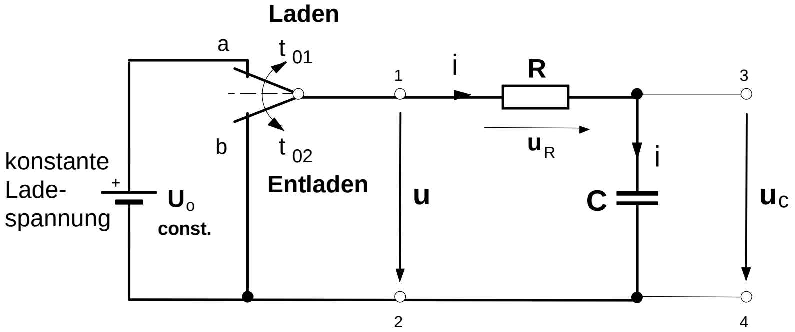


4. Spannung u_R am Ladewiderstand



5. Gesamtspannung u



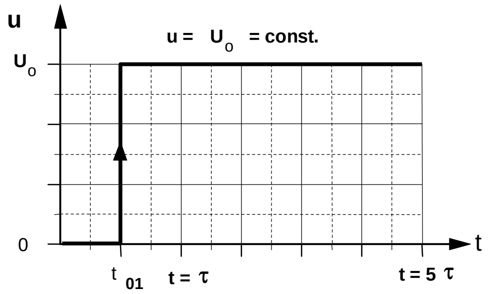


Zeitkonstante :

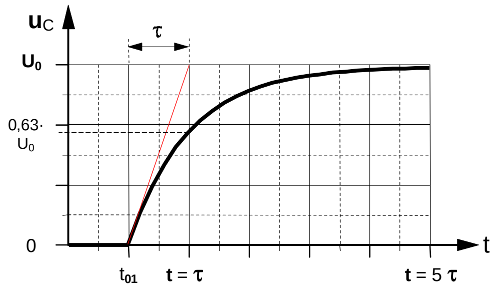
$$\boxed{\tau = R \cdot C}$$

● Ladevorgang

► Spannung **u** an der RC-Schaltung

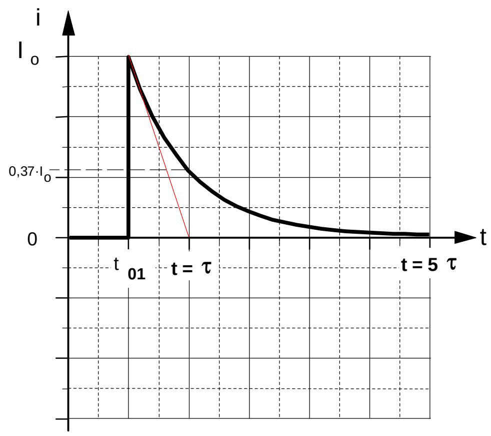


► Zeitdiagramm der **Kondensatorspannung u_C**



$$u_C = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

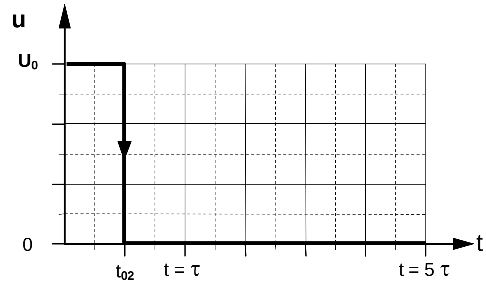
► Zeitdiagramm des **Ladestromes**



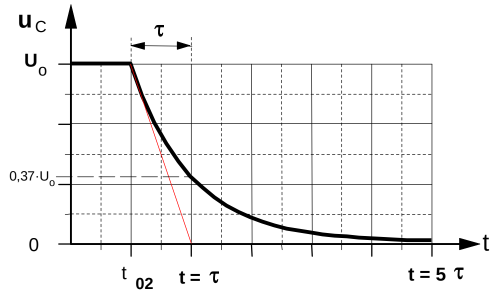
$$i = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$ wobei $I_0 = \frac{U_0}{R}$

● Entladevorgang

► Spannung **u** an der RC-Schaltung

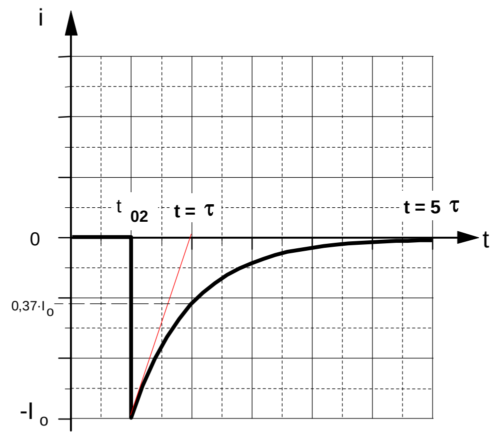


► Zeitdiagramm der **Kondensatorspannung u_C**



$$u_C = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

► Zeitdiagramm des **Entladestromes**

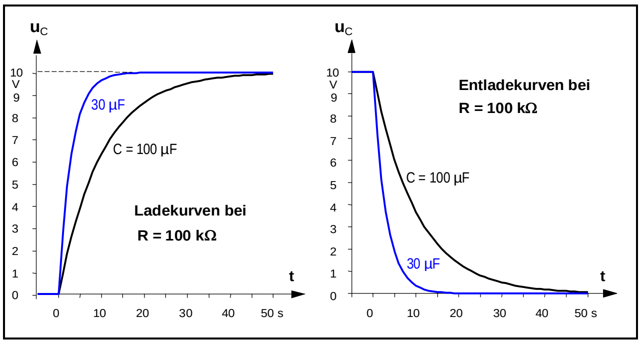


$$i = - I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$ wobei $I_0 = \frac{U_0}{R}$

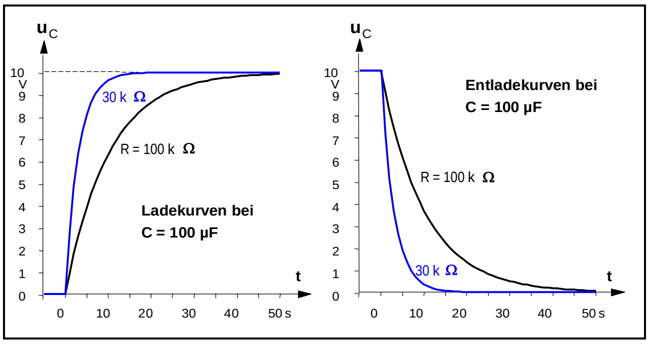
Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1_ABl 8 bis 11.doc - 28.08.2021 8:58	
Arbeitsblatt Nr. **11 b)** : **Laden** des **Kondensators** mit **konstanter Ladespannung**		Seite **2**

1. Der **Einfluss** von **R** und **C** auf den Verlauf des **Lade-** und **Entladevorganges**

a) Einfluss der **Kapazität C** (bei R = const.)



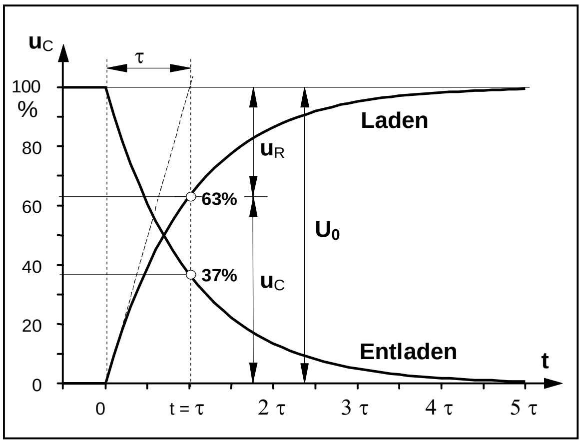
b) Einfluss des **Widerstandes R** (bei C = const.)



Die **Zeitdauer** des **Lade-** bzw. **Entlade**vorganges ist um so **länger**, je **größer** die **Kapazität C** des Kondensators und je **größer** der im Lade- bzw. Entladestromkreis wirksame **Widerstand R** ist.

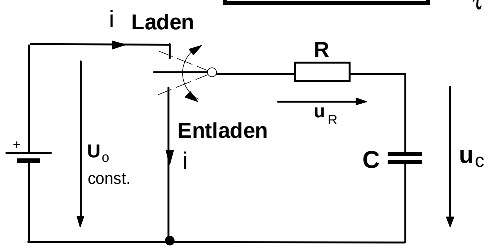
2. Die **Zeitkonstante** einer **RC-Schaltung**

Durch das Produkt "**R·C**" ist eine bestimmte **Zeitdauer** definiert, die für das Zeitverhalten der jeweiligen RC-Schaltung charakteristisch ist. Sie wird daher als **Zeitkonstante** τ (Tau) bezeichnet. In der Zeit **t =** τ ist die Kondensatorspannung u_C beim **Laden** auf ca. **63 %** der angelegten Ladespannung U_0 angestiegen bzw. beim **Entladen** auf ca. **37 %** der Anfangsspannung U_0 abgesunken. Jeder Kondensator ist nach einer Zeitdauer **t =** $5\,\tau$ nahezu vollständig **geladen** bzw. **entladen**.



• **Zeitkonstante**: $\boxed{\tau = R \cdot C}$

R Widerstand in Ω = V / A
C Kapazität in F = A s / V
τ Zeitkonstante in s



• Für die Spannungen gilt ***in jedem Augenblick***

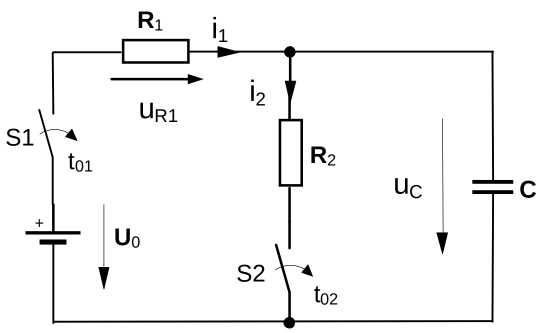
▶ beim **Laden**: $U_0 = u_R + u_C$, wobei stets $u_R = R \cdot i_C$ ist.

▶ beim **Entladen**: $0 = u_R + u_C \Rightarrow u_R = -u_C$

• Übungsaufgabe

Ein Kondensator mit **C = 100** µF wird über einen Ladewiderstand R_1 = **50** kΩ mit einer Gleichspannung U_0 = **50** V geladen (Kontakt **S1** wird im Zeitpunkt t_{01} geschlossen; **S2** ist geöffnet).

Anschließend soll er über einen Entladewiderstand R_2 in **15** Sekunden entladen werden (Kontakt **S1** ist geöffnet; **S2** wird im Zeitpunkt t_{02} geschlossen).



a) Stellen Sie den Verlauf der Spannungen u_C und u_{R1} während des **Ladens** in einem **Zeitdiagramm** dar. [τ = 5 s]

b) Wie groß muss der **Entladewiderstand** R_2 gewählt werden? [R_2 = 30 kΩ]

c) Wie groß ist der **Augenblickswert** des Entladestromes **2** s nach Beginn des Entladevorganges? [-0,86 mA]

d) Nach welcher **Zeit t** hat der Entladestrom den Wert i_C = **–1,0** mA erreicht? [t = 1,54 s]

- Kurzer Hinweis zum Begriff des **Logarithmus** (zu Übungsaufgabe **d)** von Seite 2)

Als **Logarithmus** einer Zahl **a** bezeichnet man den **Exponenten x**, mit dem eine vorher festgelegte **Basis**zahl **b** potenziert werden muss, um die gegebene Zahl **a** (den sog. **Numerus**) zu erhalten. Logarithmen sind nur für positive reelle Zahlen definiert, auch die Basis muss positiv sein. Das Ergebnis **x** des Logarithmierens gibt also an, mit welchem **Exponenten x** man die **Basis b** potenzieren muss, um den **Numerus a** zu erhalten.

Darstellung als Gleichung:

geg.: $\boxed{a = b^x}$ ges.: **x** = ? Lösung: $\boxed{x = \log_b a}$

a Numerus
b Basis
x Exponent

Gesucht wird beim Logarithmieren eine Zahl **x** (der **Exponent**), mit dem man eine gegebene **Basis b** potenzieren muss, um die ebenfalls gegebene Zahl **a** (den **Numerus**) zu erhalten.

1. Beispiel (einfach): geg.: **a** = 8 b = 2 ges.: **x** = $\log_2 8$ Lös.: **x = 3** Probe: $2^3 = 8$

In Worten: Potenziert man die Zahl 2 (**Basis**) mit der Zahl 3 (**Exponent**), so erhält man die Zahl 8 (**Numerus**). M.a.W.: Nimmt man die Zahl 2 dreimal mit sich selbst mal, so erhält man die Zahl 8.

2. Beispiel (schwierig): geg.: **a** = 8 **b** = 10 ges.: **x** = $\log_{10} 8$ Lös.: **x = 0,9031** Probe: $10^{0,9031} = 8$

Die Berechnung des Logarithmus einer Zahl ist sehr kompliziert (siehe: Wikipedia: Logarithmus). Hat man einen Taschenrechner zur Hand, ließe sich der gesuchte Exponent x zur Basiszahl 10 durch Probieren ermitteln, indem man die Zahl 10 nacheinander mit verschiedenen Exponenten potenziert (beginnend mit z.B. 0,8, also mit einer Zahl x < 1, denn es wäre $10^1 > 8$) oder indem man sie direkt mit der Logarithmus-Funktion des Taschenrechners (mit Taste $\boxed{\text{log}}$ 10) bestimmt. Als es noch keine Taschenrechner gab, verwendete man die mit Hilfe komplexer Berechnungen erstellten Logarithmentafeln.

Logarithmen mit speziellen Basen

Dekadischer Logarithmus mit der Zahl **10** als **Basis**, d.h. **b** = **10**:

geg.: $\boxed{a = 10^x}$ ges.: **x** = ? Lösung: $\boxed{x = \log_{10} a}$ vereinfachte Form: $\boxed{x = \lg a}$

Natürlicher Logarithmus: Natürliche Zahl **e** (auch Eulersche Zahl) als **Basis**, d.h. **b** = **e** (= 2,7183...):

geg.: $\boxed{a = e^x}$ ges.: **x** = ? Lösung: $\boxed{x = \log_e a}$ vereinfachte Form: $\boxed{x = \ln a}$

Formale Darstellung der Lösung einer Gleichung mit der **Unbekannten x als Exponenten** der Zahl **e**:

$a = e^x$ | ln ... Beide Seiten mit dem natürlichen Logarithmus logarithmiert.

$\ln a = \ln e^x$ Wenn **ln a = ln e^x** und gem. Definition **ln a = x**, dann ist auch auf der rechten Seite **ln e^x = x**.

$\ln a = x$ Beide Seiten vertauscht, ergibt als Lösung der Gleichung: $\underline{\underline{x = \ln a}}$

Kurzform: Wenn **a** = e^x , dann ist **x** = **ln a** . Probe: $e^{\ln a}$ = **a.** Zahlenwert mit Taschenrechner: Taste $\boxed{\text{ln}}$ a = x (Anzeige)

Anwendung auf **Übungsaufgabe d)** von Seite **2** des Arbeitsblattes Nr. 11 b)

$$i_C = -I_{02} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$-\frac{i_C}{I_{02}} = e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad \Big| \ln\ldots \text{ (beide Seiten logarithmiert)}$$

$$\ln\left(-\frac{i_C}{I_{02}}\right) = \ln e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad \Big| \text{ mit } \ln e^{-\frac{t}{\tau_2}} = -\frac{t}{\tau_2}$$

$$\ln\left(-\frac{i_C}{I_{02}}\right) = -\frac{t}{\tau_2} \quad \text{nach t aufgelöst, ergibt:} \Rightarrow$$

$$t = -\tau_2 \cdot \ln\left(-\frac{i_C}{I_{02}}\right)$$

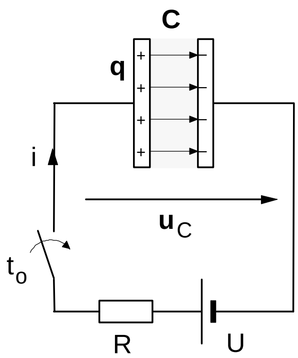
$$t = -3\,\text{s} \cdot \ln\left(-\frac{-1\,\text{mA}}{1{,}67\,\text{mA}}\right)$$

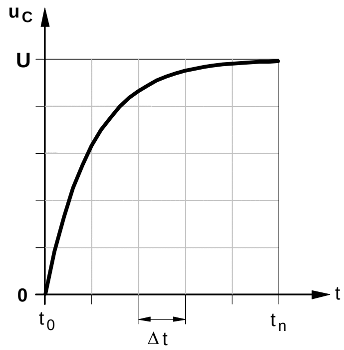
$$t = -3\,\text{s} \cdot \ln(0{,}5988) \quad \Big| \text{ mit Taschenrechner:}$$

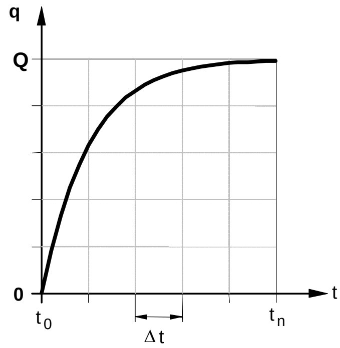
$$t = -3\,\text{s} \cdot (-0{,}5128) \quad \Big| \boxed{\ln}\ 0{,}5988 = -0{,}5128$$

$$\underline{\underline{t = 1{,}54\,\text{s}}}$$

- Wir gehen bei den folgenden Überlegungen davon aus, dass während des Ladevorganges in der Zeit von $\mathbf{t_o}$ bis $\mathbf{t_n}$ die Spannung an dem Kondensator von $\mathbf{u_c} = \mathbf{0}$ auf $\mathbf{u_c} = \mathbf{U}$ und die Ladung von $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ auf $\mathbf{q} = \mathbf{Q}$ steigt.





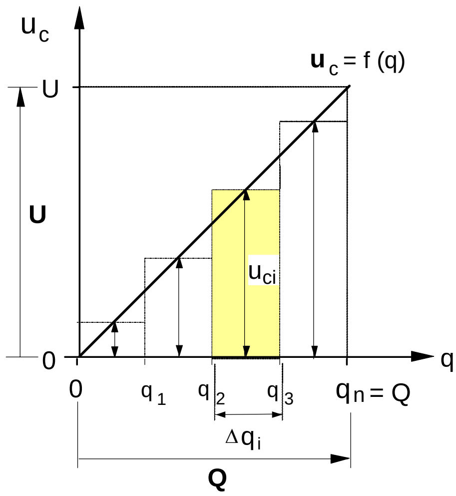


- Die Kondensatorspannung $\mathbf{u_c}$ ändert sich in Abhängigkeit von der Ladung **q** gemäß der Funktionsgleichung

$$u_c = \frac{1}{C} \cdot q$$

- Da **C** konstant ist, ist $\mathbf{u_c \sim q}$ und es ergibt sich für $\mathbf{u_c} = f(\mathbf{q})$ der in dem $\mathbf{u_C}$-**q**-Diagramm dargestellte **lineare** Zusammenhang zwischen Kondensatorspannung $\mathbf{u_c}$ und Ladung **q** im Kondensator.
- In jedem **Zeitabschnitt** $\mathbf{\Delta t}$ wird an den bewegten Ladungen in dem Ladestromkreis die **elektrische Arbeit**

$$\Delta W_i = u_{ci} \cdot i \cdot \Delta t$$



- verrichtet und in dem elektrischen Feld des Kondensators als **elektrische Feldenergie** $\mathbf{\Delta W_{i\,el}}$ gespeichert. Für die Energiezunahme $\mathbf{\Delta W_{i\,el}}$ in einem Zeitabschnit $\mathbf{\Delta t}$ gilt demnach:

$$u_{ci} \cdot i \cdot \Delta t = \Delta W_{i\,el}$$

- In der Ladezeit von $\mathbf{t_0}$ bis $\mathbf{t_n}$ wird dann **insgesamt** in dem Kondensator folgende elektrische Feldenergie gespeichert :

$$W_{el} = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_{i\,el} \quad \text{mit} \quad \Delta W_{i\,el} = u_{ci} \cdot i \cdot \Delta t$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_{ci} \cdot i \cdot \Delta t \quad \text{mit} \quad i = \frac{\Delta q_i}{\Delta t}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_{ci} \cdot \frac{\Delta q_i}{\Delta t} \cdot \Delta t \quad \text{ergibt sich :}$$

($\mathbf{\Delta q_i}$ ist die Ladungszunahme in der Zeit $\mathbf{\Delta t}$.)

$$\boxed{W_{el} = \sum_{i=1}^{n} u_{ci} \cdot \Delta q_i}$$

- Die Summanden $\mathbf{u_{ci} \cdot \Delta q_i}$ sind die Rechteckflächenstreifen im $\mathbf{u_C}$-**q**-Diagramm. Lässt man deren Breite $\mathbf{\Delta q_i} \to \mathbf{0}$ gehen bzw. deren Anzahl $\mathbf{n} \to \infty$, dann ist die Gesamtfläche aller Rechteckstreifen (Fläche unter der Treppenlinie) **flächengleich** der Dreiecksfläche unter dem Graphen der Funktion $\mathbf{u_c} = f(\mathbf{q})$, d.h.:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_{ci} \cdot \Delta q_i}_{\text{Fläche unter der Treppenlinie}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot U \cdot Q}_{\text{Dreieck-Fläche}}$$

- Damit können wir für die in dem elektrischen Feld eines **Kondensators** insgesamt gespeicherte elektrische Feldenergie folgende Formel angeben:

$$W_{el} = \frac{1}{2} \cdot U \cdot Q \quad \text{und mit} \quad Q = C \cdot U$$

ergibt sich für die **elektrische Feldenergie**:

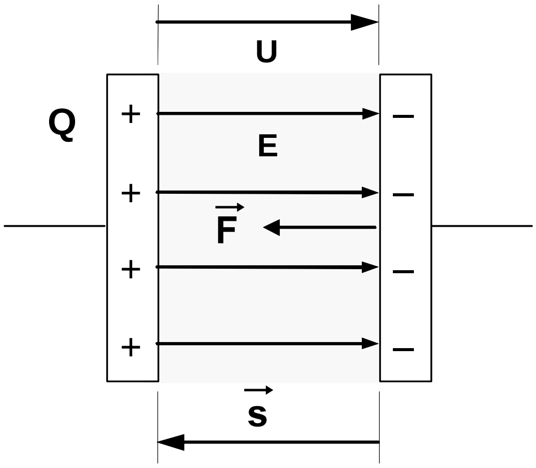
$$\boxed{W_{el} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2}$$

U ... Spannung am Kondensator in V
C ... Kapazität des Kondensators in As/V = F
W_{el} ... elektrische Energie in Ws

Erste Beispiele zur Anwendungung der Energieformel

$$W_{el} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

1. Anziehungskraft zwischen zwei Kondensatorplatten



Wir nehmen an, der nebenstehende Plattenkondensator sei auf die Spannung U aufgeladen worden. Nach Beendigung des Ladevorganges befindet sich auf jeder Platte die Ladung Q, jeweils gleichmäßig auf die Plattenfläche A verteilt. Der Plattenabstand sei d. Durch die Ladungen Q wird zwischen den Platten ein nach oben und unten scharf begrenztes homogenes elektrisches Feld mit der Feldstärke E erzeugt. Zwischen den Platten befindet sich Luft als Isolierstoff (Dieelektrizitätszahl $\varepsilon_r \approx 1$).

Die in dem elektrischen Feld des Kondensators gespeicherte Energie W_{el} könnte beispielsweise genutzt werden, um an der rechten Platten entlang des Weges s unter dem Einfluss der Kraft F die mechanische Arbeit W_{mech} zu verrichten. Wäre die linke Platte ortsfest angeordnet und damit unbeweglich, würde die rechte Platte unter dem Einfluss der Kraft F nach links beschleunigt, sofern sonst keine Kräfte entgegenwirken. Während der Bewegung der rechten Platte würde sich die Ladung Q und damit auch die Erregung D nicht verändern können. Damit bleibt auch die Feldstärke E konstant. Allerdings wird der Plattenabstand und damit auch die Spannung U kleiner.

Nach dem Energieerhaltungssatz gilt für die in mechanische Arbeit W_{mech} umgeformte elektrische Energie W_{el}:

$$W_{el} = W_{mech.}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = F \cdot s \qquad \text{mit } s = d \text{ und } C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot A}{d} \cdot U^2 = F \cdot d \qquad \text{nach F aufgelöst:}$$

$$(1)\quad F = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot A \cdot \frac{U^2}{d^2} \qquad \text{mit } U = E \cdot d$$

$$(2)\quad F = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot A \cdot E^2 \qquad \text{mit } E = \frac{D}{\varepsilon}$$

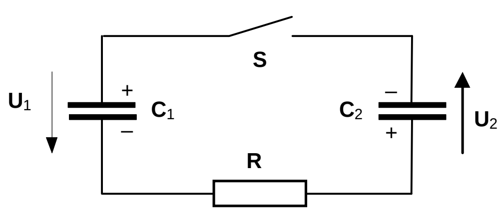
$$(3)\quad F = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \frac{D^2}{\varepsilon} \qquad \text{und mit } D = \frac{Q}{A} \text{ und } \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

Damit ergibt sich für die Berechnung der Kraft F zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten folgende Formel:

$$\boxed{F = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}}$$ bzw. gemäß Gleich. (1) $$\boxed{F = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot A \cdot \frac{U^2}{d^2}}$$

2. Energieumwandlung beim Parallelschalten von 2 geladenen Kondensatoren

Die beiden nebenstehenden Kondensatoren mit den Kapazitäten $\mathbf{C_1}$ = **100** nF und $\mathbf{C_2}$ = **60** nF sind geladen. Die Spannungen betragen $\mathbf{U_1}$ = **100** V und $\mathbf{U_2}$ = **100** V, allerdings ist der rechte Kondensator umgekehrt geladen.



a) Welche Spannung **U** liegt an den Kondensatoren, wenn diese nach dem Schließen des Schalters **S** umgeladen worden sind? [U = 25 V]

b) Welche Energie Δ**W** wird während des Umladevorganges in dem Widerstand **R** der Verbindungsleitungen in Wärme umgesetzt? [ΔW = 0,75 mWs]

Hinweis: Es werden hier nur die Voraussetzungen und das Resultat des Umladevorganges rein energetisch betrachtet. Physikalische Einzelheiten des Umladevorganges selbst sollen hier nicht weiter untersucht werden.

- Vor dem Schließen des Schalters S (und damit vor dem Umladen) gilt:
  - Ladungen

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1 = 100 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 100\ \text{V} = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{As}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot U_2 = 60 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 100\ \text{V} = 0{,}6 \cdot 10^{-5}\ \text{As}$$

  - Summe der elektrischen Feld-Energien in den Kondensatoren vor dem Umladen

$$W = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_1^{\,2} + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot U_2^{\,2}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot (100\ \text{V})^2 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot (100\ \text{V})^2$$

$$W = 8 \cdot 10^{-4}\ \text{Ws}$$

- Nach dem Schließen von S und nach Beendigung des Umladevorganges gilt:

  Nach Beendigung des Umladevorganges fließt kein Strom mehr. Deshalb könnte in dem Ersatzschaltbild für diesen Zustand der Widerstand R entfallen und die Kondensatoren können als reine Parallelschaltung angenommen werden.

  - Gesamtkapazität der parallelgeschalteten Kondensatoren

$$G_{ges} = C_1 + C_2 = 100\ \text{nF} + 60\ \text{nF}$$

$$C_{ges} = 160\ \text{nF}$$

  - Gesamtladung in beiden Kondensatoren

    Wegen der umgekehrten Polarität von Kondensator C_2 wird dessen Ladung als negativ angenommen.

$$Q_{ges} = Q_1 + (-Q_2) = Q_1 - Q_2$$

$$Q_{ges} = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{As} - 0{,}6 \cdot 10^{-5}\ \text{As}$$

$$Q_{ges} = 0{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{As}$$

  - Spannung U nach der Umladung

$$Q_{ges} = C_{ges} \cdot U \quad \Rightarrow \quad U = \frac{Q_{ges}}{C_{ges}} = \frac{0{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{As}}{160 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{As}}{\text{V}}}$$

$$\underline{\underline{U = 25\ \text{V}}}$$

  - Summe der elektrische Feldenergien in beiden Kondensatoren nach dem Umladen

$$W' = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U^2 + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot (C_1 + C_2) \cdot U^2$$

$$W' = \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot (25\ \text{V})^2$$

$$W' = 0{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{Ws}$$

- Energie ΔW, die während des Umladevorganges durch den Umladestrom in dem Widerstand R in Wärme umgewandelt wurde:

$$\Delta W = W - W' = 8{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{Ws} - 0{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{Ws}$$

$$\underline{\underline{\Delta W = 7{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{Ws}}}$$

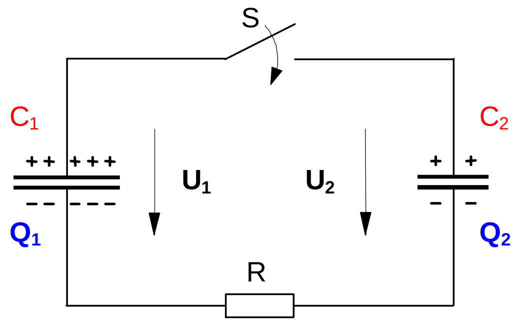
Ergänzende Hinweise zur **Energieumwandlung beim Parallelschalten von zwei Kondensatoren**

Werden zwei unterschiedlich geladene Kondensatoren parallel geschaltet, so findet zunächst ein Ladungsausgleich in Form eines **Umladevorganges** statt. Während dieses Umladevorganges, dessen Ablauf im einzelnen hier nicht näher betrachtet werden muss, fließt in den Verbindungsleitungen (mit dem Widerstand R) ein Strom. Dabei wird **ein Teil der elektrischen Feldenergie**, die vor dem Zusammenschalten in den Kondensatoren gespeichert war, in den Verbindungsleitungen **in Wärme** umgewandelt. Erst nach Beendigung des Umladevorganges sind die Kondensatoren parallel geschaltet, d.h. sie liegen an der gleichen Spannung. Wir wollen dazu im folgenden **drei Fälle** unterscheiden.

- Ladezustand der beiden Kondensatoren **vor dem Parallelschalten**
- Ladezustand der beiden Kondensatoren **nach Beendigung des Umladevorganges**

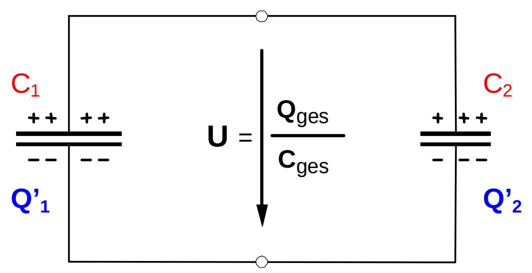
Fall 1: **Gleiche Polarität** der Kondensatorspannungen

Vor dem Parallelschalten: Annahmen: $\mathbf{U_1 > 0}$; $\mathbf{U_2 > 0}$ und $C_1 > C_2$



▶ Ladungen: $\mathbf{Q_1 = C_1 \cdot U_1}$ $\qquad$ $\mathbf{Q_2 = C_2 \cdot U_2}$

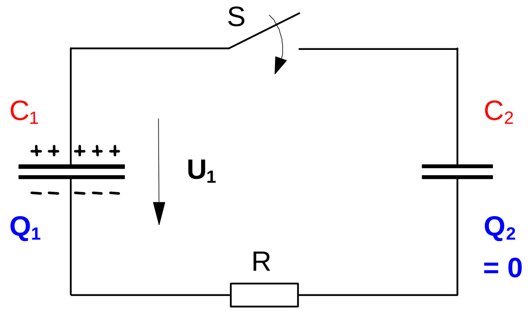
Nach Beendigung des Umladevorganges: Annahme: $\mathbf{U'_1 = U'_2 = U}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{C_{ges} = C_1 + C_2}$



▶ Gesamtladung: $\boxed{\mathbf{Q_{ges} = Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2}}$

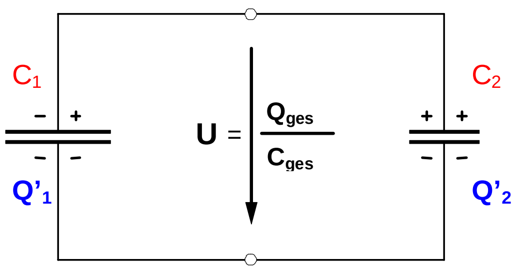
Fall 2: Nur **einer** der beiden Kondensatoren ist geladen

Vor dem Parallelschalten: Annahmen: $\mathbf{U_1 > 0}$; $\mathbf{U_2 = 0}$ und $C_1 > C_2$



▶ Ladungen: $\mathbf{Q_1 = C_1 \cdot U_1}$ $\qquad$ $\mathbf{Q_2 = 0}$

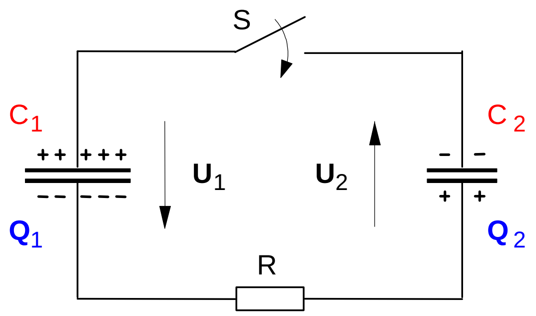
Nach Beendigung des Umladevorganges: Annahme: $\mathbf{U'_1 = U'_2 = U}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{C_{ges} = C_1 + C_2}$



▶ Gesamtladung: $\boxed{\mathbf{Q_{ges} = Q'_1 + Q'_2 = Q_1}}$

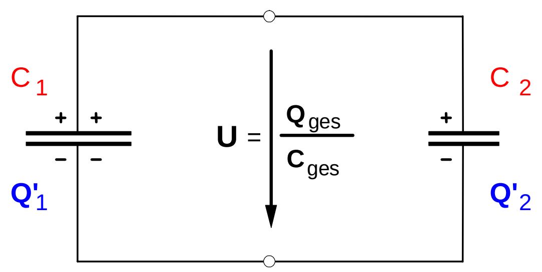
Fall 3: **Entgegengesetzte Polarität** der Kondensatorspannungen

Vor dem Parallelschalten: Annahmen: $\mathbf{U_1 > 0}$; $\mathbf{U_2 < 0}$ und $C_1 > C_2$



▶ Ladungen: $\mathbf{Q_1 = C_1 \cdot U_1}$ $\qquad$ $\mathbf{Q_2 = C_2 \cdot U_2}$

Nach Beendigung des Umladevorganges: Annahme: $\mathbf{U'_1 = U'_2 = U}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{C_{ges} = C_1 + C_2}$



▶ Gesamtladung: $\boxed{\mathbf{Q_{ges} = Q'_1 + Q'_2 = Q_1 - Q_2}}$

In allen drei Fällen gilt für die in den Kondensatoren gespeicherte **elektrische Feldenergie**:

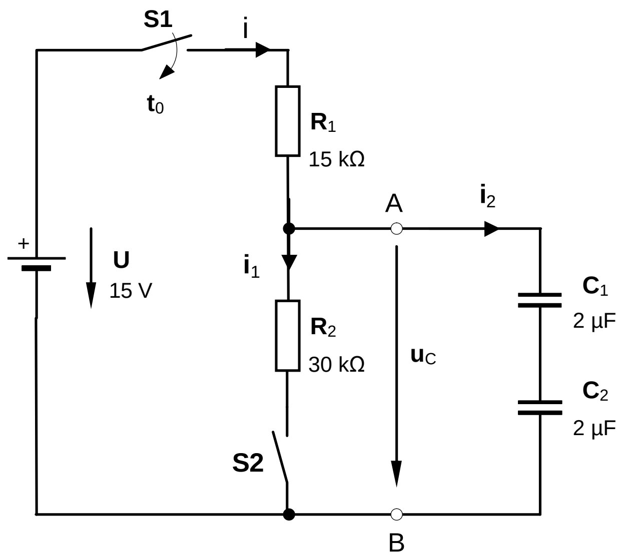
$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot \mathbf{U_1}^2 + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot \mathbf{U_2}^2 \qquad\qquad \mathbf{W'} = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot \mathbf{U}^2 + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot \mathbf{U}^2$$

Für den während des Umladevorganges in den Verbindungsleitungen **in Wärme** umgewandelten Energieanteil Δ**W** ergibt sich in allen drei Fällen: $\mathbf{\Delta W = W - W'}$

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1_ABl 8 bis 11.doc - 28.08.2021	
Arbeitsblatt Nr. **11 d)** : **Übungen** zum Thema **Laden** und **Entladen** von **Kondensatoren**		Seite **1**

1. Die Kondensatoren $\mathbf{C_1}$ und $\mathbf{C_2}$ in der nebenstehenden Schaltung werden nach dem Einschalten des Schalters **S1** mit einer **konstanten Spannung** **U** = **15** V aufgeladen.

Wie groß sind die Momentanwerte der Spannung $\mathbf{u_C}$ und des Stromes **i** genau **20** ms nach dem Schließen des Schalters **S1**,



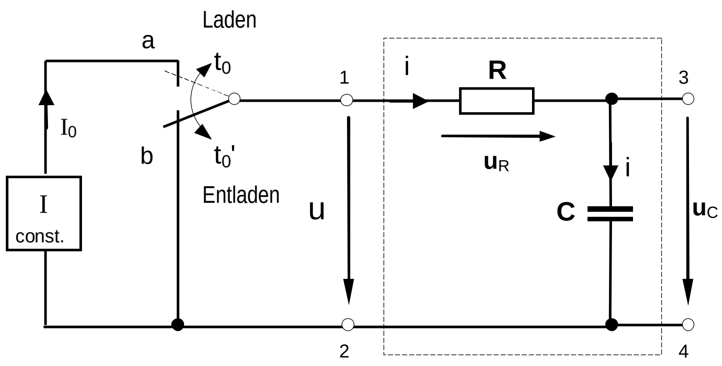
a) wenn der Schalter **S2** während des Ladens **geöffnet** ist, [u_C = 11,05 V ; i = 0,264 mA]

b) wenn **S2** während des Ladens **geschlossen** ist? [u_C = 8,65 V ; i = 0,423 mA]

c) Stellen Sie für den Fall **b)** die Zeitverläufe $\mathbf{i_C}$ = f(**t**) und **i** = f(**t**) der Ströme $\mathbf{i_C}$ und **i** in maßstäblichen Zeitdiagrammen dar.

---

2. Im Zeitpunkt $\mathbf{t_0}$ wird der nebenstehende Vierpol (**R** = **5** kΩ und **C** = **100** µF) mit Hilfe des Wechselschalters an eine Konstantstromquelle angeschlossen, die einen konstanten Ladestrom von I_0 = **2** mA liefert.



a) Berechnen Sie die Zeit $\mathbf{t_1}$, nach der die Spannung **u** den Wert **u** = **14** V erreicht hat. [t_1 = 0,2 s]

b) Wie groß ist im Zeitpunkt $\mathbf{t_1}$ die in dem Kondensator gespeicherte Ladung **q**? [q = 0,4 mAs]

c) Stellen Sie den zeitlichen Verlauf des Stromes **i** sowie der Spannungen **u**, $\mathbf{u_R}$ und $\mathbf{u_C}$ in der Zeit zwischen $\mathbf{t_0}$ = **0** s und $\mathbf{t_2}$ = **0,5** s in vier übereinander angeordneten Zeitdiagrammen dar.

d) Welche elektrische Energie liefert die Konstantstromquelle in der Zeit zwischen $\mathbf{t_0}$ und $\mathbf{t_2}$? Welcher Anteil wurde davon in Wärmeenergie und welcher in elektrische Feldenergie umgewandelt? [W = 15 mWs ; W_R = 10 mWs ; W_C = 5 mWs]

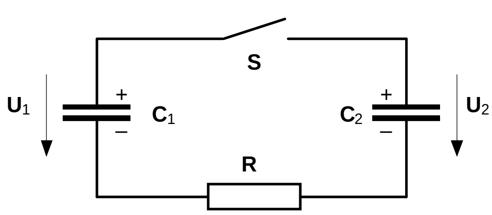
e) Im Zeitpunkt $\mathbf{t_2}$ = $\mathbf{t_0}$' wird der Wechselschalter wieder in die Stellung **b** zurückgeschaltet. Zu welchem Zeitpunkt $\mathbf{t_1}$' nach der Schalterrückstellung erreicht der **Entladestrom** den Wert **–1** mA ? [t_1' = 346 ms)

f) Wie groß ist im Zeitpunkt $\mathbf{t_1}$' die Kondensatorspannung $\mathbf{u_C}$? [u_C = 5 V]

g) Nach welcher Zeit $\mathbf{t_2}$' nach der Schalterrückstellung ist die Kondensatorspannung praktisch auf $\mathbf{u_C}$ = **0** V abgesunken. [t_2 = 2,5 s]

---

3. Die beiden nebenstehenden Kondensatoren mit den Kapazitäten $\mathbf{C_1}$ = **10** µF und $\mathbf{C_2}$ = **5** µF sind auf die Spannungen $\mathbf{U_1}$ = **120** V und $\mathbf{U_2}$ = **60** V aufgeladen.



a) Welche Spannung **U** liegt an den Kondensatoren, wenn diese durch Schließen des Schalters **S** parallelgeschaltet werden? [U = 100 V]

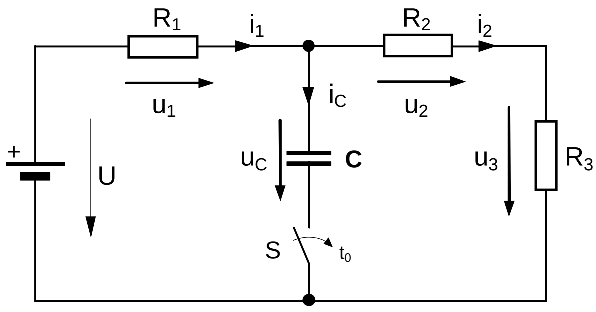
b) Welche Energie **W** wird während des Umladevorganges in dem Widerstand **R** der Verbindungsleitungen in Wärme umgesetzt? [W = 6 mWs]

4. Von der nebenstehenden RC-Schaltung sind folgende Daten bekannt:

U = 80 V **C = 4** µF

$\mathbf{R_1}$ **=1200** Ω $\mathbf{R_2}$ **= 240** Ω $\mathbf{R_3}$ **= 480** Ω .

Der vollständig entladene Kondensator **C** wird im Zeitpunkt $\mathbf{t_o}$ = **0** über den Schalter **S** zugeschaltet.



a) Stellen Sie den Zeitverlauf $\mathbf{u_C}$ =f (**t**) der Spannung am Kondensator in der Zeit von $\mathbf{t_o}$ = **0** bis **t** = **5 τ** in einem maßstäblichen Zeitdiagramm dar. [U_0 = 30 V ; τ = 1,8 ms]

b) Welchen Augenblickswert erreicht der Strom $\mathbf{i_1}$ in der Zeit **t** = **2** ms nachdem der Schalter S geschlossen worden ist ? [i_1 =49,9 mA]

Skizzieren Sie den **Zeitverlauf** $\mathbf{i_1}$ =f (**t**) des Stromes $\mathbf{i_1}$ in einem maßstäblichen Zeitdiagramm dar!

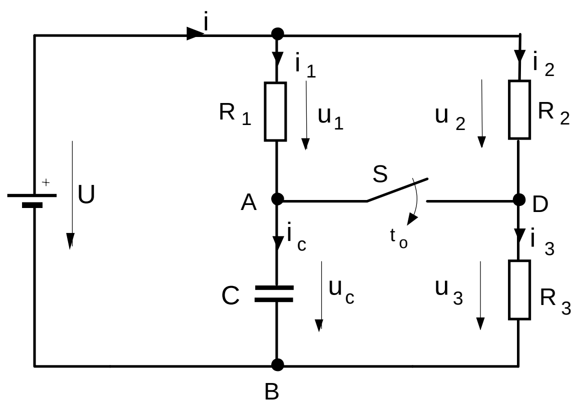
c) In welcher Zeit **t** nach dem Schließen des Schalters S erreicht die Spannung an dem Widerstand $\mathbf{R_3}$ den Wert $\mathbf{u_3}$ =**15** V **?** [t =2,5 ms]

---

5. Gegeben sei die nebenstehende Schaltung mit folgenden Bauelementen:

U =**250** V **C** =**1,0** µF

$\mathbf{R_1}$ =**1,2** kΩ $\mathbf{R_2}$ =**2,0** kΩ $\mathbf{R_3}$ =**500** Ω .



- Um den Kondensator **C** zu **Laden**, wurde die abgebildete RC-Schaltung zunächst bei geöffnetem Schalter S an die Spannungsquelle mit der konstanten Spannung **U =250** V angeschlossen.

  a) Mit welcher Zeitkonstanten τ_L ist der **Ladevorgang** abgelaufen **?** [τ_L=1,2 ms]

  b) Wie groß sind $\mathbf{u_C}$, $\mathbf{i_3}$ und $\mathbf{u_{AD}}$ am Ende des Ladevorganges **?** [u_C = 250 V ; i_3 =0,1 A ; u_{AD} = 200 V]

- Nach Beendigung des Ladevorganges soll der Kondensator wieder teilweise **entladen** werden. Dazu wird der Schalter S im Zeitpunkt $\mathbf{t_O}$ geschlossen.

  c) Wie groß sind $\mathbf{u_C}$, $\mathbf{i_3}$ und $\mathbf{u_{AD}}$ im Zeitpunkt $\mathbf{t_o}$ **?** [u_C = 250 V ; i_3 =0,5 A ; u_{AD} = 0 V]

  d) Mit welcher Zeitkonstanten τ_E wird der Kondensator entladen **?** [τ_E =0,3 ms]

  e) Welchen Endwerten nähern sich $\mathbf{u_C}$ und $\mathbf{i_3}$ während des Entladevorganges **?** [100V ; 0,2A]

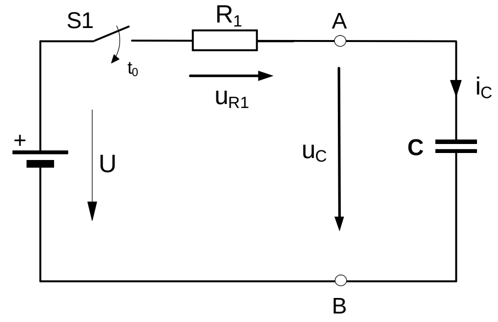
  f) Entwickeln Sie für den Entladevorgang die Zeitfunktionen $\mathbf{u_C}$ =f (**t**) und $\mathbf{i_3}$ =f (**t**) , und stellen Sie die Zeitverläufe $\mathbf{u_C}$ (**t**) und $\mathbf{i_3}$ (**t**) in maßstäblichen Zeitdiagrammen dar.
  [u_C =100 V +150 V · $e^{-t/\tau}$; i_3 =0,2 A +0,3 A · $e^{-t/\tau}$]

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 1.

a) Schalter S2 offen, d.h. $i = i_2$

Ersatzschaltbild zu a):



Gesamtkapazität: $C = \dfrac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{2\,\mu F \cdot 2\,\mu F}{2\,\mu F + 2\,\mu F} \Rightarrow \underline{\underline{C = 1\,\mu F}}$

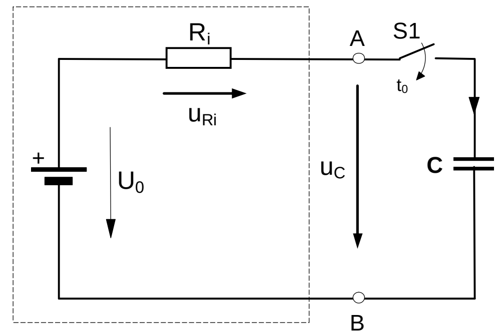
Kondensatorspannung nach 20 ms:

$$u_C = U \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ mit } \tau = R \cdot C = 15 \cdot 10^3\,\frac{V}{A} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\,\frac{As}{V} = 15\,ms$$

$$= 15\,V\,(1 - e^{-\frac{20\,ms}{15\,ms}}) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{u_C = 11{,}046\,V}}$$

b) Schalter S2 geschlossen, d.h. $i = i_C + i_2$

Ersatzschaltbild zu b):



Ersatzspannungsquelle:

$$R_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{15\,k\Omega \cdot 30\,k\Omega}{15\,k\Omega + 30\,k\Omega} \Rightarrow \underline{R_i = 10\,k\Omega}$$

$$U_0 = U_{AB0} = \frac{U}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = \frac{15\,V}{15\,k\Omega + 30\,k\Omega} \cdot 30\,k\Omega$$

$\underline{U_0 = 10\,V}$

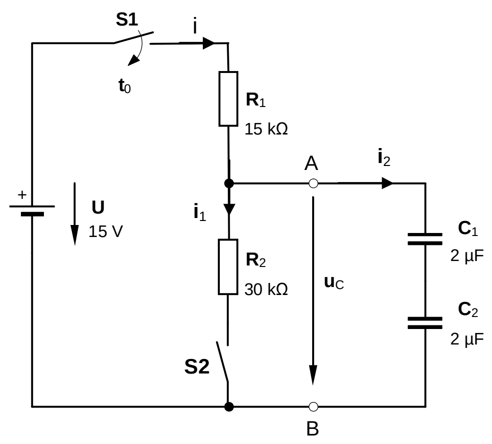
Kondensatorspannung und - strom nach 20 ms:

$$u_C = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ mit } \tau = R_i \cdot C = 10 \cdot 10^3\,\frac{V}{A} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\,\frac{As}{V} = 10\,ms$$

$$= 10\,V\,(1 - e^{-\frac{20\,ms}{10\,ms}}) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{u_C = 8{,}647\,V}}$$

$$i_C = i_2 = \frac{U_0 - u_C}{R_i} = \frac{10\,V - 8{,}647\,V}{10 \cdot 10^3\,\Omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{i_2 = 0{,}135\,mA}}$$

Ausgangsschaltbild zu b) und c):



Strom **i** nach 20 ms (zurück zum Ausgangsschaltbild):

$$i_1 = \frac{u_C}{R_2} = \frac{8{,}647\,V}{30\,k\Omega} = 0{,}288\,mA$$

$$i = i_1 + i_2 = 0{,}288\,mA + 0{,}135mA$$

$$\underline{\underline{i = 0{,}4233\,mA}}$$

c) **i** = f(t) bei geschlossenem Schalter S2

$$i = i_1 + i_2 \quad \text{mit} \quad i_1 = \frac{u_C}{R_2}$$

$$i = \frac{u_C}{R_2} + i_2 \quad \text{mit} \quad u_C = u_C = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{mit} \quad \tau = R_i \cdot C \quad \text{und} \quad U_0 = 10\,V \quad \text{und} \quad i_2 = i_C = \frac{U_0}{R_i} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = \frac{U_0}{R_2} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{U_0}{R_i} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Zeitverläufe der Ströme beim Laden der Kondensatoren: siehe nächste Seite

Zeitverlauf des Ladestromes $i_C = i_2 = f(t)$:

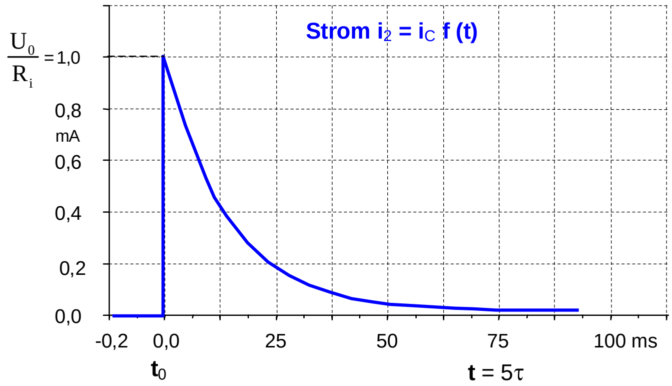
bei t = **0**:

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 \;\Rightarrow\; i_0 = \frac{U_0}{R_i} = \frac{10\ \text{V}}{10\ \text{k}\Omega} = 1\ \text{mA}$$

bei t = **5** τ :

$$e^{-\frac{5\tau}{\tau}} \approx 0 \;\Rightarrow\; i_{5\tau} = \frac{U_0}{R_i} \cdot 0 = 0$$

Zeitdiagramme zu Aufgabe 1. c):



Zeitverlauf des Stromes i = f(t) :

bei t = **0**:

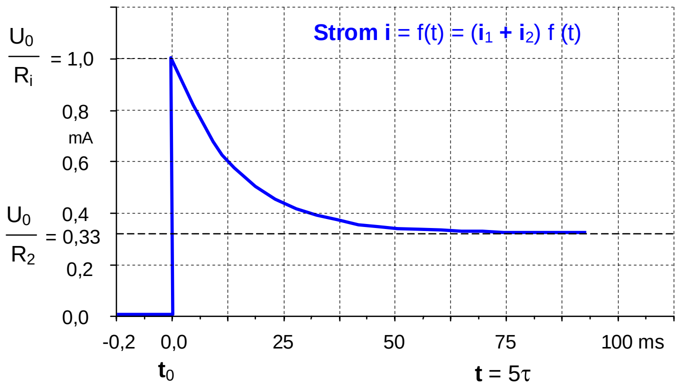
$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 \;\Rightarrow\; i_0 = 0 + \frac{U_0}{R_i} = 0 + 1\ \text{mA} = 1\ \text{mA}$$

wobei $\frac{U_0}{R_i} = \frac{10\ \text{V}}{10\ \text{k}\Omega} = 1\ \text{mA}$

bei t = **5** τ :

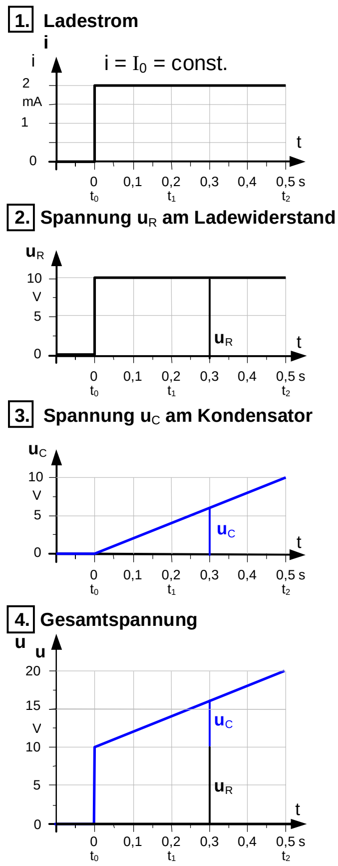
$$e^{-\frac{5\tau}{\tau}} \approx 0 \;\Rightarrow\; i_{5\tau} = \frac{U_0}{R_2} + 0 = 0{,}33\ \text{mA} + 0$$

wobei $\frac{U_0}{R_2} = \frac{10\ \text{V}}{30\ \text{k}\Omega} = 0{,}33\ \text{mA}$



Lösung zu Aufgabe **2.**

Zeitdiagramme zu Aufgabe 2. c):



a) Laden mit I_0 = const.: Nach welcher Ladezeit t_1 erreicht u = 14 V?

$$u = u_R + u_C = I_0 \cdot R + \frac{I_0}{C} \cdot t_1$$

$$t_1 = \frac{(u - I_0 \cdot R) \cdot C}{I_0} = \frac{(14\ \text{V} - 2\ \text{mA} \cdot 5\ \text{k}\Omega) \cdot 100 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{As}}{\text{V}}}{2\ \text{mA}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{t_1 = 0{,}2\ \text{s}}}$$

b) Ladung **q** im Zeitpunkt t_1?

$q = C \cdot u_C$ wobei $u_C = \frac{I_0}{C} \cdot t_1 = \frac{2\ \text{mA}}{100\ \mu\text{F}} \cdot 0{,}2\ \text{s} = 4\ \text{V}$

$$q = 100 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 4\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{q = 0{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{As}}}$$

c) Zeitdiagramme für t_0 = 0 bis t_2 = 0,5 s (siehe rechts)

Spannungen im Zeitpunkt t_1:

$u_R = I_0 \cdot R = 10\ \text{V}$ bzw. $u_C = 0\ \text{V}$ bzw. $u = 10\ \text{V} + 0\ \text{V} = 10\ \text{V}$

Spannungen im Zeitpunkt t_2:

$u_R = I_0 \cdot R = 10\ \text{V}$ bzw. $u_C = \frac{I_0}{C} \cdot t_2 = \frac{2\ \text{mA}}{100\ \mu\text{F}} \cdot 0{,}5\ \text{s} = 10\ \text{V}$

$$u = u_R + u_C = 10\ \text{V} + 10\ \text{V} = 20\ \text{V}$$

d) Elektrische Energielieferung der Stromquelle von t_0 bis t_2 :

$$W_{ges} = W_R + W_C$$

$$W_R = U_R \cdot I_o \cdot t_2 = 10\,V \cdot 2\,mA \cdot 0{,}5\,s = 10\,mWs$$

$$W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C{}^2 = \frac{1}{2} \cdot 100\,\mu F \cdot (10\,V)^2 = 5\,mWs$$

$$W_{ges} = 10\,mWS + 5\,mWs \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{W_{ges} = 15\,mWs}}$$

e) Entladevorgang nach Umschaltung des Wechselschalters in Stellung b:

- Nach welcher Zeit t_1' erreicht der Entladestrom den Wert i = - 1mA ?

$$i = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t_1'}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = R \cdot C$$

$$\frac{i \cdot R}{-U_0} = e^{-\frac{t_1'}{R \cdot C}} \quad \text{mit} \quad i = -1\,mA$$

$$\frac{-1\,mA \cdot 5\,k\Omega}{-10\,V} = e^{-\frac{t_1'}{R \cdot C}}$$

$$0{,}5 = e^{-\frac{t_1'}{R \cdot C}} \quad \Big| \ln\ldots$$

$$\ln(0{,}5) = -\frac{t_1'}{R \cdot C}$$

$$t_1' = -R \cdot C \cdot \ln(0{,}5)$$

$$t_1' = -5\,k\Omega \cdot 100\,\mu F \cdot \ln(0{,}5) \quad = -0{,}5\,s \cdot (\ln 0{,}5)$$

$$t_1' = -0{,}5\,s \cdot (-0{,}693) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t_1' = 0{,}346\,s}}$$

f) Kondensatorspannung u_C = ? im Zeitpunkt t_1:

$$u_C = U_0 \cdot e^{-\frac{t_1'}{R \cdot C}} = 10\,V \cdot e^{-\frac{0{,}346\,s}{0{,}5\,s}} = 10\,V \cdot 0{,}5006$$

$$\underline{\underline{u_C = 5{,}006\,V \approx 5\,V}}$$

g) Nach welcher Entladezeit t_2' ist die Kondensatorspannung praktisch auf 0 V abgesunken:

$$t_2' = 5 \cdot \tau = 5 \cdot 0{,}5\,s \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t_2' = 2{,}5\,s}}$$

Lösung zu Aufgabe **3.**

a) Spannung U an beiden Kondesatoren nach Schließen von S :

- Die auf den Kondensatorplatten vor dem Schließen von Schalter S in den beiden Kondensatoren insgesamt gespeicherte Ladung Q_{ges} bleibt auch nach dem Umladevorgang und dem damit verbundenen Potentialausgleich erhalten. Für die insgesamt in beiden Kondensatoren vor Schließen des Schalters S gespeicherte Ladungsmenge gilt:

$$Q_{ges} = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2 = 10 \cdot 10^{-6} F \cdot 120\,V + 5 \cdot 10^{-6} F \cdot 60\,V$$

$$\underline{Q_{ges} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,As = 1{,}5\,mAs}$$

- Nach dem Schließen des Schalters und der Beendigung des Umladevorgangs sind die Kondensatoren parallelgeschaltet und für die Gesamzkapazität gilt:

$$C_{ges} = C_1 + C_2 = 10\,\mu F + 5\,\mu F \quad \Rightarrow \quad \underline{C_{ges} = 15\,\mu F}$$

- Spannung nach Beendigung des Umladevorganges:

$$U = \frac{Q_{ges}}{C_{ges}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{As}}{15 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{As}}{\text{V}}} \Rightarrow \underline{\underline{U = 100\ \text{V}}}$$

b) Energiebilanz und Energieumwandlung in R:

- Vor Beginn des Umladevorganges ist in den Kondensatoren insgesamt folgende elektrische Feldenergie gespeichert:

$$W_{ges} = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_1{}^2 + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot U_2{}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot (120\,\text{V})^2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot (60\,\text{V})^2$$

$$\underline{W_{ges} = 81 \cdot 10^{-3}\,\text{Ws} = 81\,\text{mWs}}$$

- Nach Beendigung des Umladevorganges ist in den Kondensatoren insgesamt folgende elektrische Feldenergie gespeichert:

$$W_{ges}' = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U^2 + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot (100\,\text{V})^2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot (100\,\text{V})^2$$

$$\underline{W_{ges}' = 75 \cdot 10^{-3}\,\text{Ws} = 75\,\text{mWs}}$$

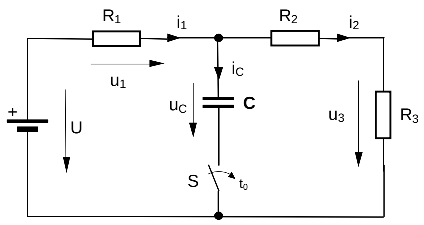
- Aus der Differenz der beiden Energien ergibt sich die während des Umladevorganges in dem Leitungswiderstand R in Wärme umgesetzte Energie:

$$\Delta W = W_{ges} - W_{ges}' = 81\ \text{mWs} - 75\ \text{mWs}$$

$$\underline{\underline{\Delta W = 6\,\text{mWs}}}$$

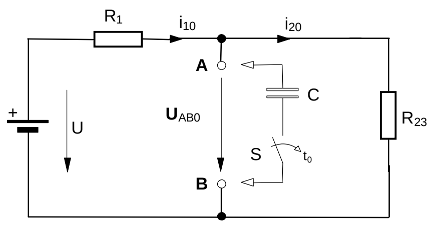
Lösung zu Aufgabe **4.** **U = 80** V **C = 4** µF

R_1 = 1 200 Ω **R_2 = 240** Ω **R_3 = 480** Ω



a) Zeitverlauf u_C = f (**t**) der Kondensatorspannung beim Laden

- **Ersatzspannungsquelle**

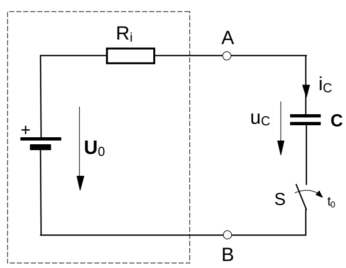


$$U_0 = U_{AB0} = I_{20} \cdot R_{23} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot (R_2 + R_3)$$

$$= \frac{80\,\text{V}}{1920\,\Omega} \cdot 720\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \underline{U_0 = 30\,\text{V}}$$

$$R_i = R_{AB0} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + (R_2 + R_3)} = \frac{1200\,\Omega \cdot (240\,\Omega + 480\,\Omega)}{1200\,\Omega + (240\,\Omega + 480\,\Omega)}$$

$$\underline{R_i = 450\,\Omega}$$



$$\tau = R_i \cdot C = 450\,\Omega \cdot 4\,\mu\text{F} \quad \Rightarrow \quad \underline{\tau = 1{,}8\,\text{ms}}$$

$$\underline{\underline{u_C = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 30\,\text{V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{1{,}8\,\text{ms}}}\right)}}$$

- **Zeitdiagramm**: siehe nächste Seite!

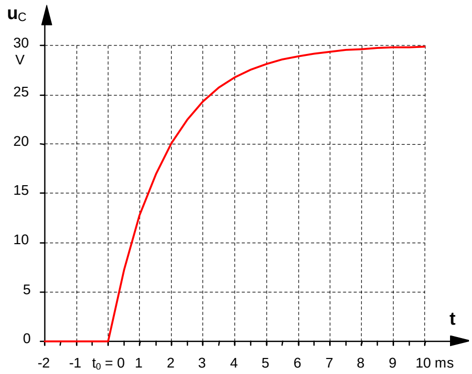
b) Augenblickswert des Stromes i_1 nach **t** = **2** ms

$$i_1 = i_C + i_2 = i_C + \frac{u_C}{R_2 + R_3} \quad \text{mit} \quad u_C = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

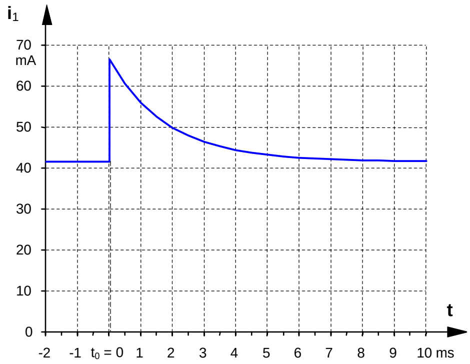
$$= \frac{U_0}{R_i} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{R_2 + R_3} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$= \frac{30\,\text{V}}{450\,\Omega} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{30\,\text{V}}{240\,\Omega + 480\,\Omega} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\underline{\underline{i_1 = 66{,}67\,\text{mA} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 41{,}67\,\text{mA} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}}$$



Zusatzaufgabe zu **b)** : $\mathbf{i_1}$ = f (**t**)



mit $t = 2{,}0\,\text{ms}$ und $\tau = 1{,}8\,\text{ms}$ ergibt sich dann:

$$i_{1_{t=2\,\text{ms}}} = 66{,}67\,\text{mA} \cdot e^{-\frac{2\,\text{ms}}{1{,}8\,\text{ms}}} + 41{,}67\,\text{mA} \cdot \left(1 - e^{-\frac{2\,\text{ms}}{1{,}8\,\text{ms}}}\right)$$

$$\underline{\underline{i_{1_{t=2\,\text{ms}}} = 49{,}9\,\text{ms}}}$$

- **Vor Beginn des Ladevorganges** ($t < t_0$) gilt für den Strom i_1 :

$$i_1 = i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{80\,\text{V}}{1920\,\Omega} = 41{,}67\,\text{mA}$$

c) Zeit t, in der die Spannung an R_3 den Augenblickswert $\mathbf{u_3 = 15\,V}$ erreicht.

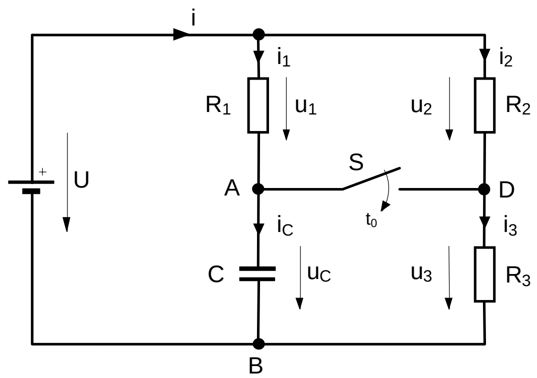
$$u_3 = R_3 \cdot i_2 = R_3 \cdot \frac{u_C}{R_2 + R_3} = R_3 \cdot \frac{U_0}{R_2 + R_3} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$15\,\text{V} = 480\,\Omega \cdot \frac{30\,\text{V}}{240\,\Omega + 480\,\Omega} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \Rightarrow \quad 15\,\text{V} = 20\,\text{V} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{15\,\text{V}}{20\,\text{V}} - 1 = -e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$0{,}25 = e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \Big| \ln\ldots$$

$$\ln 0{,}25 = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad t = -\tau \cdot \ln 0{,}25 = -1{,}8\,\text{ms} \cdot -1{,}386 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t = 2{,}495\,\text{ms}}}$$

Lösung zu Aufgabe 5. **U = 250** V **C = 1** µF $\mathbf{R_1 = 1{,}2}$ kΩ
$\mathbf{R_2 = 2{,}0}$ kΩ $\mathbf{R_3 = 500}$ Ω



- **Ladevorgang** (bei offenem Schalter S)

a) Zeitkonstante beim **Laden**

$$\tau_L = R_1 \cdot C = 1{,}2\,\text{k}\Omega \cdot 1{,}0\,\mu\text{F} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau_L = 1{,}2\,\text{ms}}}$$

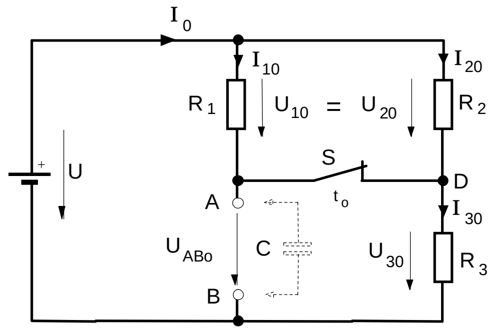
b) Wenn während des *Lade*vorganges $\mathbf{t} \to \infty$ geht, dann streben $\mathbf{u}_C$, $\mathbf{i}_3$ und $\mathbf{u}_{AD}$ gegen folgende **Endwerte**:

$$u_C = U \cdot (1 - e^{-t/\tau_L}) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{u_{C\infty} = U = 250\,V}}$$

$$i_{3\infty} = i_{2\infty} = \frac{U}{R_2 + R_3} = \frac{250\,V}{2{,}5\,k\Omega} = \text{const.} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{i_{3\infty} = I_3 = 0{,}1\,A}}$$

$$u_{AD\infty} = U_{AD} = u_{C\infty} - u_{R3\infty} = U - R_3 \cdot I_3 = 250\,V - 500\,\Omega \cdot 0{,}1\,A \;\Rightarrow\; \underline{\underline{U_{AD} = 200\,V}}$$

- Entladevorgang Schalter S wird im Zeitpunkt $t_{\infty 1} = t_{02} = 0$ geschlossen, nachdem der Kondensator zuvor in der Zeit von $\mathbf{t}_{01}$ bis $\mathbf{t}_{\infty 1} = \mathbf{t}_{02}$ auf **U** = **250** V aufgeladen worden war.



c) Im Zeitpunkt $\mathbf{t}_{02}$ = **0** gilt :

$$\underline{\underline{u_{C0} = U_{C0} = U = 250\,V}}$$

$$i_{30} = \frac{u_{C0}}{R_3} = \frac{U}{R_3} = \frac{250\,V}{500\,\Omega} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{i_{30} = 0{,}5\,A}}$$

u_{AD} "springt" in t_0 von $u_{AD\infty} = 200\,V$ auf $\underline{\underline{u_{AD0} = 0\,V}}$

d) Zeitkonstante beim **Entladen**

► *Innenwiderstand* $\mathbf{R}_i$ der *Ersatzspannungsquelle* – Bei kurzgeschlossener Spannungsquelle (U = 0) ist: $\mathbf{R}_1$ || $\mathbf{R}_2$ || $\mathbf{R}_3$:

$$R_i = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{1{,}2\,k\Omega} + \frac{1}{2{,}0\,k\Omega} + \frac{1}{0{,}5\,k\Omega}} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{R_i = 300\,\Omega}}$$

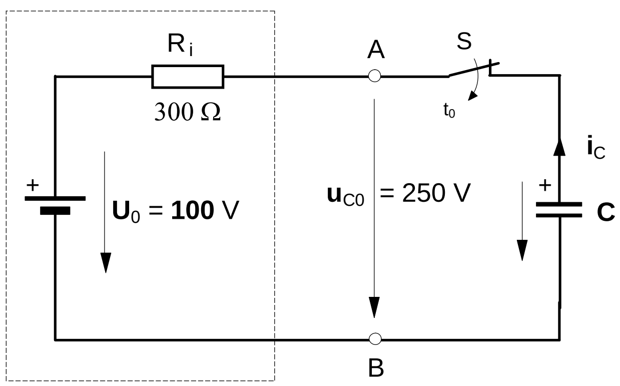
► *Quellenspannung* $\mathbf{U}_0$ der *Ersatzspannungsquelle* im Zeitpunkt t_0 = 0:

$$U_0 = U_{AB0} = U_{R3o} = R_3 \cdot I_{3o} = R_3 \cdot \frac{U}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = 0{,}5\,k\Omega \cdot \frac{250\,V}{\frac{1{,}2\,k\Omega \cdot 2{,}0\,k\Omega}{1{,}2\,k\Omega + 2{,}0\,k\Omega} + 0{,}5\,k\Omega}$$

$$\Rightarrow\; \underline{\underline{U_0 = 100\,V}}$$

Ersatzspannungsquelle für den **Zeitpunkt** $\mathbf{t}_{02}$ = 0

Der auf $\mathbf{u}_{C02}$ = **250** V aufgeladene Kondensator wird im Zeitpunkt t_{02} = 0 an die Klemmen A und B angeschlossen.



Zeitkonstante während des Entladens

$$\tau_E = R_i \cdot C = 300\,\Omega \cdot 1{,}0\,\mu F \;\Rightarrow\; \underline{\tau_E = 0{,}3\,ms}$$

e) Endwerte, denen $\mathbf{u}_C$ und $\mathbf{i}_3$ beim **Entladen** zustreben : Wenn $t \to \infty$, nähern sich $\mathbf{u}_C \to \mathbf{U}_{C\infty}$ und $\mathbf{i}_3 \to I_{3\infty}$

Der Entladevorgang endet, wenn $\mathbf{u}_C$ auf den Wert $\mathbf{u}_C$ = $\mathbf{U}_0$ = **100** V abgesunken ist, d.h. wenn die beiden Spannungen in dem obigen Stromkreis gleich groß geworden sind. Es gilt demnach: $\mathbf{U}_{C\infty}$ = $\mathbf{U}_0$ = **100** V.

In diesem Fall ist der Entladevorgang beendet, denn an $\mathbf{R}_i$ besteht keine Potentialdifferenz mehr und damit wird auch der Strom $\mathbf{i}_C$ = **0**.

Fortsetzung nächste Seite!

noch Lösung zu Aufgabe **5. e)**

Daraus folgt für den den Endwert des Stromes $\mathbf{i_3}$ gemäß dem Ausgangsschaltbild:

mit $\underline{\underline{U_{3\infty} = U_{C\infty} = 100\,V}}$ gilt für den Strom i_3:

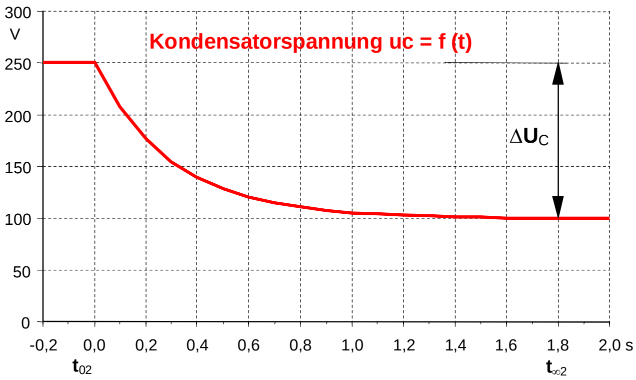
$$i_3 = I_{3\infty} = \frac{U_{3\infty}}{R_3} = \frac{U_{C\infty}}{R_3} = \frac{100\,V}{500\,\Omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{I_{3\infty} = 0{,}2\,A}}$$

f) Zeitfunktionen $\mathbf{i_3}$ = f (**t**) und $\mathbf{u_C}$ = f (**t**)

Gemäß der obigen Überlegungen zu **e)** sinkt während des Entladevorganges die Spannung $\mathbf{u_C}$ von $\mathbf{U_{C0}}$ = **250** V um die Differenz $\Delta\mathbf{U_C}$ = **150** V auf den stationären Endwert von $\mathbf{U_{C\infty}}$ = **100** V. Damit gilt für die Kondensatorspannung folgende Zeitfunktion:

$$u_C = \Delta U_c \cdot e^{-t/\tau_E} + U_{C\infty}$$

$$\underline{\underline{u_C = 150\,V \cdot e^{-t/\tau_E} + 100\,V}}$$



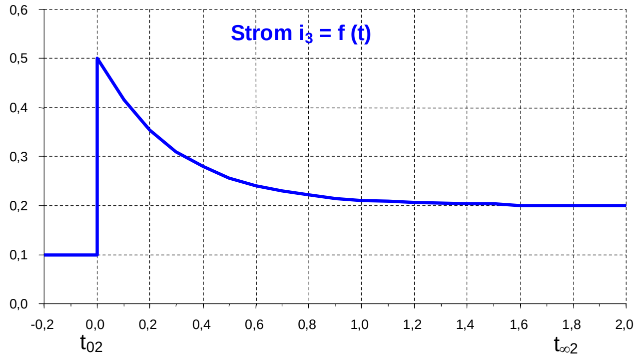
Für den Zeitverlauf des Stromes $\mathbf{i_3}$ ergibt sich wegen $\mathbf{u_3}$ = $\mathbf{u_C}$ gemäß Ausgangsschaltbild:

$$i_3 = \frac{u_C}{R_3} \quad \text{mit} \quad u_C = \Delta U_c \cdot e^{-t/\tau_E} + U_{C\infty}$$

$$i_3 = \frac{u_C}{R_3} = \frac{\Delta U_C \cdot e^{-t/\tau_E} + U_{C\infty}}{R_3}$$

$$= \frac{\Delta U_C}{R_3} \cdot e^{-t/\tau_E} + \frac{U_{C\infty}}{R_3} = \frac{150\,V}{500\,\Omega} \cdot e^{-t/\tau_E} + \frac{100\,V}{500\,\Omega}$$

$$\underline{\underline{i_3 = 0{,}3\,A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_E}} + 0{,}2\,A}}$$

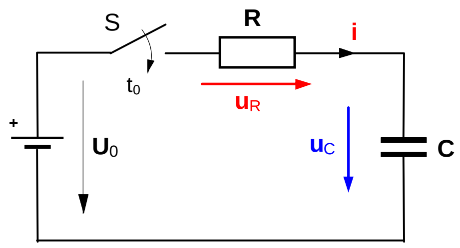


Demnach "springt" der Strom $\mathbf{i_3}$ im Zeitpunkt $\mathbf{t_{02}}$ von I_3 = **0,1** A auf **0,5** A und strebt dann gemäß einer e-Funktion allmählich dem Endwert von **0,2** A zu.

Nachtrag

Schaltvorgänge in RC-Schaltungen

Die Inhalte der folgenden Arbeitblätter 11 e), 11 f) und 11 g) können in der Klasse 12 der Fachoberschule sinnvollerweise erst als Nachtrag zum Themenfeld Elektrotechnik 1 im 2. Halbjahr behandelt werden, da hier Kenntnisse vorausgesetzt werden, wie sie im Mathematikunterricht üblicherweise erst in einer grundlegenden Einführung in die Differential- und Integralrechnung gegen Ende des 1. Halbjahres vermittelt werden.



- Nach dem Einschalten des Schalters S gilt in **jedem** Zeitpunkt**:**

$$U_0 = u_R + u_C \qquad \text{und mit} \qquad u_R = i \cdot R$$

$$U_0 = i \cdot R + u_C$$

- Annahme: Im Zeitpunkt $t_0 = 0$ sei $u_C = 0$. Damit gilt für **i** in t_0:

$$i_{t0} = \frac{U_0}{R} \qquad \text{und für } i_0 \approx i_{t0} \text{ bei } \Delta t \approx 0 \text{ (siehe Abb. 1)}$$

- In einem sehr kleinen **Zeitintervall Δt** ist :

$i \approx$ **konstant** (Mittelwert des Stromes in dem Zeitabschnitt Δt)

$\Delta Q = i \cdot \Delta t$ (mittlere Ladungszunahme in der Zeit Δt)

$\Delta u_C = \frac{\Delta Q}{C}$ (mittlere Spannungszunahme in der Zeit Δt)

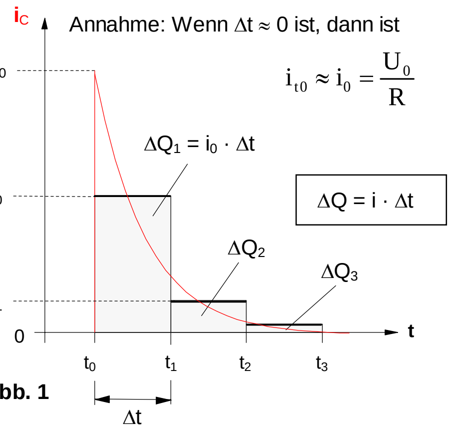


Abb. 1

- Für die **Spannung** u_R an dem Ladewiderstand **R** jeweils am **Ende eines Zeitabschnittes** gilt:

$$u_{Rn} = u_{Rn-1} - \Delta u_{cn} \qquad \text{(siehe Abb. 3)}$$

- Im **Zeitabschnitt** von t_o bis t_1 ist :

$$i_0 = \frac{U_0}{R} \qquad \text{und} \qquad \Delta Q_1 = i_0 \cdot \Delta t = \frac{U_0}{R} \cdot \Delta t$$

Damit gilt für die *Änderung* der Kondensatorspannung u_C :

$$\Delta u_{C1} = \frac{\Delta Q_1}{C} = \frac{i_0 \cdot \Delta t}{C} = \frac{U_0 \cdot \Delta t}{R \cdot C}$$

- Im ***Zeitpunkt*** t_1 gilt dann für die Spannung an **R** :

$$u_{R1} = U_0 - \Delta u_{C1} = U_0 - \frac{U_0 \cdot \Delta t}{R \cdot C} = U_0 \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{R \cdot C}\right)$$

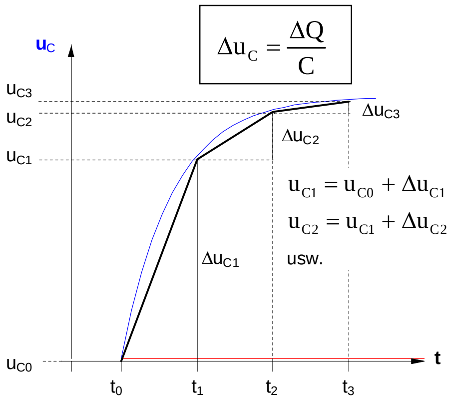


Abb. 2

- Im **Zeitabschnitt** von t_1 bis t_2 ist :

$$i_1 = \frac{u_{R1}}{R} \qquad \text{und} \qquad \Delta Q_2 = i_1 \cdot \Delta t = \frac{u_{R1}}{R} \cdot \Delta t$$

Damit gilt für die *Änderung* der Kondensatorspannung u_C :

$$\Delta u_{C2} = \frac{\Delta Q_2}{C} = \frac{i_1 \cdot \Delta t}{C} = \frac{u_{R1} \cdot \Delta t}{R \cdot C}$$

- Im ***Zeitpunkt*** t_2 gilt dann für die Spannung an **R** :

$$u_{R2} = u_{R1} - \Delta u_{C2} = u_{R1} - \frac{u_{R1} \cdot \Delta t}{R \cdot C} = u_{R1} \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{R \cdot C}\right)$$

mit $u_{R1} = U_0 \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{R \cdot C}\right)$ ergibt sich :

$$u_{R2} = U_0 \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{R \cdot C}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{R \cdot C}\right) = U_0 \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{R \cdot C}\right)^2$$

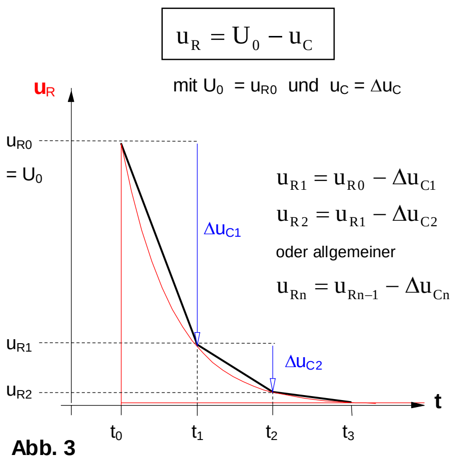


Abb. 3

- Wird in der Zeit **t = n · Δt** dieser Vorgang **n**-mal wiederholt, so ergibt sich mit $\Delta t = t / n$ für den in der Zeit **t** jeweils erreichten Augenblickswert der Spannung u_R an dem Ladewiderstand **R** die Gleichung (**1**) :

$$\boxed{u_{Rn} = U_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{n \cdot R \cdot C}\right)^n}$$

Gleichung 1

- Auf **Seite 1** ergab sich die Formel : $u_R = U_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{n \cdot R \cdot C}\right)^n$ Gleichung **(1)**

- Setzen wir in die Gleichung **(1)** für $-\frac{t}{n \cdot R \cdot C} = \frac{1}{m}$, so erhält die Gleichung **(1)** folgende Form :

$$u_R = U_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n \quad \text{mit} \quad n = -m \cdot \frac{t}{R \cdot C}$$

$$u_R = U_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-m \cdot \frac{t}{R \cdot C}}$$

$$u_R = U_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Gleichung **(2)**

- **Grenzwertbetrachtung** für $\Delta t \to 0$ bzw. $n \to \infty$ bzw. $m \to \infty$:

  Wenn $m \to \infty$ geht , dann nähert sich der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$

  der **Eulerschen Zahl e** = **2,71828**… . Daraus folgt, dass

  für $m \to \infty$ (bzw. $\Delta t \to 0$) gilt: $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$. Gleichung **(3)**

  (oder anders ausgedrückt : $\lim\limits_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$)

- Setzt man die Gleichung **(3)** in die Gleichung **(2)** ein, so erhalten wir für die zeitabhängige **Spannung u_R** an dem Ladewiderstand **R** während des Ladevorganges folgende Zeitfunktion :

$$u_R = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Gleichung **(4)**

- Mit $u_R = i \cdot R$ und $U_0 = I_0 \cdot R$ ergibt sich dann für den **Ladestrom** die Zeitfunktion :

$$\boxed{i = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}}$$

Gleichung **(5)**

- Da $u_c = U_0 - u_R$ ist , gilt dann mit Gleichung **(4)** für die Zeitfunktion der **Kondensatorspannung** :

$$u_C = U_0 - U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

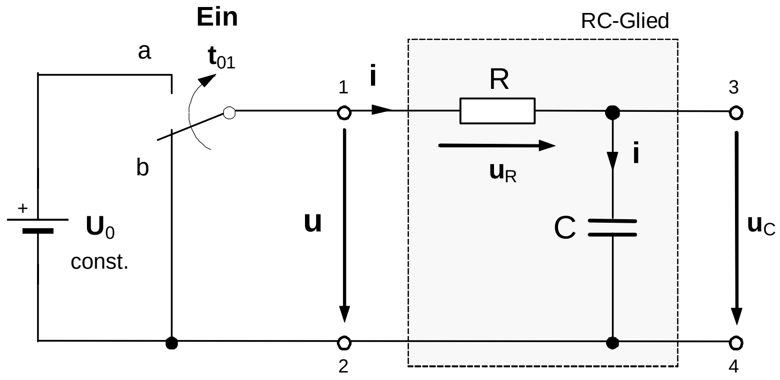
Wird U_0 ausgeklammert, so ergibt sich:

$$\boxed{u_C = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)}$$

Gleichung **(6)**

Arbeitsblatt Nr. **11 f)** : Ergänzungen zum Thema »**Laden und Entladen von Kondensatoren**«

1. **Laden** mit konstanter Spannung (**EIN**-Schaltvorgang)



- Nach dem Schließen des des Schalters im Zeitpunkt **t** = **t_{01}** = **0** beginnt der **Lade**-vorgang. In **jedem** Zeitpunkt dieses Vorgangs gilt die Maschenregel in der Form:

$$u = U_0 = u_R + u_C \quad \text{mit} \quad u_R = i \cdot R$$

- gilt dann $U_0 = i \cdot R + u_C$ **(1)**
- und mit $i = \dfrac{dq}{dt}$ lässt sich schreiben

$$U_0 = \frac{dq}{dt} \cdot R + u_C \qquad \textbf{(2)}$$

- Mit $q = C \cdot u_C$ ergibt sich: $\boxed{U_0 = C\dfrac{du_C}{dt} \cdot R + u_C}$ (**3**). Daraus folgt $U_0 - u_C = R \cdot C\dfrac{du_C}{dt}$ **(4)**
- Zur Lösung der **Differentialgleichung** (**3**) wird Gl. (**4**) zunächst nach d**t** aufgelöst

$dt = R \cdot C \cdot \dfrac{du_C}{U_0 - u_C}$. Danach werden beide Seiten integriert: $\int dt = R \cdot C \cdot \int \dfrac{1}{U_0 - u_C} du_C$ **(5)**

- Aus $\int dt = t$ und $\int \dfrac{1}{U_0 - u_C} du_C = -\ln(U_0 - u_C) + K$ folgt: $t = -R \cdot C \cdot \ln(U_0 - u_C) + K$ **(6)**
- Bestimmung der **Konstanten K** für die *Anfangsbedingung* **u_C** = **0** im *Zeitpunkt* **t** = **t_{01}** = **0** (in Gl. (6) eingesetzt):

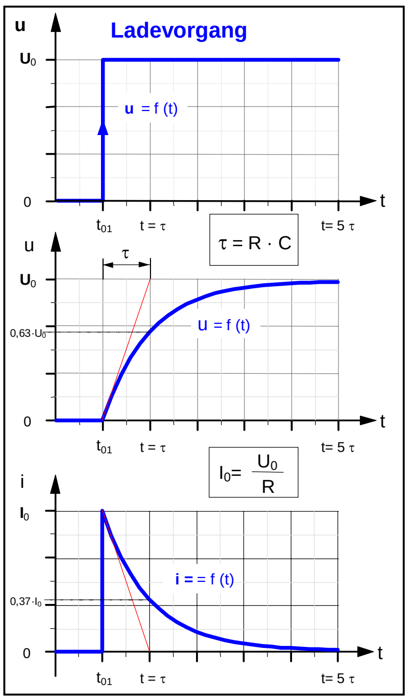
$0 = -R \cdot C \cdot \ln(U_0 - 0) + K \quad \Rightarrow$ Daraus folgt für die **Konstante K**: $\underline{K = R \cdot C \cdot \ln U_0}$ **(7)**

- Gleichung (**7**) wird jetzt in Gleichung (**6**) eingesetzt:

$$t = -R \cdot C \cdot \ln(U_0 - u_C) + R \cdot C \cdot \ln U_0 \quad \Rightarrow \quad t = -R \cdot C \cdot [\ln(U_0 - u_C) - \ln U_0] \qquad \textbf{(8)}$$

- Durch Umformung ergibt sich $-\dfrac{t}{R \cdot C} = \ln\left(\dfrac{U_0 - u_C}{U_0}\right)$ und aus der **Logarithmus**-Definition* folgt

$$e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = \frac{U_0 - u_C}{U_0} \quad \Rightarrow \quad U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U_0 - u_C \qquad \textbf{(9)}$$



- Damit gilt für die **Zeit-funktion** der **Spannung u_C** :

$$\boxed{u_C = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)}$$

wobei $U_0 = R \cdot I_0$ und $R \cdot C = \tau$

- Für den **Ladestrom i** gilt dann gemäß Gleichung (**1**):

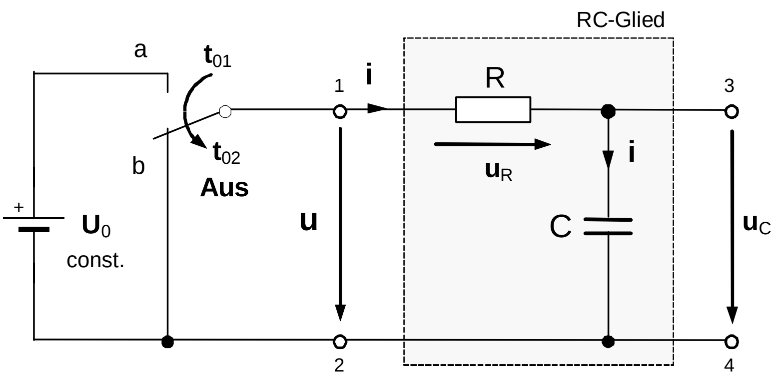
$$i = \frac{U_0 - u_C}{R} \quad \text{mit} \quad u_C = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}})$$

$$i = \frac{U_0 - U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}})}{R} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad \text{mit} \quad \frac{U_0}{R} = I_0$$

$$\boxed{i = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}}$$

* Wenn x = ℓn a, dann ist e^x = a.

2. **Entladen** mit konstanter Spannung (**AUS**-Schaltvorgang)



- Nach dem Schließen des Schalters im Zeitpunkt **t** = **t**$_{02}$ = **0** beginnt der **Entlade**-vorgang. In **jedem** Zeitpunkt dieses Vorgangs gilt die Maschenregel in der Form:

$$u = 0 = u_R + u_C \quad \text{mit} \quad u_R = i \cdot R$$

- gilt dann $0 = i \cdot R + u_C$ **(1)**

- und mit $i = \dfrac{dq}{dt}$ lässt sich schreiben

$$0 = \frac{dq}{dt} \cdot R + u_C \qquad \textbf{(2)}$$

- Mit $q = C \cdot u_C$ ergibt sich: $0 = C\dfrac{du_C}{dt} \cdot R + u_C$ **(3)** Daraus folgt: $u_C = -R \cdot C\dfrac{du_C}{dt}$ **(4)**

- Zur Lösung der **Differentialgleichung** (**3**) wird Gl. (**4**) zunächst nach d**t** aufgelöst

$dt = -R \cdot C \cdot \dfrac{du_C}{u_C}$. Danach werden beide Seiten integriert: $\int dt = -R \cdot C \cdot \int \dfrac{1}{u_C} du_C$ **(5)**

- Aus $\int dt = t$ und $\int \dfrac{1}{u_C} du_C = -\ln u_C + K$ folgt: $t = -R \cdot C \cdot \ln u_C + K$ **(6)**

- Bestimmung der **Konstanten K** für die *Anfangsbedingung* **u**$_C$ = **U**$_0$ im *Zeitpunkt* **t** = **t**$_{02}$ = **0** (in Gl. (6) eingesetzt):

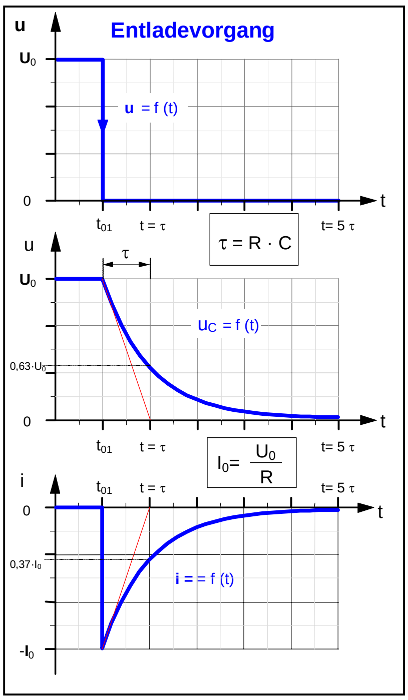
$0 = -R \cdot C \cdot \ln U_0 + K \quad \Rightarrow$ Daraus folgt für die **Konstante K**: $\underline{K = R \cdot C \cdot \ln U_0}$ **(7)**

- Gleichung (**7**) wird jetzt in Gleichung (**6**) eingesetzt:

$$t = -R \cdot C \cdot \ln u_C) + R \cdot C \cdot \ln U_0 \quad \Rightarrow \quad t = -R \cdot C \cdot [\ln u_C - \ln U_0] \qquad \textbf{(8)}$$

- Durch Umformung ergibt sich $-\dfrac{t}{R \cdot C} = \ln\left(\dfrac{u_C}{U_0}\right)$ und aus der **Logarithmus**-Definition* folgt:

$$e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = \frac{u_C}{U_0} \quad \Rightarrow \quad U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = u_C \qquad \textbf{(9)}$$



- Damit gilt für die **Zeitfunktion** der **Spannung u**$_C$:

$$\boxed{u_C = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}}$$

wobei $U_0 = R \cdot I_0$ und $R \cdot C = \tau$

- Für den **Entladestrom i** gilt dann gemäß Gleichung (**1**):

$$i = \frac{0 - u_C}{R} \quad \text{mit} \quad u_C = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

$$i = \frac{0 - U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}}{R} = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad \text{mit} \quad \frac{U_0}{R} = I_0$$

$$\boxed{i = -I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}}$$

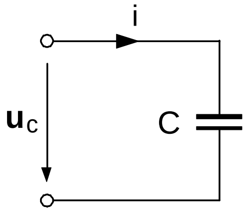
Das Minuszeichen verweist darauf, dass der Entladestrom entgegengesetzt zu der im Schaltbild angenommenen Richtung fließt.

---

* Wenn x = ℓn a, dann ist e^x = a.

3. **Laden** des Kondensators mit **konstantem Ladestrom** I_0

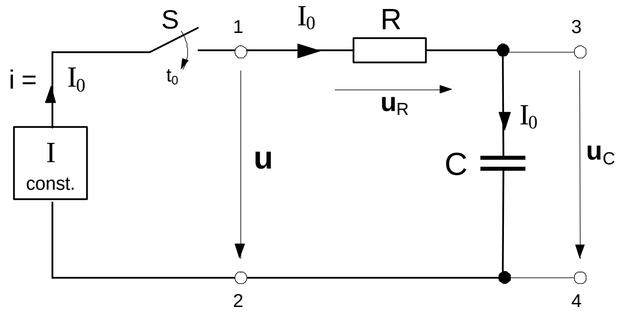
- **Vorbetrachtung** : Gesetze des Kondensators in Differential- und Integralform



$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{mit} \quad q = C \cdot u_C \Rightarrow i = \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} \Rightarrow i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$i \cdot dt = C \cdot du_C \Rightarrow \int i \cdot dt = \int C \cdot du_C \Rightarrow C \cdot \int du_C = \int i \cdot dt \Rightarrow \boxed{u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i\,dt}$$

- **Vierpol**-Darstellung der **RC-Reihenschaltung**



- **Allgemein** gilt für den RC-Vierpol in jedem Zeitpunkt während des Ladevorganges die Maschenregel:

$$u = u_R + u_C \qquad \textbf{(1)}$$

$$\text{mit} \quad u_R = i \cdot R \quad \text{und} \quad u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i\,dt \qquad \textbf{(2)}$$

$$\boxed{u = i \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int i\,dt} \qquad \textbf{(3)}$$

- Für den **Sonderfall**, dass der Kondensator mit Hilfe einer Konstantstromquelle mit einem konstanten Ladestrom I_0 geladen wird gilt dann gemäß Gleichung (**3**) mit i = I_0 = const.:

$$u = I_0 \cdot R + \underbrace{\frac{1}{C} \cdot \int I_0\,dt}_{= u_C} \qquad \textbf{(4)}$$

$$u_C = \frac{1}{C} \cdot \int I_0\,dt = \frac{I_0}{C} \cdot \int dt \Rightarrow u_C = \frac{I_0}{C} \cdot t + K \qquad \textbf{(5)}$$

- Bestimmung der **Konstanten K** für die Anfangsbedingung, daß der Kondensator im Einschaltmoment t_0 vollständig entladen war, d.h. im Moment **t** = t_0 = **0** war u_C = **0** :

$$0 = \frac{I_0}{C} \cdot 0 + K \Rightarrow \underline{K = 0} \qquad \textbf{(6)}$$

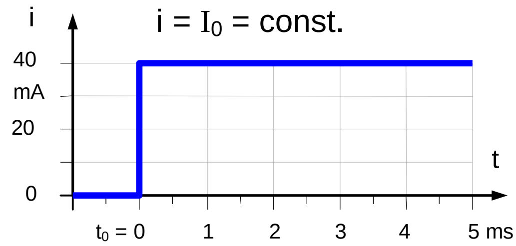
- Damit ergibt sich für die Zeitfunktion der **Gesamtspannung u** gemäß Gleichung (**4**) unter Berücksichtigung von (**5**) und (**6**):

$$\boxed{u = I_0 \cdot R + \frac{I_0}{C} \cdot t} \qquad \textbf{(7)}$$

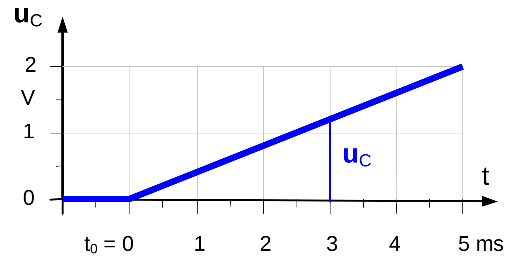
wobei mit $I_0 \cdot R = u_R$ und $\frac{I_0}{C} \cdot t = u_C$ die Teilspannungen an **R** bzw. **C** bestimmt sind.

- **Zeitdiagramme** des Ladevorganges bei **konstantem Ladestrom**

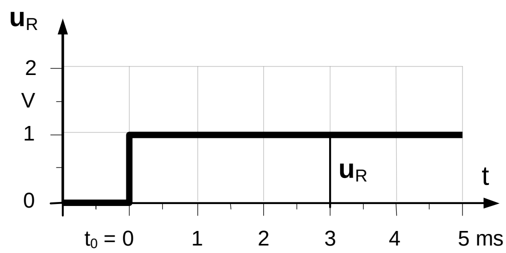
1. Ladestrom i



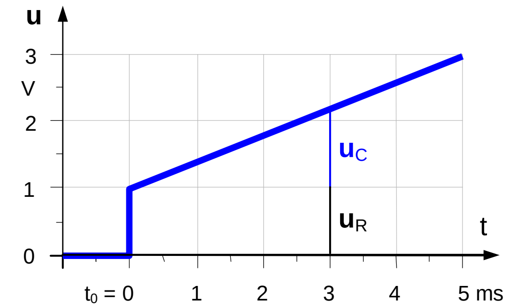
2. Spannung u_C am Kondensator



3. Spannung u_R am Ladewiderstand



4. Gesamtspannung u



4. Mathematische Ergänzung

Vereinfachter Beweis der Behauptung: Wenn **y = ln x** , dann ist **y' =** $\frac{1}{x}$.

- **Behauptung**: Wenn $\boxed{y = \ln\ x}$, dann ist $\boxed{y' = \frac{1}{x}}$.

- **Voraussetzungen**: **1.** Wenn $y = e^x$, dann ist $y' = e^x$ (1. Ableitung einer e-Funktion).

  2. Wenn $x = e^y$, dann ist $y = \ln\ x$ (Logarithmus-Definition).

- **Beweis**: $y = \ln\ x$ Gleichung (**1**)

- Gemäß der **Logarithmus-Definition** gilt dann auch:

$$x = e^y$$ Gleichung (**2**)

- Beide Seiten der Gleichung (**2**) werden getrennt **differenziert**:

$$\frac{d[x]}{dx} = \frac{d\left[e^{(y)}\right]}{dx}$$

$e^{(...)}$ ... äußere Funktion

y ... innere Funktion

Gleichung (**3**)

- linke Seite von Gleichung (**3**): $\frac{d[x]}{dx} = 1 \cdot x^{1-1} = 1$ Gleichung (3 **a**)

- rechte Seite von Gleichung (**3**): $\frac{d\left[e^{(y)}\right]}{dx} = \underbrace{e^{(y)}}_{\text{1. Ableitung der äußeren Funktion}} \cdot \underbrace{y'}_{\text{1. Ableitung der inneren Funktion}}$ Gleichung (3 **b**)

- Die rechten Seiten der Gleichungen (3 **a**) und (3 **b**) wieder gleichgesetzt, ergibt:

$$1 = e^y \cdot y'$$ Gleichung (**4**)

- Gleichung (**4**) nach **y'** umgestellt:

$$y' = \frac{1}{e^y}$$ Gleichung (**5**)

- Gemäß der Logarithmus-Definition in Gleichung (**2**) gilt auch:

$$e^y = x$$ Gleichung (**6**)

- Durch Einsetzen der Gleichung (**6**) in (**5**) ergibt sich:

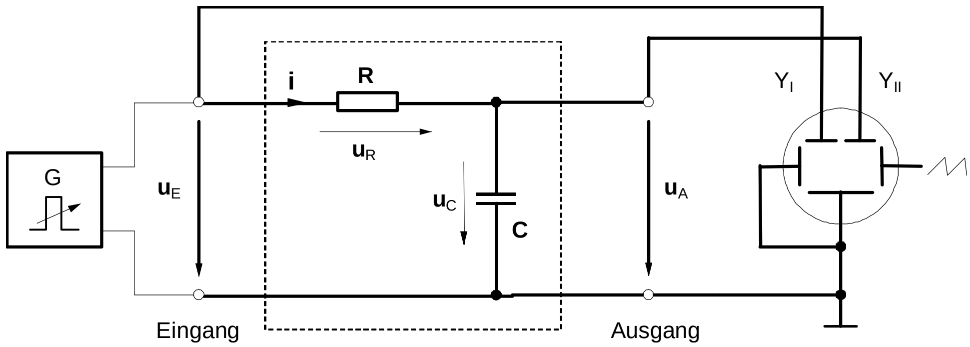
$$\boxed{y' = \frac{1}{x}}$$ **q.e.d.**

Damit konnte zugleich auch folgender Zusammenhang bewiesen werden:

$$\boxed{\text{Wenn } y = \frac{1}{x} \text{ , dann ist } Y = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x\ .}$$

Literaturhinweis: Lambacher/Schweizer, Analysis, Stuttgart o.J. (Klett Verlag), S. 127 (Vgl. auch S. 161)

1. **RC-Schaltung** als **Integrierglied**



u_E = **2** V_{SS} **R** = **4,7** kΩ **C** = **2** nF

a) Spannungszeitdiagramme bei relativ **niedriger Frequenz** (f = 10 kHz)

f = **10** kHz

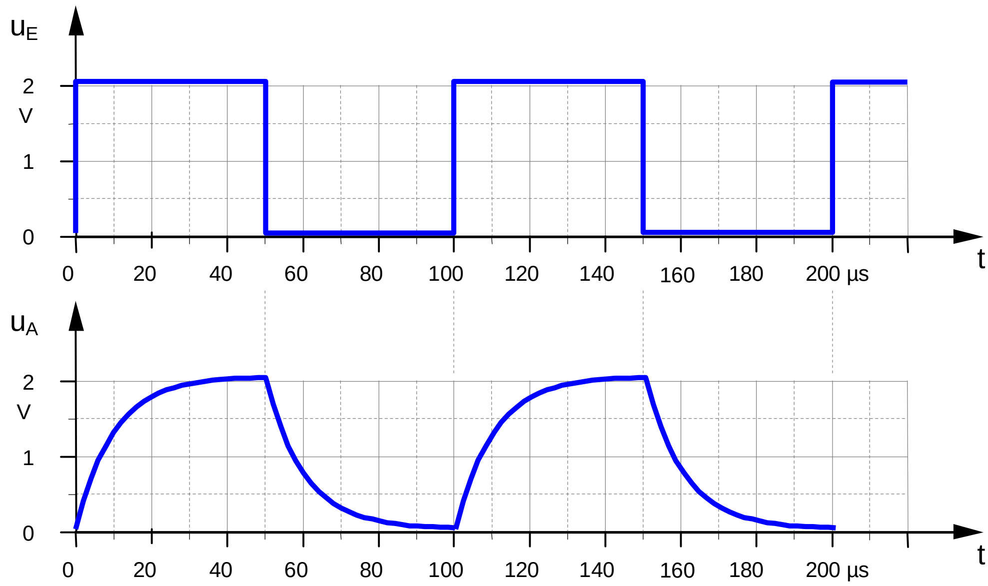
T = **100** µs

T/2 = **50** µs

τ = **9,4** µs

5τ = **47** µs

$$\boxed{\frac{T}{2} \approx 5 \cdot \tau}$$



b) Spannungszeitdiagramme bei relativ **hoher Frequenz** (f = 100 kHz)

f = **100** kHz

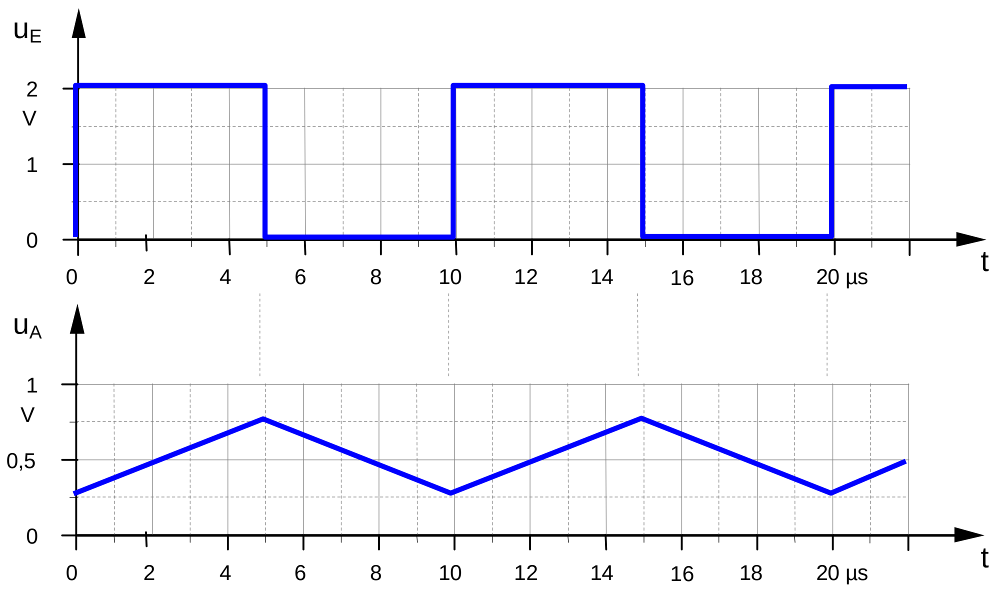
T = **10** µs

T/2 = **5** µs

τ = **9,4** µs

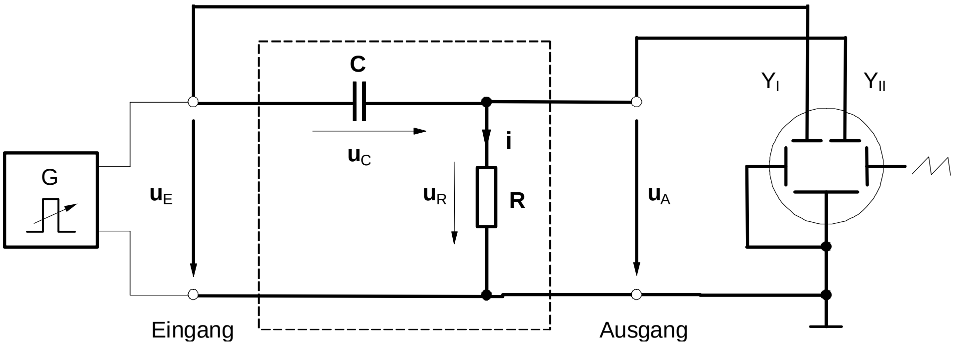
5τ = **47** µs

$$\boxed{\frac{T}{2} << 5 \cdot \tau}$$



1. Ermitteln Sie mit Hilfe des Oszilloskops die Zeitdiagramme der Eingangs- und Ausgangsspannung des Integriergliedes für die oben angegebenen Frequenzen.
2. Untersuchen, beschreiben und begründen Sie den Einfluss der Frequenz **f**, der Kapazität **C** und des Widerstandes **R** auf die Kurvenform der Ausgangsspannung u_A.

2. **RC-Schaltung** als **Differenzierglied**



u_E = **2** V_{SS} **R** = **4,7** kΩ **C** = **2** nF

a) Spannungszeitdiagramme bei relativ **niedriger Frequenz** (f = 10 kHz)

f = **10** kHz

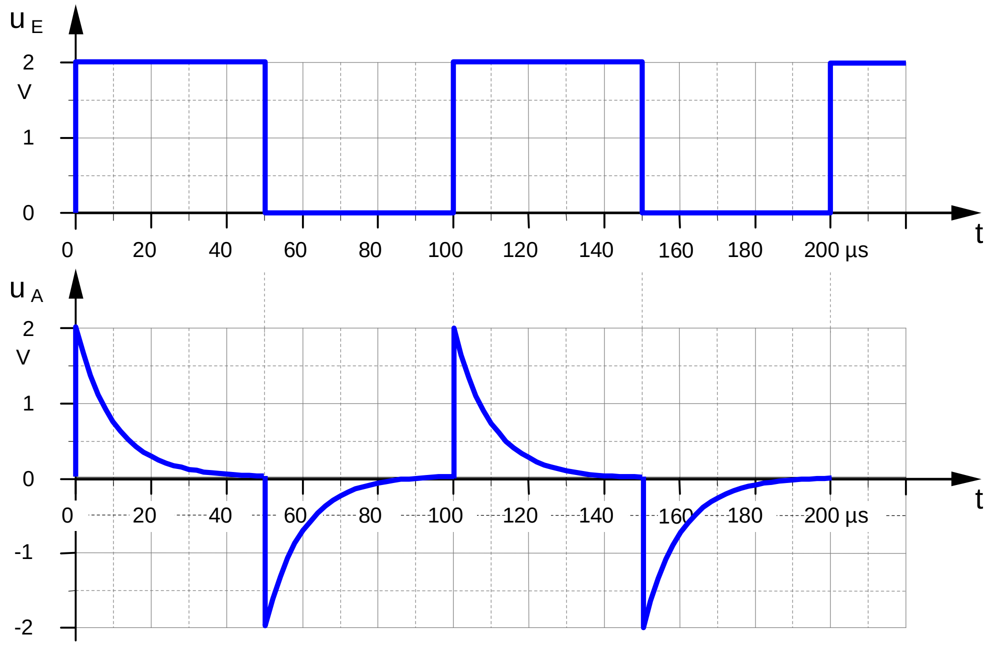
T = **100** µs

T/2 = **50** µs

τ = **9,4** µs

5τ = **47** µs

$$\boxed{\frac{T}{2} \approx 5 \cdot \tau}$$



b) Spannungszeitdiagramme bei relativ **hoher Frequenz** (f = 100 kHz)

f = **100** kHz

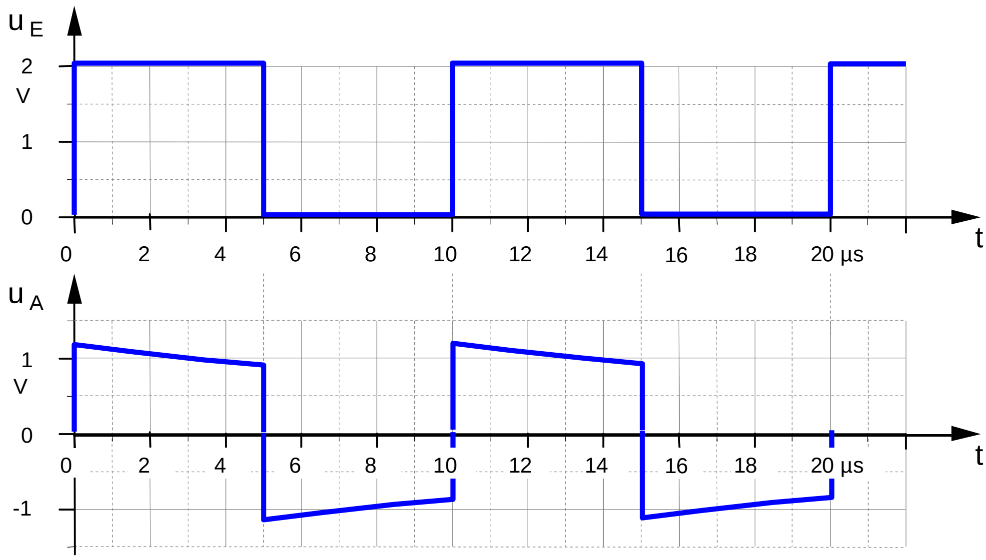
T = **10** µs

T/2 = **5** µs

τ = **9,4** µs

5τ = **47** µs

$$\boxed{\frac{T}{2} << 5 \cdot \tau}$$



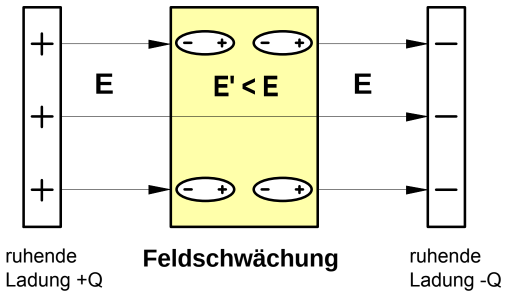
1. Ermitteln Sie mit Hilfe des Oszilloskops die Zeitdiagramme der Eingangs- und Ausgangsspannung des Differenziergliedes für die oben angegebenen Frequenzen.
2. Untersuchen, beschreiben und begründen Sie den Einfluss der Frequenz **f**, der Kapazität **C** und des Widerstandes **R** auf die Kurvenform der Ausgangsspannung $\mathbf{u}_A$.

1. Elektrostatisches Feld

Das elektrische Feld **ruhender Ladungen** bezeichnen wir als **elektrostatisches Feld** (stare (lat.): ruhen). Elektrostatische Felder können nur existieren, wenn sich zwischen den felderzeugenden Ladungen ein **Nichtleiter** befindet.

a) **Nichtleiter** (Vakuum) im elektrostatischen Feld

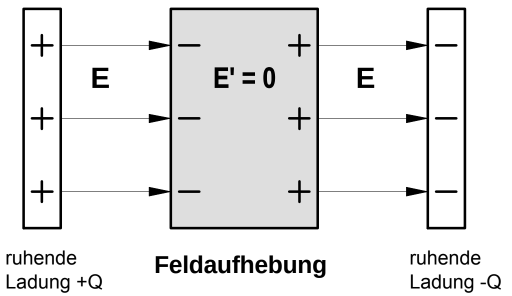
b) **Isolierstoff** im elektrostatischen Feld



Ladungsverschiebung im Isolierstoff durch

Polarisation

c) **Leiter** (Metall) im elektrostatischen Feld

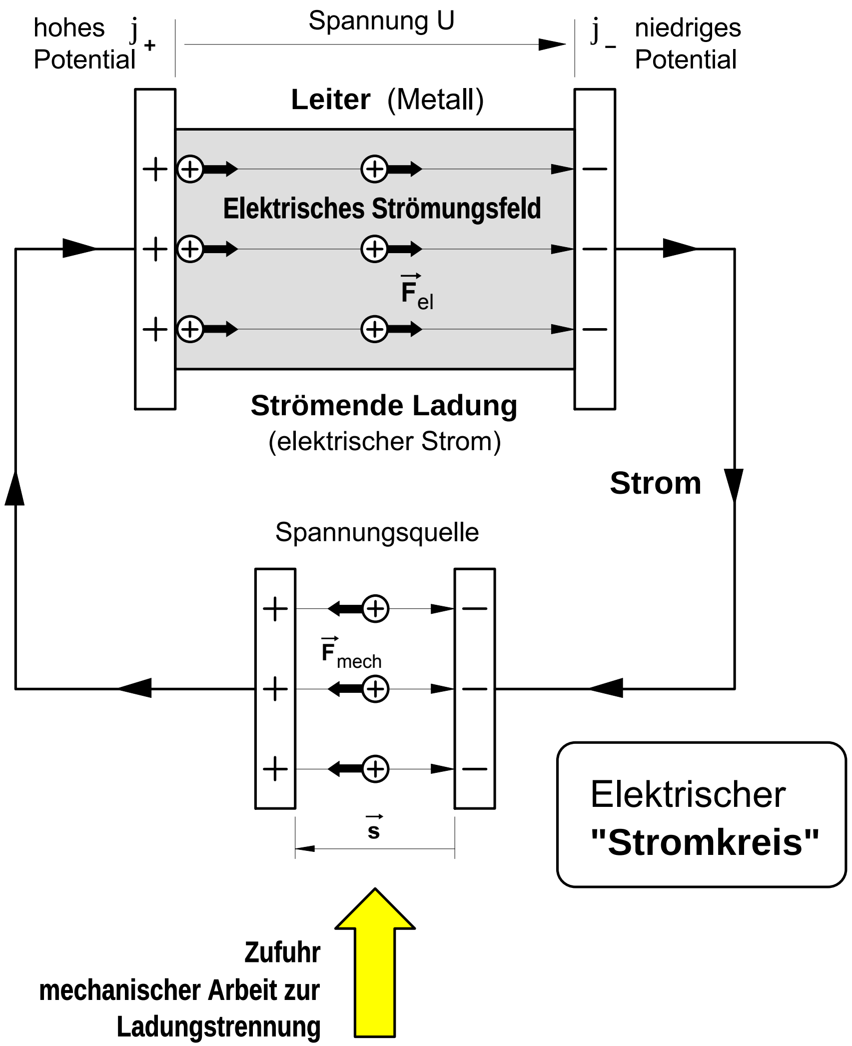


Ladungsverschiebung im Metall-Leiter durch

Influenz

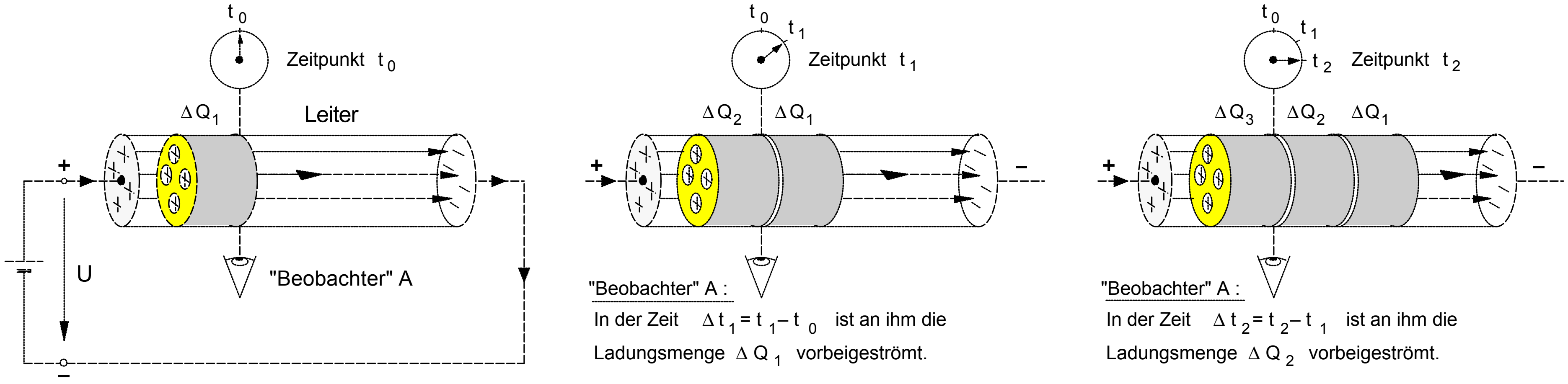
2. Elektrisches Strömungsfeld

Das elektrische Feld **bewegter Ladungen** bezeichnen wir als **elektrisches Strömungsfeld**. Elektrisches Strömungsfeld und bewegte Ladungen (strömende Ladungen) in einem **elektrischen Leiter** setzen sich wechselseitig voraus.



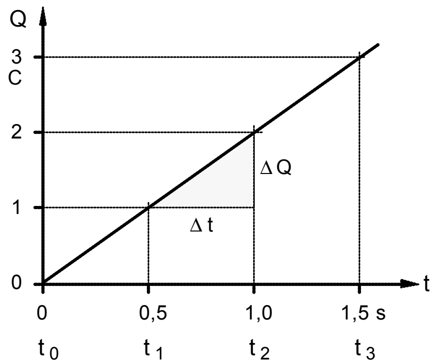
1. **Bewegung** einer **positiven Ladung** im **elektrischen Strömungsfeld** eines **Leiters**

Wir wollen bei der folgenden Betrachtung von der Annahme ausgehen, daß der in der Bildfolge angegebene "Beobachter" A gleichsam als übernatürliches Wesen die außergewöhnliche Fähigkeit besäße, die Strömung einer elektrischen Ladung durch eine bestimmte Querschnittsfläche A des dargestellten Leiters beobachten zu können.



2. **Bestimmungen** einer **gleichförmigen Strömung**

- Die unter dem Einfluß eines Strömungsfeldes **bewegte Ladung** in einem Leiter wird als elektrischer **Strom** bezeichnet. Fließt durch einen Leiterquerschnitt in gleichen Zeitabschnitten **Δt** stets die gleiche Ladungsmenge **ΔQ** , dann spricht man von einem **Gleichstrom**.
- Bei der Festlegung der sog. "technischen" **Stromrichtung** in einem Stromkreis ist man von der Strömung einer **positiven** Ladung ausgegangen (nach DIN 5489). Demgemäß fließt der elektrische Strom *außerhalb* der Spannungsquelle vom Pluspol durch den Leiter zum Minuspol und *innerhalb* der Spannungsquelle vom Minuspol zum Pluspol. – Hinweis: Die Normvorschrift DIN 5489 befindet sich auf dem nächsten Blatt.
- Für die an dem "Beobachter" A vorbei durch den Leiterquerschnitt strömende Ladungsmenge **Q** gilt bei **Gleichstrom** folgende **Zeit**abhängigkeit :



- $Q \sim t \;\Rightarrow\; Q = K \cdot t$ mit $K = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = "I"$. Daraus folgt für die
- **Definition** der **Stromstärke** :

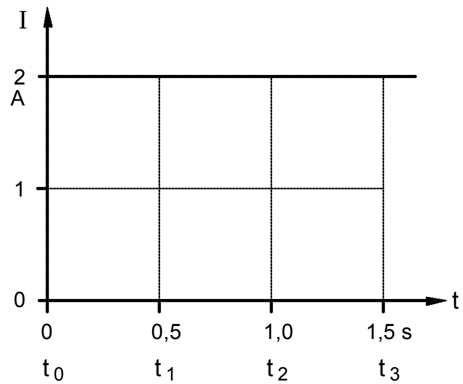
$$\boxed{I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}}$$

Maßeinheit: $[I] = \frac{[\Delta Q]}{[\Delta t]} = \frac{1C}{1s} = 1\frac{C}{s} = 1\,A$

- Für die **strömende Ladung** gilt dann bei **konstanter** Stromstärke:

$$\boxed{Q = I \cdot t}$$

Maßeinheit: $[Q] = [I] \cdot [t] = 1A \cdot 1s = 1\,As$



November 1968

	Vorzeichen- und Richtungsregeln für elektrische Netze	DIN 5489

Vorzeichen- und Richtungsregeln in der Elektrotechnik sind **Übereinkünfte**. Für die Darstellung elektrischer Netze, die aus Zweipolen oder n-Polen zusammengesetzt sind, sollen sie die Anwendung des Ohmschen Gesetzes, der Kirchhoffschen Regeln und der aus ihnen abgeleiteten Sätze von besonderen Überlegungen über das Setzen der Vorzeichen entlasten.

1. Vorzeichen und Richtungssinne (Richtungen) von Strom und Spannung

Der Strom in einem Leiter von einem Querschnitt 1 zu einem Querschnitt 2 wird positiv gerechnet, wenn **positive Ladungsträger** sich von 1 nach 2 oder negative Ladungsträger sich von 2 nach 1 bewegen. Die Spannung entlang einem Wege von einem Punkt 1 nach einem Punkt 2 wird positiv gerechnet, wenn das Potential in 1 größer ist als das Potential in 2.

Im Sinne dieser Festlegungen spricht man von dem positiven konventionellen Richtungssinn eines Stromes und einer Spannung oder auch von der positiven konventionellen Richtung (dieser Gebrauch des Wortes Richtung weicht also ab von dem Gebrauch in der Geometrie). Der positive konventionelle Richtungssinn wird häufig auch physikalischer Richtungssinn genannt, um ihn von dem in Abschnitt 2 genannten Bezugssinn zu unterscheiden.

Ein zeitlich veränderlicher Strom gilt für die Netzberechnung als positiv, wenn im gewählten Zeitpunkt der Augenblickswert positiv ist; entsprechendes gilt für eine zeitlich veränderliche Spannung.

2. Bezugssinn (Bezugsrichtung)

2.1 Für jedes Element (Zweipol) eines vermaschten elektrischen Netzes muß ein Bezugssinn des Stromes und ein Bezugssinn der Spannung festgelegt werden, damit den Größen in der Rechnung eindeutig Vorzeichen gegeben werden können.

2.2. Bezugssinne stellt man im Schaltplan durch Pfeile – Bezugspfeile – dar, die willkürlich eingezeichnet werden können.

2.3. Ströme und Spannungen werden in den nach Abschnitt 2.1 festgelegten Bezugssinnen positiv gerechnet, so, wie wenn diese Bezugssinne physikalische (positive konventionelle) Richtungssinne wären.

2.3.1. Ergibt sich aus der Rechnung eine Netzgröße positiv, so ist der vorher willkürlich gewählte Bezugssinn in Übereinstimmung mit dem physikalischen (positiven konventionellen) Richtungssinn nach Abschnitt 1, wenn bei allen vorgegebenen Spannungen und Strömen (zum Beispiel Quellenspannungen und Quellenströmen) die Bezugsrichtungen mit den entsprechenden physikalischen Richtungen übereinstimmen oder wenn bei willkürlichen Bezugsrichtungen der vorgegebenen Spannungen und Ströme (zum Beispiel Quellenspannungen und Quellenströme) die ihren physikalischen Richtungen entsprechenden Vorzeichen eingeführt werden. Kennt man den physikalischen (positiven konventionellen) Richtungssinn einer Netzgröße von vornherein, so ist es anschaulich, den Bezugssinn mit diesem gleich zu wählen.

2.3.2. Bei der komplexen Darstellung in der Wechselstromtechnik muß für die Quellenspannungen und Quellenströme eine Bezugsphase (willkürlich) festgelegt werden. Dann liefert die Berechnung die Spannungen und Ströme mit der gleichen Bezugsphase.

2.4. Erste Kirchhoffsche Regel (Knotenregel): In jedem Knotenpunkt ist die Summe aller Ströme null. Ströme, deren Bezugspfeile zum Knoten hin gerichtet sind, erhalten dabei das eine Vorzeichen, Ströme, deren Bezugspfeile vom Knotenpunkt weg gerichtet sind, das andere.

2.5. Zweite Kirchhoffsche Regel (Maschenregel): Die Summe aller Teilspannungen entlang einem geschlossenen Weg, dessen Umlaufsinn willkürlich gewählt werden kann, ist null. Alle Spannungsgrößen, deren Bezugssinne mit dem gewählten Umlaufsinn übereinstimmen, erhalten das eine Vorzeichen, alle Spannungsgrößen, deren Bezugssinne mit dem gewählten Umlaufsinn nicht übereinstimmen, das andere.

2.6. Legt man die Bezugssinne für die Ströme I fest, dann werden die Teilspannungen U an den Widerständen (Impedanzen) Z berechnet durch $U=ZI$; legt man die Bezugssinne für die Spannungen an den Widerständen (Impedanzen) fest, so gilt für die Ströme $I = YU$ mit $Y=1/Z$.

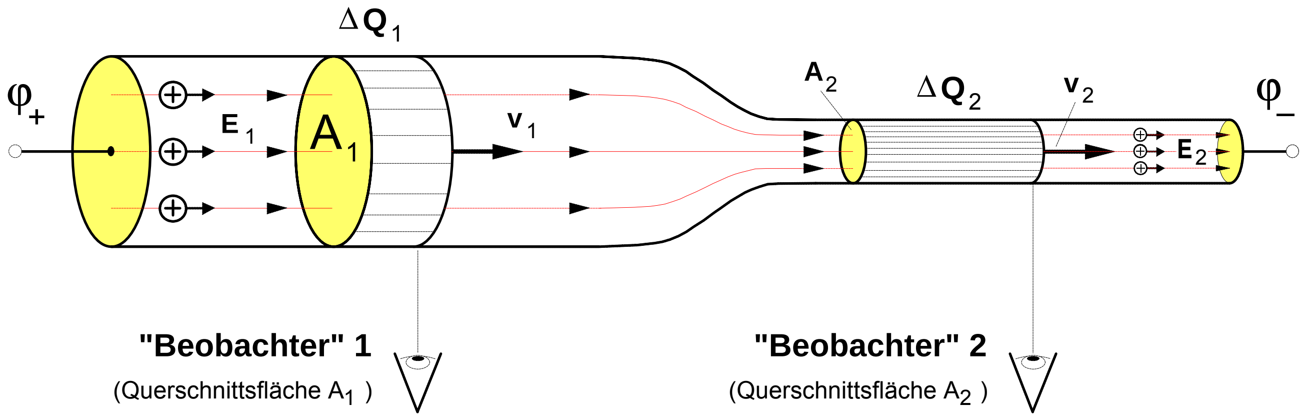
2.7. Die Quellenspannungen kann man auch durch die ihnen entsprechenden elektromotorischen Kräfte ersetzen, wenn man beachtet, daß sie entgegengesetzte physikalische Richtungssinne haben, vergleiche DIN 1323.

Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen (AEF) im Deutschen Normenausschuß (DNA)

Quelle: Deutscher Normenausschuss (Hrsg.), DNA-Schriftenreihe: Normen für den Unterricht, Band 1, Mathematik, Physik, Technisches Zeichnen, Berlin 1974 (Beuth-Verlag)

Arbeitsblatt Nr. **12 c)** : **Stromdichte** und **Feldstärke** im elektrischen **Strömungsfeld**

1. **Ladungsströmung** in einem elektrischen Leiter mit verschiedenen Querschnittsflächen



- *Annahme*: Wir wollen annehmen, daß an beiden "Beobachtern" in gleichen Zeiten **Δt** die gleiche Ladung **ΔQ** vorbeiströmt, d.h.:

Δt_1	=	Δt_2	(gleiche Beobachtungszeit)
ΔQ_1	=	ΔQ_2	(gleiche Ladung strömt vorbei)

- *Daraus folgt*: $\frac{\Delta Q_1}{\Delta t_1} = I_1 \quad = \quad \frac{\Delta Q_2}{\Delta t_2} = I_2$ (**gleiche Stromstärken**)

- *Frage*: Wodurch **unterscheiden** sich die Ladungsströmungen in den Querschnitten A_1 und A_2 ?

1. Damit an "Beobachter" 2 in der gleichen Zeit die gleiche Ladungsmenge vorbeiströmt, muß die Ladung **schneller** an ihm vorbeiströmen, d.h. die **Ladungsgeschwindigkeit** muß in dem kleineren Querschnitt größer sein:

$$v_1 \quad < \quad v_2$$

2. Die Stromstärke ist zwar gleich, jedoch ist in dem kleineren Querschnitt die **Dichte** der **Strömung** größer. Oder kurz: die "Stromdichte" (siehe rechts) ist größer. D.h.:

$$S_1 = \frac{I_1}{A_1} \quad < \quad S_2 = \frac{I_2}{A_2}$$

3. Um in dem kleineren Querschnitt eine größere Ladungsgeschwindigkeit zu erzielen, muß dort die elektrische **Feldstärke** des Strömungsfeldes größer sein:

$$E_1 \quad < \quad E_2$$

- Definition der **Stromdichte**:

$$\boxed{S = \frac{I}{A}}$$

I ... Stromstärke in A

A ... Querschnittsfläche in m² oder in mm²

S ... Stromdichte in A/m² oder in A/mm²

2. **Stromdichte S** und **Feldstärke E** im **elektrischen Strömungsfeld** eines **Leiters**

Die Stromdichte **S** kann als ein Maß für die Ladungsgeschwindigkeit **v** gedeutet werden. In dem Leiterabschnitt mit dem kleineren Querschnitt wird nur dann eine größere Ladungsgeschwindigkeit **v** und damit auch eine größere Stromdichte **S** erreicht, wenn dort in dem elektrischen Strömungsfeld eine größere Feldstärke **E** herrscht. Von daher liegt die Vermutung nahe, daß die **Stromdichte S** proportional der elektrischen **Feldstärke E** in dem Leiter ist, d.h.:

S ~ E Um daraus eine Gleichung zu gewinnen, fügen wir eine Konstante **K** als Faktor ein:

S = K · E

Diese Konstante ist vom **Material** des Leiters abhängig. Sie wird als "**elektrische Leitfähigkeit**" ϰ bezeichnet. Mit **K** = ϰ ergibt sich als grundlegende Gesetzmäßigkeit des elektrischen Strömungsfeldes die sogenannte

- **Elementarform** des **Ohmschen Gesetzes**[1)]

$$\boxed{S = \varkappa \cdot E}$$

E ... Feldstärke des Strömungsfeldes in V/m

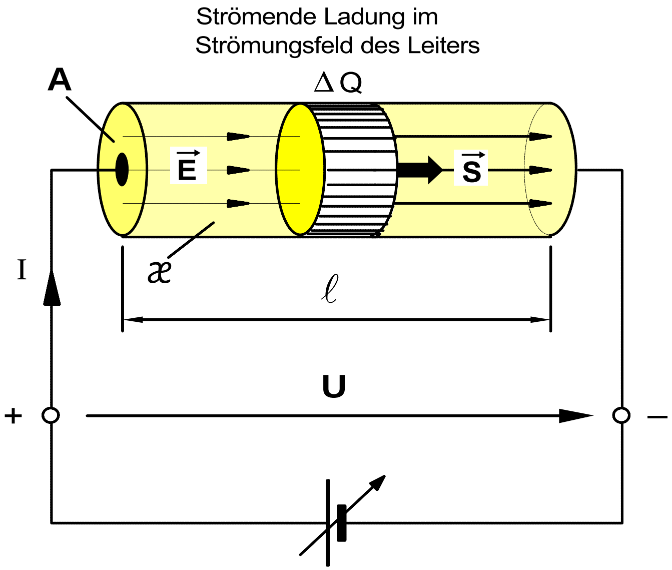
ϰ ... elektr. Leitfähigkeit $\frac{A \cdot m}{V \cdot mm^2} = \frac{m}{\Omega \cdot mm^2}$

S ... Stromdichte in A/mm²

Aluminium: $\varkappa_{Al} = 36 \frac{m}{\Omega \cdot mm^2}$

Kupfer: $\varkappa_{Cu} = 56 \frac{m}{\Omega \cdot mm^2}$

[1)] nach Georg Simon **Ohm** (1787-1854)



$$S = æ \cdot E$$

• **Stromdichte und Stromstärke**

$$S = \frac{I}{A} \quad \Rightarrow \quad I = S \cdot A$$

• **Spannung und Feldstärke**

$$U = E \cdot \ell \quad \Rightarrow \quad E = \frac{U}{\ell}$$

· **Aufgabe**

An eine Spannungsquelle mit der Spannung **U** werden nacheinander vier verschiedene elektrische Leiter mit den in der folgenden Tabelle angegebenen Merkmalen angeschlossen.

Berechnen Sie jeweils die elektrische Feldstärke **E**, die Stromdichte **S** und die Stromstärke I in den Leitern.

Vergleichen Sie die Fälle **a)** bis **d)** und geben Sie an, welchen Einfluß eine Änderung der Leitermerkmale auf die Stromstärke hat.

A ... Leiterquerschnitt in mm²

ℓ ... Leiterlänge in m

$æ$ ... Leitfähigkeit des Materials in $\frac{m}{\Omega \cdot mm^2}$

I ... Stromstärke in A

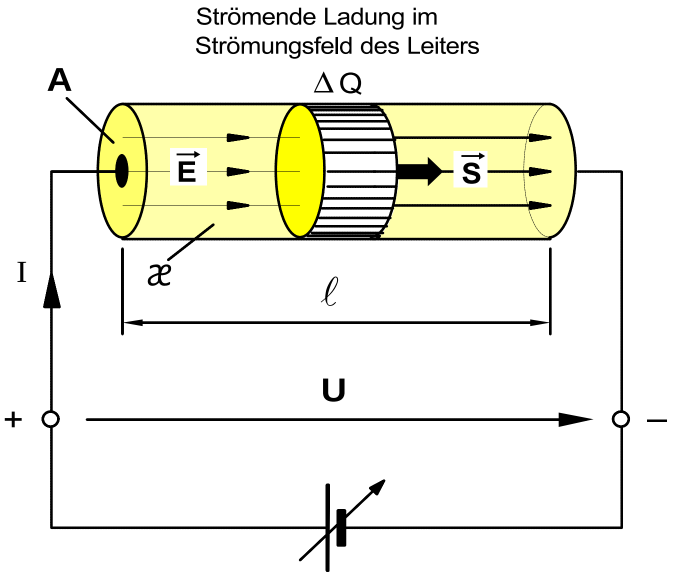
S ... Stromdichte in A/mm²

U ... Spannung in V

E ... elektrische Feldstärke in V/m

	Spannung an dem Leiter	**Leitermerkmale** Leiterlänge	Leiterquerschnitt	Leitfähigkeit	**Feldstärke** $E = \frac{U}{\ell}$	**Stromdichte** $S = æ \cdot E$	**Stromstärke** $I = S \cdot A$
a)	**U** = **2** V	ℓ = **20** m	**A** = **1,5** mm²	$æ$ = **56** $\frac{m}{\Omega mm^2}$	**E** =	**S** =	I =
b)	**U** = **2** V	ℓ = **20** m	**A** = **1,5** mm²	$æ$ = **2,0** $\frac{m}{\Omega mm^2}$	**E** =	**S** =	I =
c)	**U** = **2** V	ℓ = **20** m	**A** = **3,0** mm²	$æ$ = **2,0** $\frac{m}{\Omega mm^2}$	**E** =	**S** =	I =
d)	**U** = **2** V	ℓ = **40** m	**A** = **3,0** mm²	$æ$ = **2,0** $\frac{m}{\Omega mm^2}$	**E** =	**S** =	I =
e)	**U** = **4** V	ℓ = **40** m	**A** = **3,0** mm²	$æ$ = **2,0** $\frac{m}{\Omega mm^2}$	**E** =	**S** =	I =
f)	**U** =	ℓ = **40** m	**A** = **3,0** mm²	$æ$ = **2,0** $\frac{m}{\Omega mm^2}$	**E** =	**S** =	I = **1,2** A

• **Fazit**: Bei konstanter Spannung **U** an dem Leiter, ändert sich die Stromstärke I, wenn sich die Leitermerkmale ändern. So **sinkt** die **Stromstärke** I beispielsweise, wenn die Leitfähigkeit $æ$ des Materials ______________ wird (vgl. a) und b)) oder wenn die Leiterlänge ℓ __________ wird (vgl. c) und d)); indessen **steigt** die Stromstärke, wenn der Leiterquerschnitt **A** ___________________ wird (vgl. b) und c)).



$$S = æ \cdot E$$

• **Stromdichte und Stromstärke**

$$S = \frac{I}{A} \quad \Rightarrow \quad I = S \cdot A$$

• **Spannung und Feldstärke**

$$U = E \cdot \ell \quad \Rightarrow \quad E = \frac{U}{\ell}$$

· **Aufgabe**

An eine Spannungsquelle mit der Spannung **U** werden nacheinander vier verschiedene elektrische Leiter mit den in der folgenden Tabelle angegebenen Merkmalen angeschlossen.

Berechnen Sie jeweils die elektrische Feldstärke **E**, die Stromdichte **S** und die Stromstärke I in den Leitern.

Vergleichen Sie die Fälle **a)** bis **d)** und geben Sie an, welchen Einfluß eine Änderung der Leitermerkmale auf die Stromstärke hat.

A ... Leiterquerschnitt in mm²
ℓ ... Leiterlänge in m
æ ... Leitfähigkeit des Materials in $\frac{m}{\Omega \cdot mm^2}$

I ... Stromstärke in A
S ... Stromdichte in A/mm²
U ... Spannung in V
E ... elektrische Feldstärke in V/m

	Spannung an dem Leiter	**Leitermerkmale** Leiterlänge	Leiterquerschnitt	Leitfähigkeit	**Feldstärke** $E = \frac{U}{\ell}$	**Stromdichte** $S = æ \cdot E$	**Stromstärke** $I = S \cdot A$
a)	**U** = **2** V	ℓ = **20** m	**A** = **1,5** mm²	æ = **56** $\frac{m}{\Omega mm^2}$	**E** = **0,10** V/m	**S** = **5,6** A/mm²	I = **8,4** A
b)	**U** = **2** V	ℓ = **20** m	**A** = **1,5** mm²	æ = **2,0** $\frac{m}{\Omega mm^2}$	**E** = **0,10** V/m	**S** = **0,2** A/mm²	I = **0,3** A
c)	**U** = **2** V	ℓ = **20** m	**A** = **3,0** mm²	æ = **2,0** $\frac{m}{\Omega mm^2}$	**E** = **0,10** V/m	**S** = **0,2** A/mm²	I = **0,6** A
d)	**U** = **2** V	ℓ = **40** m	**A** = **3,0** mm²	æ = **2,0** $\frac{m}{\Omega mm^2}$	**E** = **0,05** V/m	**S** = **0,1** A/mm²	I = **0,3** A
e)	**U** = **4** V	ℓ = **40** m	**A** = **3,0** mm²	æ = **2,0** $\frac{m}{\Omega mm^2}$	**E** = **0,10** V/m	**S** = **0,2** A/mm²	I = **0,6** A
f)	**U** = **8** V	ℓ = **40** m	**A** = **3,0** mm²	æ = **2,0** $\frac{m}{\Omega mm^2}$	**E** = **0,20** V/m	**S** = **0,4** A/mm²	I = **1,2** A

• **Fazit**: Bei konstanter Spannung **U** an dem Leiter, ändert sich die Stromstärke I, wenn sich die Leitermerkmale ändern. So **sinkt** die **Stromstärke** I beispielsweise, wenn die Leitfähigkeit æ des Materials kleiner wird (vgl. a) und b)) oder wenn die Leiterlänge ℓ größer wird (vgl. c) und d)); indessen **steigt** die Stromstärke, wenn der Leiterquerschnitt **A** größer wird (vgl. b) und c)).

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK1**	Name: ET1-12DF.DOC - 12.11.02

Arbeitsblatt Nr. **12 d)** : **Elektrischer Widerstand** und **Ohmsches Gesetz**

- In den folgenden Überlegungen geht es um die Frage, wie sich der Einfluß des **Leiters** auf die Ladungsströmung darstellen läßt. Theoretischer Ausgangspunkt ist die **Elementarform** des **Ohmschen Gesetzes**, das nach bisherigen Betrachtungen den Zusammenhang zwischen Ursache (Feldstärke E) und Wirkung (Stromdichte S) im Strömungsfeld angibt.

$$\boxed{S = \varkappa \cdot E}$$

$$E = \frac{S}{\varkappa} \quad \text{mit} \quad E = \frac{U}{\ell} \quad \text{und} \quad S = \frac{I}{A}$$

$$\frac{U}{\ell} = \frac{I}{A \cdot \varkappa}$$

Nach **U** umgestellt:

$$U = \frac{\ell}{A \cdot \varkappa} \cdot I \qquad \text{mit} \ \frac{\ell}{A \cdot \varkappa} = K$$

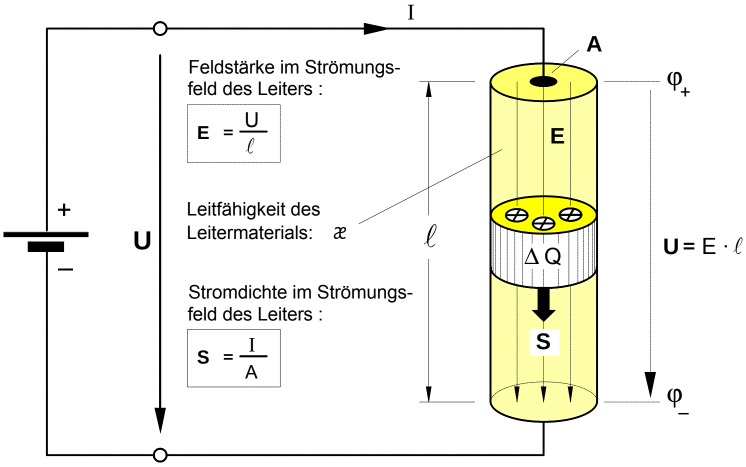


Bild 1: Ladungsströmung im Strömungsfeld eines Leiters

ℓ ... Länge des Leiters

A ... Querschnittsfläche des Leiters

$\varkappa$ ... Leitfähigkeit des Leitermaterials

Die Größen ℓ, **A** und $\varkappa$ sind Merkmale, die nicht durch das Strömungsfeld, sondern allein durch die Körpereigenschaften des **Leiters** bestimmt sind. Bei gleichbleibenden äußeren Bedingungen (Temperatur usw.) sind diese Leitermerkmale bei einem gegebenen Leiter **konstant**. Daher können wir auch schreiben: **U = K · I** und davon ausgehen, daß zwischen der Spannung **U** und der Stromstärke I in einem Leiter ein **proportionaler** Zusammenhang besteht, daß also **U ~ I** ist. Stellen wir diesen Zusammenhang graphisch in einem U-I-Diagramm dar, so ergibt sich als Kennlinie eine Ursprungsgerade (siehe Kennlinie des Leiters 1 in **Bild 2**).

Der Verlauf einer Ursprungsgeraden wird bekanntlich durch ihre Steigung bestimmt. Das Steigungsmaß ist der **konstante** Proportionalitätsfaktor **K** = $\Delta U / \Delta I$. **Physikalisch** liegt die konstante Steigung in den von uns als **konstant** vorausgesetzten **Leitermerkmalen** begründet. Demnach wäre bei einem Leiter mit anderen Leitermerkmalen die Steigung der Kennlinie größer oder kleiner. Nehmen wir an, sie wäre größer (Leiter 2 im **Bild 2**). Dies würde bedeuten, daß bei ein und derselben Spannung **U** die **Stromstärke** I_2 in dem Leiter 2 **kleiner** wäre als I_1 in dem Leiter 1. Der strömenden Ladung in dem Leiter 2 wird offenbar ein größerer "**Widerstand**" entgegengesetzt, oder kurz: Der Leiter 2 besitzt einen größeren "Widerstand". So gesehen, liegt die größere Steigung in dem größeren Widerstand des Leiters 2 begründet und die Steigung der Kennlinie kann als Maß für den Widerstand gedeutet werden. Daraus folgt als

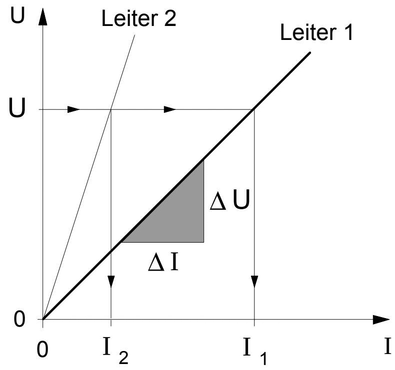


Bild 2: Kennlinien verschiedener Leiter im U-I-Diagramm

- **Definition** des **elektrischen Widerstandes**:

$$\boxed{R = \frac{\Delta U}{\Delta I}}$$

Maßeinheit:

$$[R] = \frac{[\Delta U]}{[\Delta I]} = \frac{1\,V}{1\,A} = 1\,\Omega$$

(1 Ω = "1 Ohm")

Setzen wir jetzt in unsere Gleichung **U = K · I** für **K = R** ein, so erhalten wir die

- **Technische Form** des **Ohmschen Gesetzes**:

$$\boxed{U = R \cdot I}$$

R ... Widerstand in Ω

I ... Stromstärke in A

U ... Spannung in V

- **Berechnung** des **Widerstands** eines langestreckten **Leiters**

Von **praktischer Bedeutung** für eine systematische Produktion von Bauelementen mit bestimmten Widerstandswerten oder für die Berechnung der Widerstände von Leitungen (Kabel, Freileitungen usw.) ist die Frage, von welchen Merkmalen der Widerstandswert eines Leiters abhängig ist. Für die Berechnung solcher Leiterwiderstände wollen wir aus der **technischen Form** des **Ohmschen Gesetzes** eine Formel herleiten.

$$U = R \cdot I \quad \text{mit} \quad U = E \cdot \ell \quad \text{und} \quad I = S \cdot A$$

$$E \cdot \ell = R \cdot S \cdot A \quad \text{mit} \quad S = \varkappa \cdot E$$

$$E \cdot \ell = R \cdot \varkappa \cdot E \cdot A$$

Durch E dividiert und umgestellt nach R ergibt sich für den

- **Leiterwiderstand:**

$$\boxed{R = \frac{\ell}{\varkappa \cdot A}}$$

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-12EF.DOC - 12.11.02
Arbeitsblatt Nr. **12 e)** : **Driftgeschwindigkeit** der **"freien" Elektronen**	

1. Spezifische **Ladungsdichte** und **Ladungsträgerkonzentration** in einem metallischen Leiter

- Aufgrund der stofflichen Eigenschaften des Leitermaterials steht in dem in **Bild 1** angegebenen Volumenelement **ΔV = A · Δs** eines metallischen Leiters eine bestimmte Anzahl **z** an "freien" Elektronen für den Ladungstransport zur Verfügung.

- Jedes "freie" Elektron besitzt (wie auch alle anderen Elektronen) eine bestimmte negative Ladung, nämlich die kleinstmögliche sog. **Elementarladung** $\mathbf{e_o}$. Sie beträgt:

$$\mathbf{e_o = 1{,}6 \cdot 10^{-19}}\ \text{As}$$

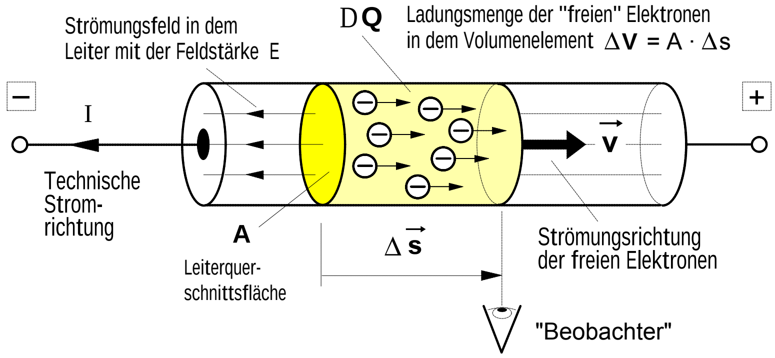


Bild 1:
Ladungsströmung "freier" Elektronen in einem Metall-Leiter

- Damit ist in dem Volumenelement ΔV des Leiters die "frei" **bewegliche Ladungsmenge** DQ = **z · $\mathbf{e_o}$** enthalten.

- Die "frei" **bewegliche** Ladungsmenge D**Q pro** Volumenelement Δ**V** ist definiert als spezifische **Ladungsdichte** η des jeweiligen Leitermaterials (Gleichung **1**).

$$\boxed{\eta = \frac{\Delta Q}{\Delta V}} \quad \textbf{(1)}$$

Mit D**Q = z · $\mathbf{e_o}$** gilt dann auch: $\eta = \dfrac{z}{\Delta V} \cdot e_o$

- Die in dem Leitermaterial **pro** Volumenelement Δ**V** (z.B. pro cm³) vorhandene **Anzahl z** an "freien" Elektronen wird als spezifische **Ladungsträgerkonzentration n** bezeichnet (Gleichung **2**).

$$\boxed{n = \frac{z}{\Delta V}} \quad \textbf{(2)}$$

- Damit gilt für die spezifische **Ladungsdichte** η eines Leitermaterials auch (Gleichung **3**):

$$\boxed{\eta = n \cdot e_o} \quad \textbf{(3)}$$

Beispiele:
Kupfer: $\mathbf{n_{Cu}} = \mathbf{8{,}7 \cdot 10^{22}}$ 1/cm³ ⇒ $\eta_{Cu} = \mathbf{n_{Cu}} \cdot \mathbf{e_o} = \mathbf{13{,}92 \cdot 10^{3}}$ As/cm³
Silber: $\mathbf{n_{Ag}} = \mathbf{7{,}0 \cdot 10^{22}}$ 1/cm³ ⇒ $\eta_{Cu} = \mathbf{n_{Cu}} \cdot \mathbf{e_o} = \mathbf{11{,}20 \cdot 10^{3}}$ As/cm³

2. **Geschwindigkeit** der **strömenden Ladung** als **Driftgeschwindigkeit v** der freien Elektronen

- Annahme: An dem fiktiven "Beobachter" in **Bild 1** ströme in der Zeit Δ**t** die Ladung Δ**Q** in Form einer bestimmten Menge an "freien" Elektronen **gleichförmig** vorbei. Für die **Stromstärke** I in dem Leiter gilt dann:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad \text{mit } \Delta Q = \eta \cdot \Delta V \qquad \text{strömende Ladung gemäß (1)}$$

$$I = \frac{\eta \cdot \Delta V}{\Delta t} \qquad \text{mit } \eta = n \cdot e_o \qquad \text{Ladungsdichte gemäß (3)}$$

$$I = \frac{n \cdot e_o \cdot \Delta V}{\Delta t} \qquad \text{mit } \Delta V = A \cdot \Delta s \qquad \text{Volumenelement gemäß Bild 1}$$

$$I = \frac{n \cdot e_o \cdot A \cdot \Delta s}{\Delta t} \qquad \text{mit } \frac{\Delta s}{\Delta t} = v \qquad \text{Geschwindigkeit der Ladung}$$

$$\boxed{I = n \cdot e_o \cdot A \cdot v} \quad \textbf{(4)}$$

Für die **Driftgeschwindigkeit v** der strömenden Ladung (d.h. der "freien" Elektronen) gilt dann:

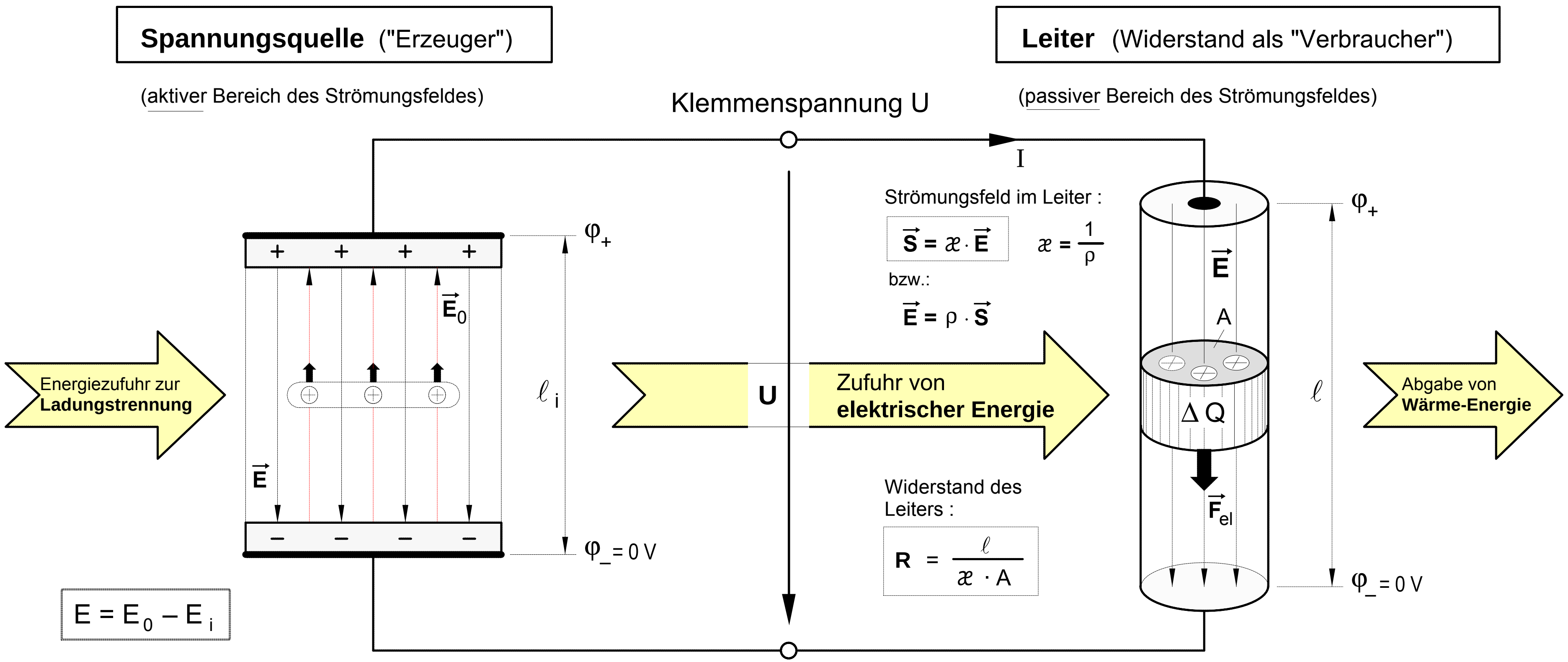
$$\boxed{v = \frac{I}{n \cdot e_o \cdot A}}$$

- Für den **Zusammenhang** zwischen der **Stromdichte S** und der **Driftgeschwindigkeit v** der in einem Metall-Leiter in Form "freier" Elektronen **strömenden Ladung** gilt gemäß Gleichung **(4)** die Beziehung:

$$\frac{I}{A} = n \cdot e_o \cdot v \qquad \text{mit} \qquad \frac{I}{A} = S \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{S = n \cdot e_o \cdot v}$$

A ... Leiterquerschnitt in cm²
n ... Ladungsträgerkonzentration in dem Leitermaterial in 1/cm³
$\mathbf{e_o}$ ... Elementarladung in As
I ... Stromstärke in dem Leiter in A
S ... Stromdichte in dem Leiter in A/cm²
v ... Driftgeschwindigkeit der freien Elektronen in cm/s

- **Fazit:** In einem gegebenen Leiter ist das Produkt **n · $\mathbf{e_o}$** konstant. Demnach verhält sich die Stromdichte **S** proportional zur Ladungsgeschwindigkeit **v**. Insofern kann die Stromdichte **S** auch als Maß für die Geschwindigkeit **v** der strömenden Ladung betrachtet werden.



$\vec{E}_0$ ... die zur **Ladungstrennung** in der Spannungsquelle erforderliche **Quellenfeldstärke**

U_0 ... **Quellenspannung**: $U_0 = E_0 \cdot \ell_i$

$\vec{E}_i$ ... **Feldstärke** des **Strömungsfeldes** in der Spannungsquelle: $\vec{E}_i = r_i \cdot \vec{S}_i$

$\vec{E}$ ... **Feldstärke** zwischen den durch $\vec{E}_0$ getrennten **Ladungen** an den **Polen** (vom Plus-Pol zum Minus-Pol gerichtet)

$$E = E_0 - \rho_i \cdot S_i \qquad \text{mit} \qquad S_i = \frac{I}{A_i}$$

$$E = E_0 - \rho_i \cdot \frac{I}{A_i} \qquad \Big| \cdot \ell_i$$

$$E \cdot \ell_i = E_0 \cdot \ell_i - \frac{\rho_i \cdot \ell_i}{A_i} \cdot I \quad \text{mit} \quad \frac{\rho_i \cdot \ell_i}{A_i} = R_i \quad \text{(Innenwiderstand)}$$

ergibt sich für die **Klemmenspannung**: $\boxed{U = U_0 - R_i \cdot I}$

- Für die **elektrische Arbeit W_{el}**, die in dem Strömungsfeld während der Zeitdauer Δt der Ladungsströmung an der bewegten Ladung Δ**Q** in dem Leiter ("Verbraucher") verrichtet wird, gilt :

$$W_{el} = F_{el} \cdot \ell \qquad \text{mit} \qquad F_{el} = E \cdot \Delta Q$$

$$W_{el} = E \cdot \Delta Q \cdot \ell \qquad \text{mit} \qquad E \cdot \ell = U$$

$$W_{el} = U \cdot \Delta Q \qquad \text{mit} \qquad \Delta Q = I \cdot \Delta t$$

$$\boxed{W_{el} = U \cdot I \cdot \Delta t}$$

- Damit ergibt sich für die **elektrische Leistung** :

$$P_{el} = \frac{W_{el}}{\Delta t} = \frac{U \cdot I \cdot \Delta t}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{el} = U \cdot I}$$

· **Übungsaufgaben** zur **elektrischen Arbeit** und **Leistung**

1. Durch einen Leiter soll eine elektrische Ladung von **20 As** transportiert werden. Dabei muß eine elektrische Arbeit von **100 Ws** verrichtet werden. Wie groß ist die elektrische Spannung zwischen den Leiterenden**?** [5 V]

---

2. In einem Treppenhaus sind **5** Glühlampen mit je **40 W** während der Wintermonate täglich **3 Stunden** in Betrieb. Berechnen Sie die elektrische **Arbeit**, die jeden Tag in Licht und Wärme umgewandelt wird **!**
[600 Wh]

---

3. Welche **Arbeit** in **kWh** verrichtet ein Elektromotor innerhalb von **15 Minuten**, wenn bei einer Spannung von **220 V** die Stromstärke **0,5 A** beträgt **?** [0,0275 kWh]

---

4. Ein Heizdraht mit einem Widerstand von **80** Ω soll in einer Stunde eine Wärmeenergie von **4200 kWs** abgeben. Berechnen Sie die **Stromstärke** in dem Heizdraht **!** [3,82 A]

---

5. Auf dem Sockel einer Glühlampe stehen folgende Angaben: **6 V / 0,3 A** . Wie groß ist die elektrische **Leistung** der Glühlampe **?** [1,8 W]

---

6. Ein elektrisches Heizgerät mit einer Leistung von **1000 W** wird an einer Spannung von **220 V** betrieben. Berechnen Sie die **Stromstärke** in der Zuleitung des Gerätes **!** [4,55 A]

---

7. Ein Raumheizlüfter mit einer Leistung von **2000 W** wird **zweieinhalb** Stunden lang in Betrieb genommen. Welche elektrischen Energie**kosten** entstehen, wenn eine Kilowattstunde **0,28 DM** kostet **?** [1,40 DM]

---

8. In ein elektrisches Heizgerät soll ein Konstantandraht ($r = \mathbf{0{,}5}\,\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$) mit einem Querschnitt von **0,15** mm² als Heizdraht eingebaut werden. Das Heizgerät soll bei einer Betriebsspannung von **220 V** eine Leistung von **2420 W** entwickeln. Wie lang muß der Heizdraht sein **?** [6 m]

---

9. Die Heizwicklung eines elektrischen Lötkolbens war **12** Minuten an eine Spannung von **220** V angeschlossen. In dieser Zeit wurde in dem Lötkolben eine elektrische Arbeit von **30** Wh verrichtet.

a) Berechnen Sie den Widerstand der Heizwicklung. [322,67 Ω]
b) Welche elektrische Leistung entwickelt der Lötkolben? [150 W]

---

10. Eine Relaiswicklung mit einem Widerstand von **120** Ω soll eine elektrische Leistung von **5** W aufnehmen. An welche Spannung muß das Relais angeschlossen werden **?** [24,5 V]

---

11. Mit welcher Stromstärke darf ein Potentiometer mit den Herstellerangaben **1** kΩ / **20** W höchstens belastet werden **?** [141 mA]

---

12. Lösen Sie bitte folgende Aufgaben aus dem Buch von H. **Lindner**, Elektro-Aufgaben, Bd. **1**:

Nr. **377**, **378**, **389 c**), **390 c**), **424**, **429**

1. **Kristallgitteraufbau** der **Metalle** (Beispiel: Kupfer)

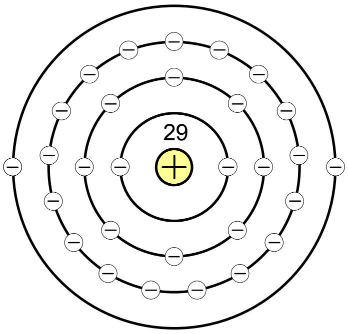


Bild 1 :

Kupferatom mit

- ▶ 29 positiven Protonen und
- ▶ 29 negativen Elektronen

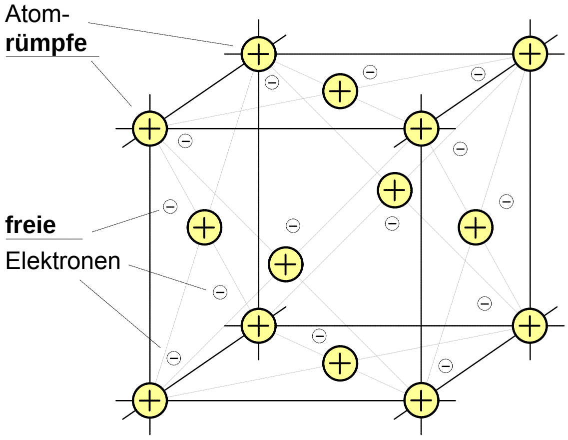


Bild 2 : **Kristallgitter aus Kupferatomen**

In den Metallen sind die Atome sehr dicht aneinander gedrängt. Daher kann ein Elektron von der Außenschale so nahe an ein Nachbaratom gelangen, daß es von dessen Kern ebenso weit entfernt ist wie vom eigenen. In diesem Fall heben sich die Anziehungskräfte auf und das Elektron kann sich innerhalb des Kristallgitters frei bewegen, es ist zum sog. **freien Elektron** geworden. Ist ein Elektron frei geworden, so hinterläßt es einen positiv geladenen **Atomrumpf**. Die Anzahl **n** der freien Elektronen pro cm³ beträgt z.B. in

- **Kupfer**:

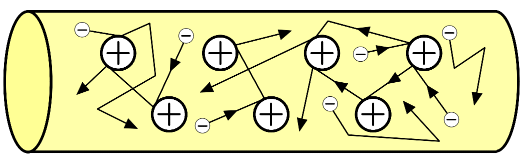
  $\mathbf{n_{Cu} = 8{,}7 \cdot 10^{22}}\ 1/\text{cm}^3$

- **Silber**:

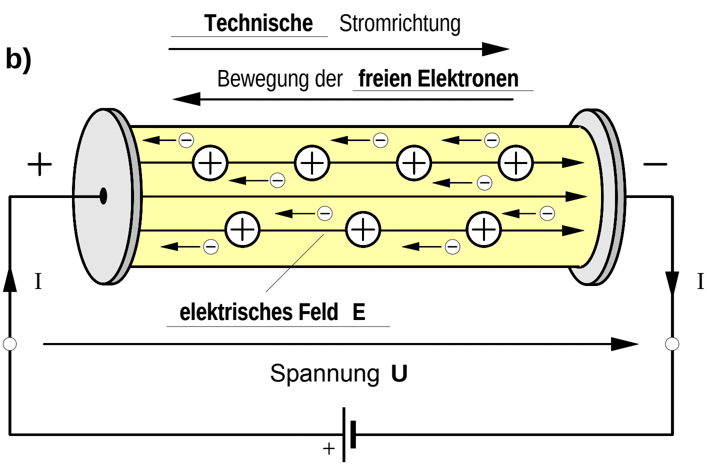
  $\mathbf{n_{Ag} = 7{,}0 \cdot 10^{22}}\ 1/\text{cm}^3$

2. **Stromleitung** in **Metallen** (vereinfachte Darstellung)

a)



b)



a) Leiter **ohne** Spannung

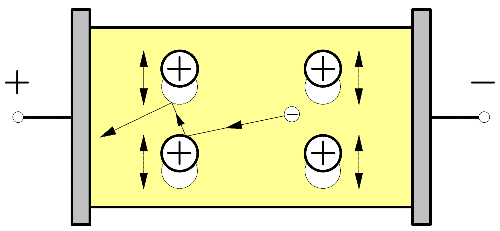
Die **freien Elektronen** bewegen sich **ungeordnet** zwischen den Atomrümpfen hin und her; sie führen eine sog. thermische *Schwirrbewegung* aus.

b) Leiter **mit** Spannung

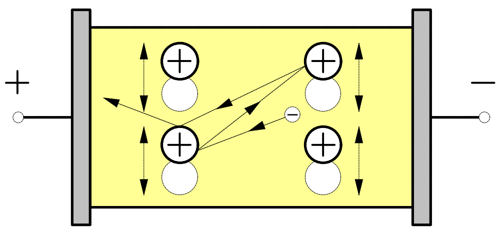
Durch das Anlegen der Spannung entsteht in dem Kristallgitter des Metall-Leiters ein **elektrisches Feld** mit der Feldstärke **E.** Unter dessen Einfluß führen die **freien Elektronen** eine **geordnete** Bewegung, eine sog. *Driftbewegung*, vom **Minus** -Pol zum **Plus** -Pol der Spannungsquelle aus (physikalische Stromrichtung).

3. Der Einfluß der **Wärmebewegung** der **Atomrümpfe** auf die Stromleitung (Beispiel: Eisendraht)

- **Kalter** Eisendraht (ca. 20°C)
  - ▶ Spannung: **U** = __________
  - ▶ Stromstärke: I = __________

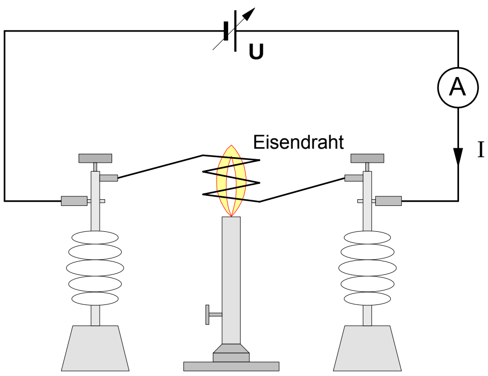


- **Heißer** Eisendraht (ca. 120°C)
  - ▶ Spannung: **U** = __________
  - ▶ Stromstärke: I = __________



Durch die Zufuhr von Wärmeenergie erwärmt sich der Leiterdraht und die thermische Schwingungsbewegung der **Atomrümpfe** wird **stärker**. Dadurch wird der **Driftbewegung** der **freien Elektronen** im heißen Zustand ein **größerer Widerstand** entgegengesetzt und sie bewegen sich **langsamer** durch den Draht (siehe dazu auch die Seite 2 dieses Arbeitsblattes).

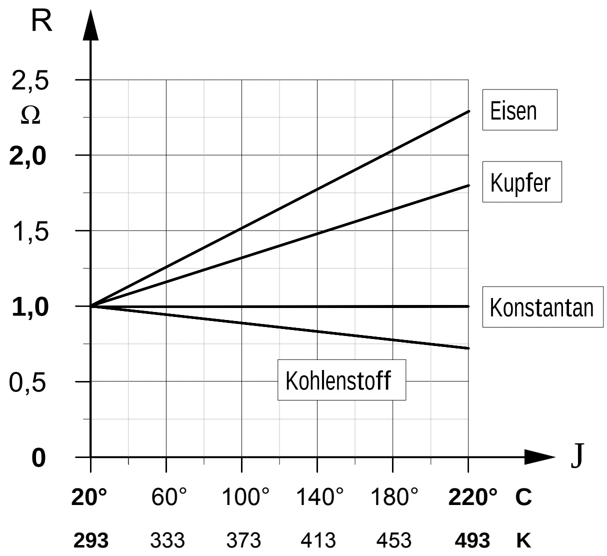
1. Versuch: **Temperaturerhöhung** eines **Metall-Leiters**



Ein gewendelter Eisendraht wird zwischen zwei Isolierstützen geklemmt und über einen Strommesser an eine Spannungsquelle angeschlossen, die eine konstante Spannung **U** liefert. Die Stromstärke I durch den Eisendraht wird mit Hilfe der einstellbaren Spannungsquelle bei Zimmertemperatur (ϑ = 20° C) auf einen bestimmten Wert eingestellt. Anschließend wird der Eisendraht mit einer Gasflamme erhitzt und das Verhalten des Strommessers beobachtet.

- **Beobachtung**: Mit zunehmender Temperaturerhöhung des Eisendrahtes **sinkt** die Stromstärke I. Bei anschließender Abkühlung wird die Stromstärke I wieder **größer**.
- **Schlußfolgerung**: Infolge der Temperaturerhöhung wird der Widerstand **R** des Eisendrahtes **größer**. Bei sinkender Temperatur wird er wieder **kleiner**.
- **Erklärung**: Durch die Temperaturerhöhung steigt die Wärmebewegung der **Atomrümpfe** im Inneren des Leiters. Dadurch werden die **freien Elektronen** bei ihrer Bewegung durch den Leiter stärker behindert .

2. **Widerstands-Temperatur-Kennlinien** und **Temperaturbeiwerte** verschiedener **Leiterwerkstoffe**



- **Temperaturbeiwert** a und Leitfähigkeit æ bei **20°C**

Werkstoff	a in $\frac{1}{K}$	æ in $\frac{m}{\Omega \cdot mm^2}$
Eisen	0,00650	7
Kupfer	0,00393	56
Aluminium	0,00403	36
Konstantan	0,00001	2
Kohlenstoff	-0,00130	0,046

Quelle: Friedrich, Tabellenbuch der Elektrotechnik, Bonn 1998, S. 3 – 4

Bei dem Widerstands-Temperatur-Diagramm wurde angenommen, daß ein aus dem jeweiligen Werkstoff gefertigter Drahtleiter mit einem Widerstandswert von R = **1** Ω bei 20° C jeweils um 200 Kelvin auf eine Temperatur von 220° C erwärmt wird.

3. **Berechnung** der **Widerstandsänderung** bei **Temperaturänderung** von metallischen Leiterwerkstoffen

► Für Temperaturänderungen bis 200°C kann die Widerstands**änderung** von Metall-Leitern näherungsweise mit folgender Formel berechnet werden:

$$\boxed{\Delta R = R_K \cdot \alpha \cdot \Delta\vartheta} \quad \text{mit} \quad \Delta\vartheta = \vartheta_w - \vartheta_k$$

► Der **nach** der Temperaturerhöhung sich einstellende Widerstand läßt sich dann wie folgt berechnen:

$$\boxed{R_w = R_K + \Delta R}$$

ΔR ... Widerstands**änderung** in Ω

R_k ... Widerstand **vor** der Temperaturerhöhung (Kaltwiderstand) in Ω

α ... materialabhängiger Temperaturbeiwert in 1/K (siehe Tabelle)

$\Delta\vartheta$ ... Temperatur**änderung** in K (Kelvin)

ϑ_k ... Werkstoff-Temperatur **vor** der Temperaturerhöhung in °C (oder in K)

ϑ_w ... Werkstoff-Temperatur **nach** der Temperaturerhöhung in °C (oder in K)

R_w ... Widerstand **nach** der Temperaturerhöhung (Warmwiderstand) in Ω

Beispiel:

Wie groß ist der Drahtwiderstand der Kupferwicklung einer Spule bei 80° C, wenn bei einer Temperatur von 20° C ein Widerstand von 30 Ω gemessen wurde?

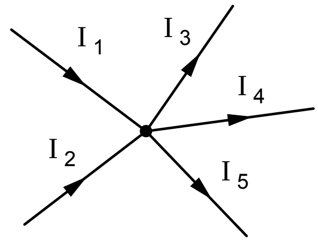
Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-13-F.DOC - 13.11.02
Arbeitsblatt Nr. **13** : **Knotenpunkt-** und **Maschen-Regel** nach **Kirchhoff** *	

***Gustav Robert Kirchhoff** wurde am 12. März 1824 in Königsberg geboren. Nach dem Studium der Naturwissenschaften wurde er 1850 Physik-Professor in Breslau. 1854 wechselte er nach Heidelberg und 1875 nach Berlin an die Universität. Bereits in den ersten Jahren seiner Forschertätigkeit beschäftigte sich Kirchhoff mit den Erscheinungen und Gesetzen der Elektrizität. Er knüpfte an die Erkenntnisse von Georg Simon Ohm (1789 – 1854) an und stellte im Jahr 1854 die beiden nach ihm benannten Kirchhoffschen Regeln der elektrischen Stromkreise auf. Von großer Bedeutung für die Astronomie und Physik wurden Kirchhoffs experimentelle Untersuchungen der Emission und Absorption des Lichtes, die er in den Jahren 1859 und 1860 zusammen mit dem Chemie-Professor Robert Wilhelm Bunsen (1811 – 1899) durchführte. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse führten zur Erklärung der Fraunhoferschen Linien des Sonnenspektrums, zur Begründung der Spektralanalyse und zur Aufstellung des Kirchhoffschen Strahlungsgesetzes. Kirchhoff starb am 17. Oktober 1887 im 64. Lebensjahr in Berlin.

1. **Knotenpunkt-Regel** (1. Kirchhoffsche Regel)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} I_k = 0}$$

In jedem Stromverzweigungspunkt ist **die Summe aller Ströme** unter Beachtung der Vorzeichen **stets gleich Null**.



zufließende Ströme (+) abfließende Ströme (–)

Bild 1: Knotenpunkt in einem Netzwerk

- Für den Knotenpunkt in Bild 1 gilt demnach:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = I_1 + I_2 + (-I_3) + (-I_4) + (-I_5) = 0$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0 \qquad \Rightarrow \underbrace{I_1 + I_2}_{\text{zufließend}} = \underbrace{I_3 + I_4 + I_5}_{\text{abfließend}}$$

- **Fazit**: Die Summe der __**zufließenden**__ Ströme **ist stets gleich** der Summe der __**abfließenden**__ Ströme.

2. **Maschen-Regel** (2. Kirchhoffsche Regel)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} U_k = 0}$$

In jedem geschlossenen Stromkreis (Masche) ist die **Summe der Spannungen** unter Beachtung der Vorzeichen **stets gleich Null**.

- Die **Umlaufrichtung** in einer Masche ist **frei wählbar**.
- Spannungen **in** Umlaufrichtung der Masche erhalten ein **positives** Vorzeichen, Spannungen **gegen** die Umlaufrichtung ein **negatives** Vorzeichen.
- Damit gilt in der Masche **M1** (Bild 2):

$U_1 - U_2 - U_3 + U_4 + U_5 + U_6 - U_7 = 0$

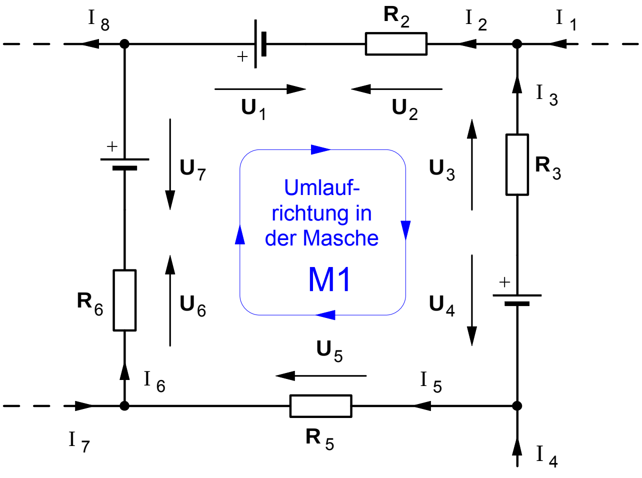


Bild 2: Masche in einem Netzwerk

- Anwendungsbeispiel: **Brückenschaltung**

Masche **M1** :

$U_1 + U_{AB} - U_3 = 0$ Þ **$U_{AB} = U_3 - U_1$**

Masche **M2** :

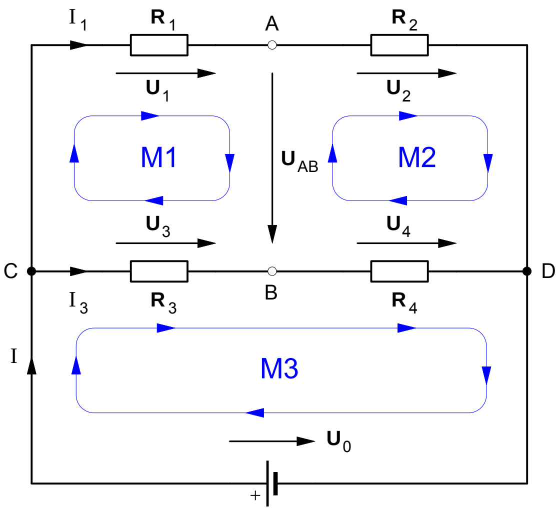
$U_2 - U_4 - U_{AB} = 0$ Þ **$U_{AB} = U_2 - U_4$**

Masche **M3** :

$U_3 + U_4 - U_0 = 0$ Þ **$U_0 = U_3 + U_4$**

Knotenpunkt **C** :

$I - I_1 - I_3 = 0$ Þ **$I = I_1 + I_3$**



Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-13A.DOC - 16.11.03
Arbeitsblatt Nr. **13 a)** : **Schaltungen von elektrischen Widerständen** (Wiederholungsübung)	

• Übungsaufgaben: **Gruppenschaltungen von Widerständen** (gemischte Schaltungen)

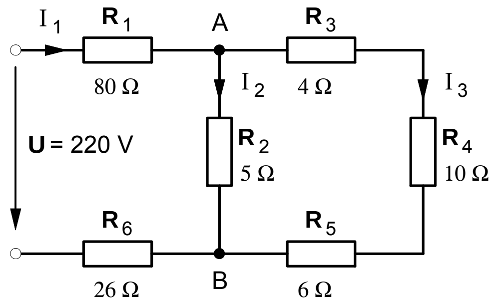
1. Berechnen Sie für die nebenstehende Widerstandsschaltung

a) den Gesamtwiderstand $\mathbf{R}_{ges}$,

b) die Ströme I_1, I_2 und I_3 und

c) die Spannung $\mathbf{U}_{AB}$ zwischen den Punkten **A** und **B**.

[110 Ω ; 2 A – 1,6 A – 0,4 A ; 8 V]

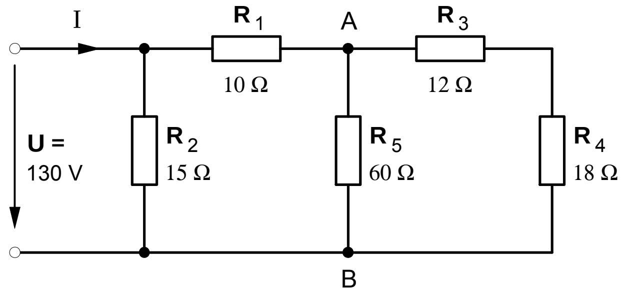


2. Berechnen Sie für die nebenstehende Widerstandsschaltung

a) den Strom I und

b) die Spannung $\mathbf{U}_{AB}$ zwischen den Punkten **A** und **B**.

[13 A ; 86,67 V]

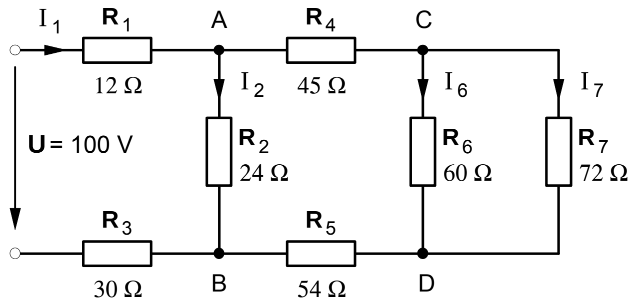


3. Berechnen Sie für die nebenstehende Widerstandsschaltung

a) den Gesamtwiderstand $\mathbf{R}_{ges}$ und

b) die Ströme I_2, I_6 und I_7.

[62,3 Ω ; 1,35 A – 134,4 mA – 112 mA]

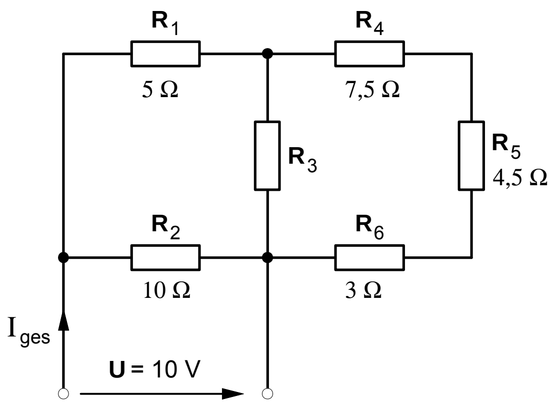


4. Der Gesamtwiderstand der nebenstehenden Widerstandsschaltung beträgt $\mathbf{R}_{ges}$ = **5,55** Ω.

a) Zeichnen Sie die Schaltung so um, daß Reihen- und Parallelschaltungen zweifelsfrei erkennbar sind.

b) Berechnen Sie den **Widerstand** $\mathbf{R}_3$.

[15 Ω]



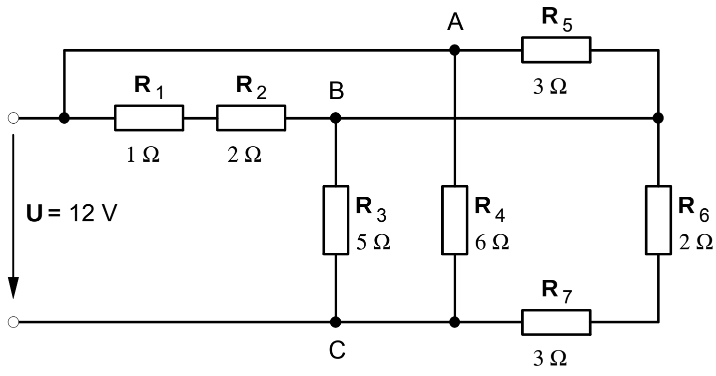
5. Gegeben ist die nebenstehende Widerstandsschaltung.

a) Zeichnen Sie die Schaltung so um, daß Reihen- und Parallelschaltungen zweifelsfrei erkennbar sind.

b) Berechnen Sie den Gesamtwiderstand $\mathbf{R}_{ges}$ der Schaltung.

c) Berechnen Sie die Spannungen an den Widerständen $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_3$ und $\mathbf{R}_7$.

[2,4 Ω ; 1,5 V – 7,5 V – 4,5 V]



1. Ermittlung der Anzahl der möglichen Knotenpunktgleichungen (**n**) und der erforderlichen Maschengleichungen (**k**) für die Berechnung eines Gleichstrom-Netzwerkes

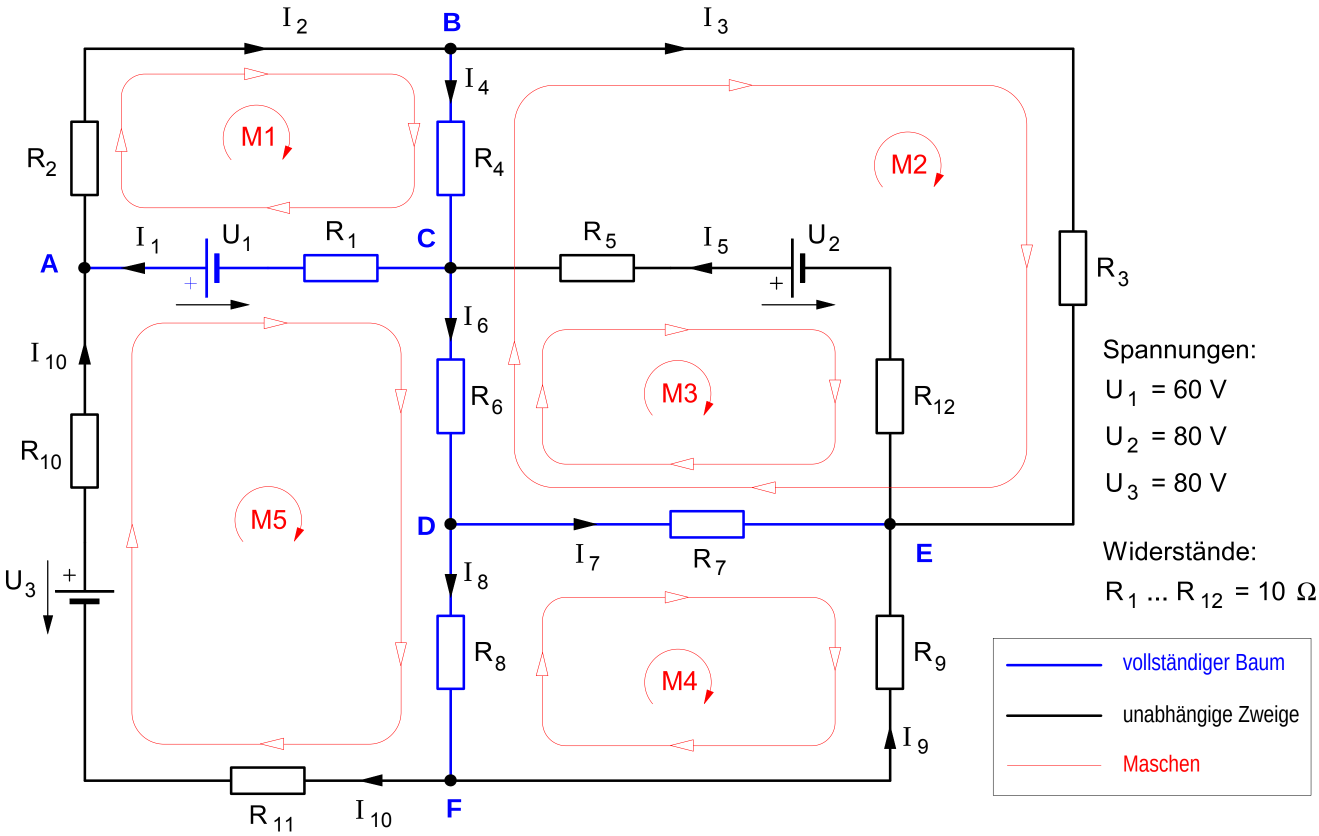
- Bezeichnet man mit **m** die Anzahl der **Knotenpunkte** in einem Netzwerk und mit **i** die Anzahl der **unbekannten Zweigströme** (und damit **auch** die Anzahl der **erforderlichen Gleichungen**), dann ermöglichen
  - ▶ $n = m - 1$ **Knotenpunkte** die Aufstellung von **n** voneinander unabhängigen **Knotenpunktgleichungen** und
  - ▶ $k = i - n$ **Maschen** die Aufstellung von **k** voneinander unabhängigen **Maschengleichungen**.

- **Beispiel**: Die Zweigströme in dem unten dargestellten Netzwerk sollen berechnet werden.
  - ▶ Unbekannte **Zweigströme** im Netzwerk: $i = 10$
  - ▶ **Knotenpunkte** im Netzwerk: $m = 6$
  - ▶ Mögliche **Knotenpunktgleichungen**: $n = 6 - 1 = 5$
  - ▶ Erforderliche **Maschen** und **Maschengleichungen**: $k = 10 - 5 = 5$

2. Verfahren zur Ermittlung von Maschen, die eine Aufstellung voneinander unabhängiger Maschengleichungen ermöglichen

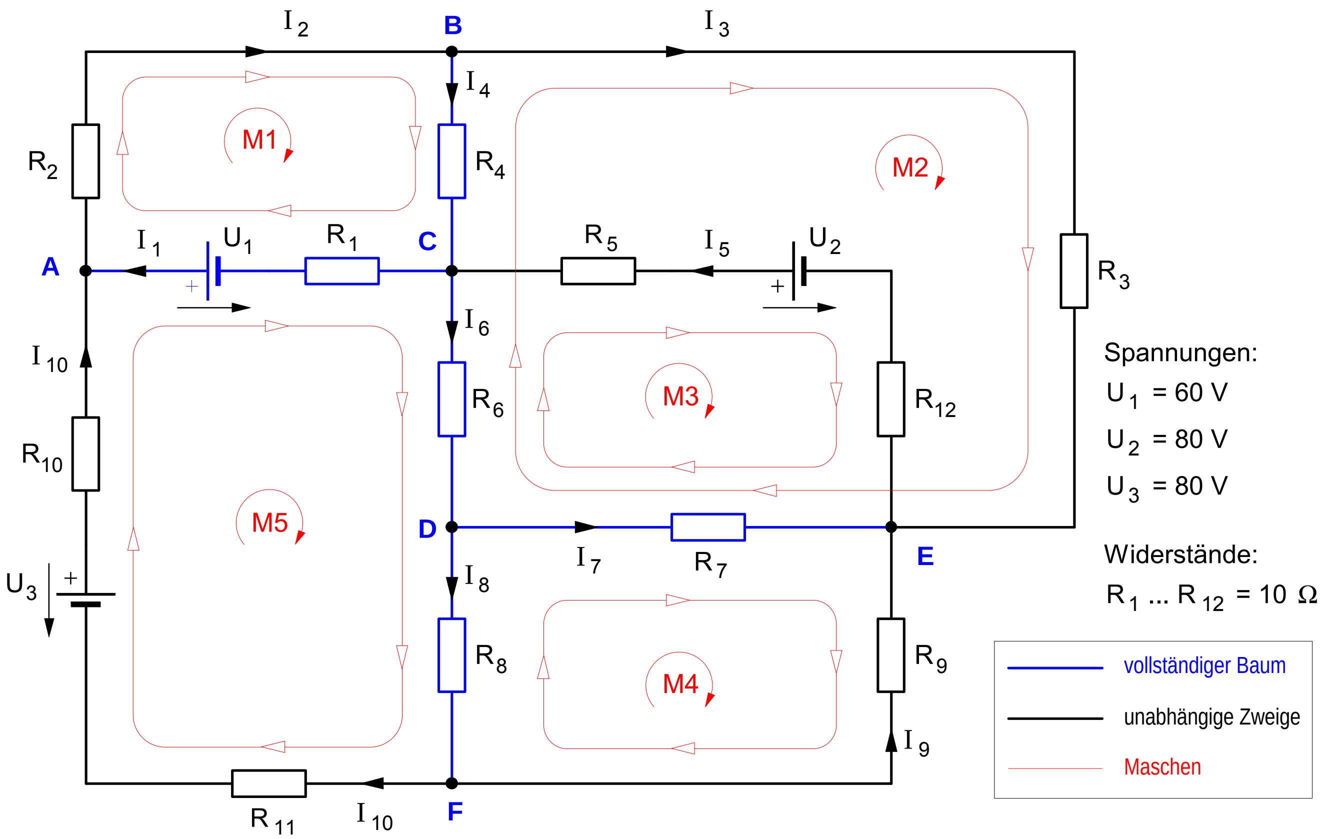
1. Sämtliche **Knotenpunkte** werden über den »**vollständigen Baum**« miteinander verbunden.
   Achtung: Die Zweige des Baumes **dürfen an keiner Stelle in sich geschlossene Maschen** bilden!
2. Die **verbleibenden Verbindungen** zwischen den Knotenpunkten bilden das »**System der unabhängigen Zweige**«.
3. Die **Festlegung der Maschen** erfolgt nach folgendem Verfahren:
   a) Immer von einem **unabhängigen Zweig** ausgehen und dann
   b) den Zweig über den **vollständigen Baum** zu einer **Masche** schließen.

Wichtiger Hinweis: **Nie zweimal** über einen **unabhängigen Zweig** gehen**!!!**



Vgl.: Moeller/Frohne u.a., Grundlagen der Elektrotechnik, Stuttgart 1996 (18. Auflage), S.83

3. Beispiel: **Gleichstrom-Netzwerk mit 10 unbekannten Zweigströmen**



a) **5** Knotenpunktgleichungen

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\text{A.} & +I_1 & -I_2 & & & & & & & +I_{10} & =0 \\
\text{B.} & & +I_2 & -I_3 & -I_4 & & & & & & =0 \\
\text{C.} & -I_1 & & & +I_4 & +I_5 & -I_6 & & & & =0 \\
\text{D.} & & & & & & +I_6 & -I_7 & -I_8 & & =0 \\
\text{E.} & & & +I_3 & & -I_5 & & +I_7 & & +I_9 & =0
\end{array}
$$

b) **5** Maschengleichungen

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{M1} & +R_1\cdot I_1 & +R_2\cdot I_2 & +R_4\cdot I_4 & & & -U_1 & =0 \\
\text{M2} & +R_3\cdot I_3 & -R_4\cdot I_4 & -R_6\cdot I_6 & & -R_7\cdot I_7 & & =0 \\
\text{M3} & -(R_5+R_{12})\cdot I_5 & -R_6\cdot I_6 & -R_7\cdot I_7 & & & +U_2 & =0 \\
\text{M4} & +R_7\cdot I_7 & -R_8\cdot I_8 & -R_9\cdot I_9 & & & & =0 \\
\text{M5} & -R_1\cdot I_1 & +R_6\cdot I_6 & +R_8\cdot I_8 & & +(R_{10}+R_{11})\cdot I_{10} & +U_1-U_3 & =0
\end{array}
$$

Ergebnisse

I_1 =	**2,2**	A	I_4 =	**0,6**	A	I_7 =	**0,6**	A	I_{10} =	**1,0**	A
I_2 =	**3,2**	A	I_5 =	**3,0**	A	I_8 =	**0,8**	A			
I_3 =	**2,6**	A	I_6 =	**1,4**	A	I_9 =	**– 0,2**	A			

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-15-1.DOC - 17.11.02
Arbeitsblatt Nr. **15** : **Berechnung von Gleichstrom-Netzwerken (Übungen)**	

• **Aufgabe :**

Berechnen Sie bei allen Aufgaben dieses Arbeitsblattes die jeweils gesuchten Zweigströme mit Hilfe der Knotenpunkt- und der Maschenregel.

1. gegeben :

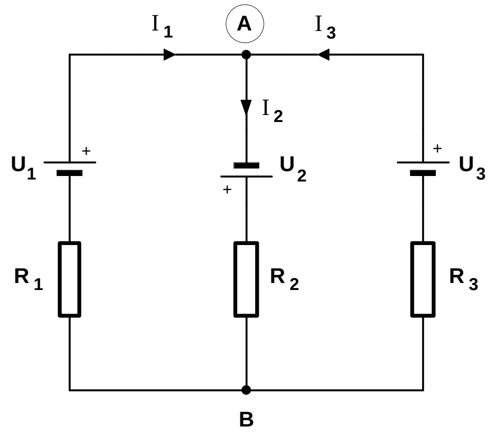
$U_1 = 10$ V
$U_2 = 20$ V
$U_3 = 10$ V

$R_1 = 5{,}0\ \Omega$
$R_2 = 12{,}5\ \Omega$
$R_3 = 5{,}0\ \Omega$

gesucht :

$I_2 = ?$

Lösung: $I_2 = 2$ A



---

2. gegeben:

R_1 bis $R_7 = 5\ \Omega$

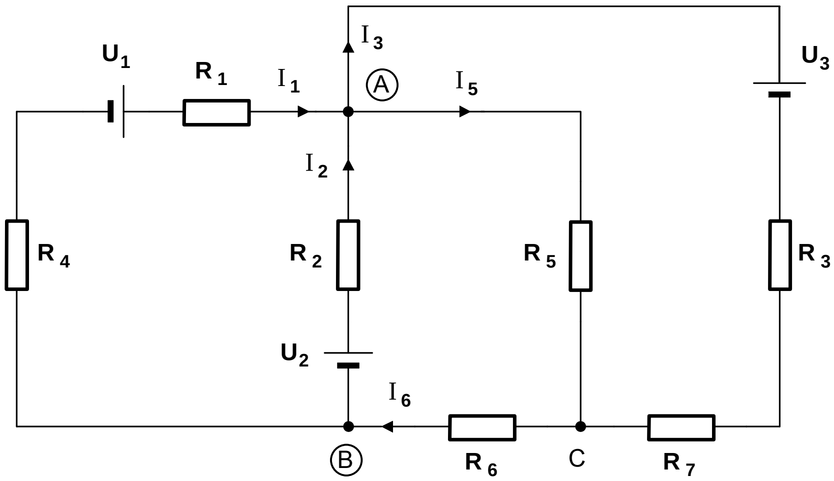
$U_1 = U_2 = U_3 = 210$ V

gesucht:

$I_1 = ?$ $I_2 = ?$

Lösung:

$I_1 = 4$ A
$I_2 = 8$ A



---

3. gegeben:

$R_{i1} = R_{i2} = 5\ \Omega$

$R_1 = 10\ \Omega$ $R_2 = 20\ \Omega$

$R_3 = 10\ \Omega$ $R_4 = 20\ \Omega$

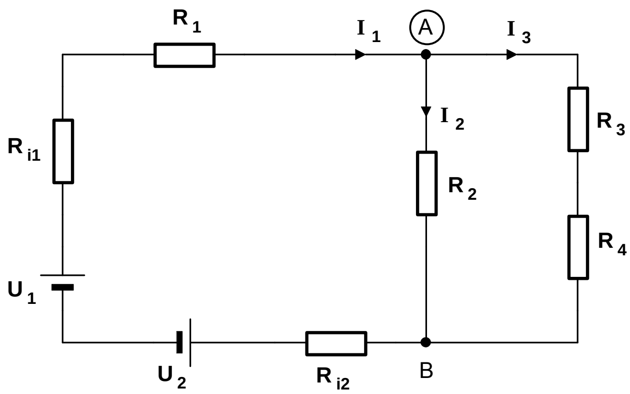
$U_1 = 200$ V $U_2 = 100$ V

gesucht:

$I_1 = ?\ I_2 = ?$

$I_3 = ?$

Lösung: $I_1 = 3{,}125$ A $I_2 = 1{,}875$ A $I_3 = 1{,}250$ A



---

4. gegeben:

$R_1 = 10\ \Omega$ $R_2 = 30\ \Omega$ $R_3 = 5\ \Omega$
$R_4 = 20\ \Omega$ $R_5 = 5\ \Omega$ $R_6 = 20\ \Omega$ $R_7 = 2\ \Omega$

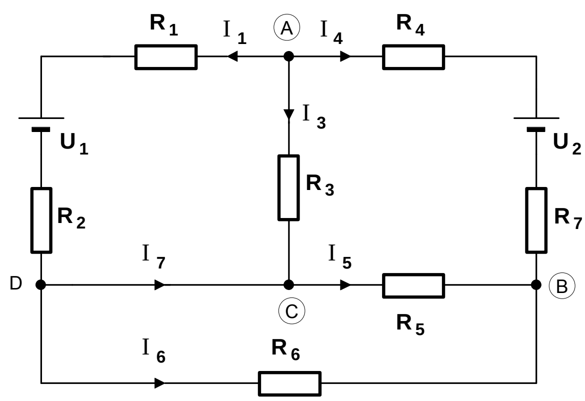
$U_1 = 100$ V $U_2 = 150$ V

gesucht: **Sämtliche Zweigströme !**

Lösung:

$I_1 = -1{,}712$ A $I_3 = 6{,}277$ A $I_4 = -4{,}565$ A

$I_5 = 3{,}652$ A $I_6 = 0{,}913$ A $I_7 = -2{,}625$ A



1	I_1	$+\ I_2$	$-\ I_3$	$-\ I_5$		=	**0**	
2	I_1	$+\ I_2$			$-\ I_6$	=	**0**	
3	$2\ I_1$	$-\ I_2$				=	**0**	
4		I_2		$+\ I_5$	$+\ I_6$	=	**+ 42 A**	
5			$2\ I_3$	$-\ I_5$		=	**– 42 A**	

1	I_1	$+\ I_2$	$-\ I_3$	$-\ I_5$		=	**0**	**· 2**
2+4	I_1	$+\ 2\ I_2$		$+\ I_5$	$+\ 0$	=	**+ 42 A**	
3	$2\ I_1$	$-\ I_2$				=	**0**	
5			$2\ I_3$	$-\ I_5$		=	**– 42 A**	

1	$2\ I_1$	$+\ 2\ I_2$	$-\ 2\ I_3$	$-\ 2\ I_5$		=	**0**
2+4 = 2'	I_1	$+\ 2\ I_2$		$+\ I_5$	$+\ 0$	=	**+ 42 A**
3	$2\ I_1$	$-\ I_2$				=	**0**
5			$2\ I_3$	$-\ I_5$		=	**– 42 A**

1+5 = 1'	$2\ I_1$	$+\ 2\ I_2$	$+\ 0$	$-\ 3\ I_5$		=	**– 42 A**	
2+4 = 2'	I_1	$+\ 2\ I_2$		$+\ I_5$	$+\ 0$	=	**+ 42 A**	**· 3**
3	$2\ I_1$	$-\ I_2$				=	**0**	

1+5 = 1'	$2\ I_1$	$+\ 2\ I_2$	$+\ 0$	$-\ 3\ I_5$	=	**– 42 A**
2+4 = 2'	$3\ I_1$	$+\ 6\ I_2$		$+\ 3\ I_5$	=	**+ 126 A**
3	$2\ I_1$	$-\ I_2$			=	**0**

1'+2' = 1"	$5\ I_1$	$+\ 8\ I_2$	$+\ 0$	=	**+ 84 A**	
3	$2\ I_1$	$-\ I_2$		=	**0**	**· 8**

1'+2' = 1"	$5\ I_1$	$+\ 8\ I_2$	$+\ 0$	=	**+ 84 A**
3	$16\ I_1$	$-\ 8\ I_2$		=	**0**

1"+3	$21\ I_1$	$+\ 0$	=	**+ 84 A**

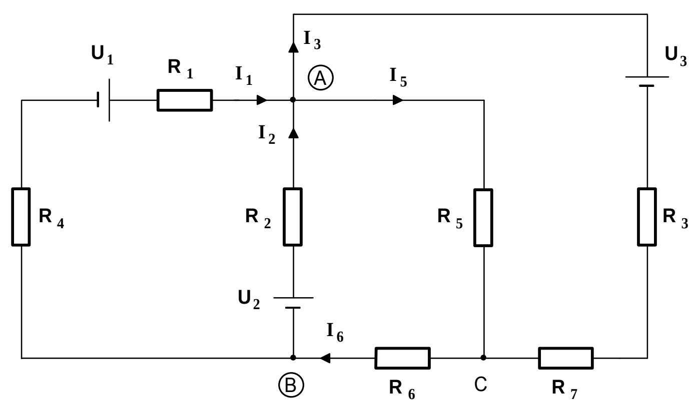
$$+\ 21\ I_1 = +\ 84\ \text{A}$$

$$I_1 = +\ 4{,}0\ \text{A}$$

1" $\quad 5\ I_1 + 8\ I_2 = +\ 84\ \text{A}$

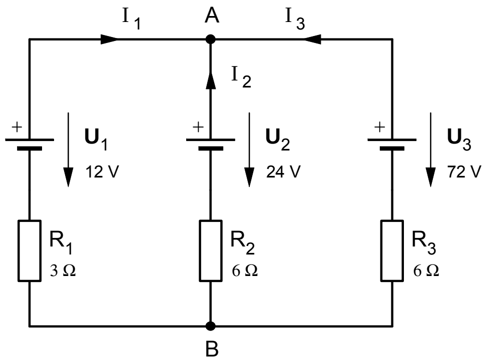
$$+\ 8\ I_2 = +\ 64\ \text{A}$$

$$I_2 = +\ 8{,}0\ \text{A}$$



R_1 =	5 Ω	R_4 =	5 Ω	U_1 =	210 V
R_2 =	5 Ω	R_5 =	5 Ω	U_2 =	210 V
R_3 =	5 Ω	R_6 =	5 Ω	U_3 =	210 V
		R_7 =	5 Ω		

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name:	ET1-16-F.DOC - 02.12.03
Arbeitsblatt Nr. **16** : **Überlagerungsverfahren** nach HELMHOLTZ (Superpositionsmethode)		



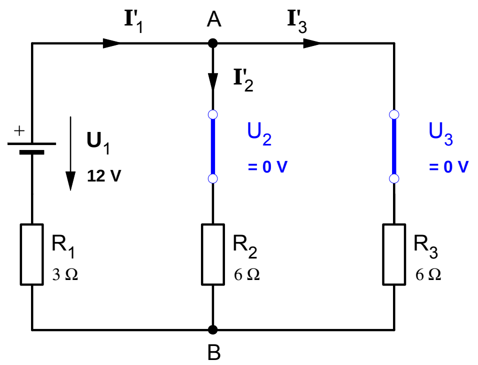
- **Überlagerungssatz** nach Hermann v. HELMHOLTZ (1821-1894)

Helmholtz ging von der Annahme aus, daß sich der **Zweig**strom in jedem Maschenzweig eines Netzwerkes zusammensetzt aus einer Summe von fiktiven **Teil**strömen, wobei jede Spannungsquelle für sich betrachtet in jedem Zweig einen dieser fiktiven Teilströme erzeugt.

Der tatsächliche **Zweig**strom in einem Maschenzweig ergibt sich aus der **Überlagerung** dieser fiktiven **Teil**ströme, wobei bei deren Addition die jeweilige Stromrichtung durch entsprechende Vorzeichensetzung zu berücksichtigen ist.

Zur Darstellung dieses Verfahrens sollen die Zweigströme in dem nebenstehenden Schaltungsbeispiel berechnet werden.

1. Berechnung der **fiktiven Teilströme nur mit U_1** (Dazu werden U_2 und U_3 kurzgeschlossen.)



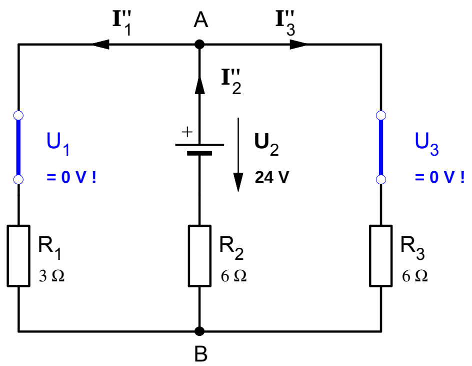
$$R'_{ges} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

$$I'_1 = \frac{U_1}{R'_{ges}} \quad ; \quad U'_{AB} = I'_1 \cdot R_{23}$$

$$I'_2 = \frac{U'_{AB}}{R_2} \quad ; \quad I'_3 = \frac{U'_{AB}}{R_3}$$

I'_1 , I'_2 und I'_3 sind die Teilströme, die nur mit $\mathbf{U_1}$ erzeugt würden.

2. Berechnung der **fiktiven Teilströme nur mit U_2** (Dazu werden U_1 und U_3 kurzgeschlossen.)



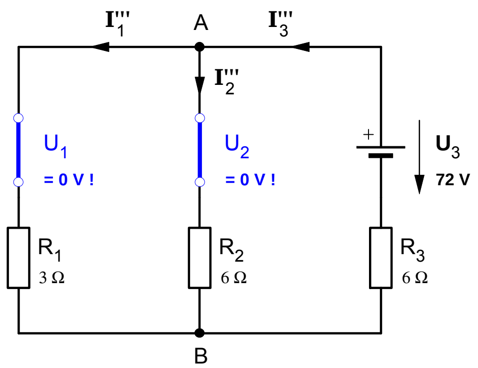
$$R''_{ges} = R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}$$

$$I''_2 = \frac{U_2}{R''_{ges}} \quad ; \quad U''_{AB} = I''_2 \cdot R_{13}$$

$$I''_1 = \frac{U''_{AB}}{R_1} \quad ; \quad I''_3 = \frac{U''_{AB}}{R_3}$$

I''_1 , I''_2 und I''_3 sind die Teilströme, die nur mit $\mathbf{U_2}$ erzeugt würden.

3. Berechnung der **fiktiven Teilströme nur mit U_3** (Dazu werden U_1 und U_2 kurzgeschlossen.)



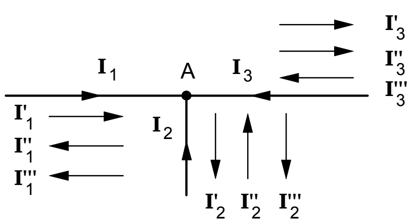
$$R'''_{ges} = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I'''_3 = \frac{U_3}{R'''_{ges}} \quad ; \quad U'''_{AB} = I'''_3 \cdot R_{12}$$

$$I'''_1 = \frac{U'''_{AB}}{R_1} \quad ; \quad I'''_2 = \frac{U'''_{AB}}{R_2}$$

I'''_1 , I'''_2 und I'''_3 sind die Teilströme, die nur mit $\mathbf{U_3}$ erzeugt würden.

4. **Überlagerung** der Teilströme zur Ermittlung der tatsächlichen **Zweigströme**



$$I_1 = I'_1 + (-I''_1) + (-I'''_1)$$

$$I_2 = (-I'_2) + I''_2 + (-I'''_2)$$

$$I_3 = (-I'_3) + (-I''_3) + I'''_3$$

Teilströme mit **gleicher** Richtung wie der jeweilige **Zweig**strom erhalten ein **positives**, die mit **entgegengesetzter** Richtung ein **negatives** Vorzeichen.

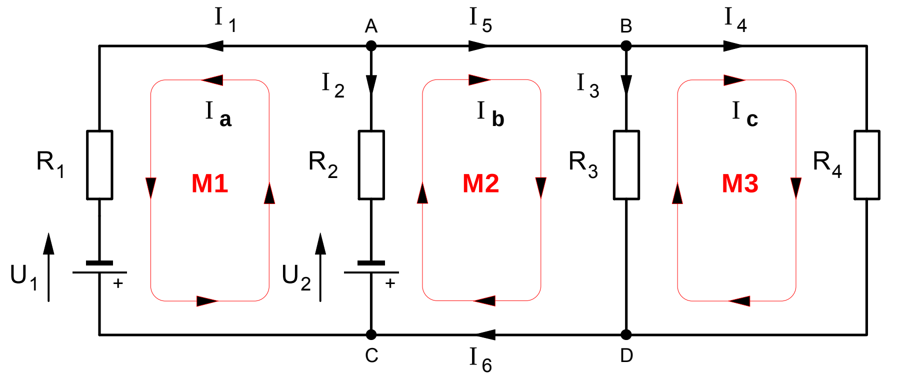
Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-17-F.DOC - 23.09.05
Arbeitsblatt Nr. **17** :	**Das Kreisstrom-Verfahren** (auch: Maschenstrom-Verfahren)

1. Festlegung der **Richtungen** der **Zweigströme**

Die Richtungen der Zweigströme können beliebig festgelegt werden. Sofern die gewählte Stromrichtung mit der tatsächlichen Stromrichtung nicht übereinstimmt, so ergibt sich bei der Berechnung für den jeweiligen Zweigstrom ein negativer Wert.

2. Festlegung unabhängiger Maschen

Die Bestimmung voneinander unabhängiger Maschen sollte mit Hilfe des »vollständigen Baumes« erfolgen.



Netzwerk – Beispiel mit 6 Zweigströmen

Berechnen Sie sämtliche Zweigströme. Gehen Sie von folgenden Werten aus:

$U_1 = 75\,V$ $U_2 = 90\,V$ $R_1 = 2{,}1\,\Omega$ $R_2 = 2{,}8\,\Omega$

$R_3 = 140\,\Omega$ $R_4 = 120\,\Omega$

3. Zuordnung von **Kreisströmen**

Jeder Masche wird ein Kreisstrom (auch: Maschenstrom) zugeordnet. Auch deren Richtung kann beliebig festgelegt werden. Die gewählte Kreisstromrichtung wird in der jeweiligen Masche als positive Stromrichtung angenommen.

4. Aufstellen der **Maschengleichungen** mit den Kreisströmen

Das Aufstellen der Maschengleichungen erfolgt gemäß der Maschenregel. Die Spannungsabfälle sind als Produkt anzugeben aus dem Widerstand und dem Kreisstrom, der durch den jeweiligen Widerstand "fließt" (z.B.: $\mathbf{R_1} \cdot I_a$ in der Masche M1 oder $\mathbf{R_4} \cdot I_c$ in der Masche M3). Falls durch einen Widerstand ***mehrere*** Kreisströme "fließen", so müssen bei der Berechnung des Spannungsabfalls sämtliche Kreisströme und ihre Richtungen berücksichtigt werden (z.B.: $\mathbf{R_2} \cdot (I_a + I_b)$ in der Masche M1 oder $\mathbf{R_3} \cdot (I_b - I_c)$ in der Masche M2).

5. Berechnung der **Kreisströme**

Durch Auflösung des Maschengleichungssystems z.B. mit Hilfe des Additionsverfahrens werden die unbekannten Kreisströme berechnet.

6. Ermittlung der **Zweigströme**

Sofern in einem Zweig **mehr als ein Kreisstrom** angenommen wurde, werden die Zweigströme durch **Überlagerung** der Kreisströme ermittelt. In den übrigen Zweigen ist der Zweigstrom jeweils der Kreisstrom.

---

zu **4. Maschengleichungen** für das Netzwerk-Beispiel

▶ Masche **M1** mit dem Kreisstrom I_a (Die Richtung von I_a ist hier die **positive**.)

$$R_1 \cdot I_a - U_1 + U_2 + R_2 \cdot (I_a + I_b) = 0$$

▶ Masche **M2** mit dem Kreisstrom I_b (Die Richtung von I_b ist hier die **positive**.)

$$U_2 + R_2 \cdot (I_b + I_a) + R_3 \cdot (I_b - I_c) = 0$$

▶ Masche **M3** mit dem Kreisstrom I_c (Die Richtung von I_c ist hier die **positive**.)

$$R_3 \cdot (I_c - I_b) + R_4 \cdot I_c = 0$$

Überlagerung:

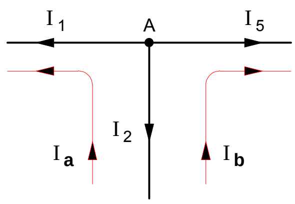


Bild 1

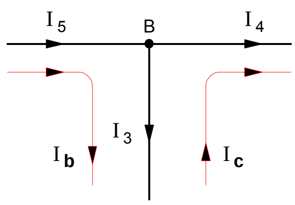


Bild 2

---

zu **6. Ermittlung der Zweigströme** für das Netzwerk-Beispiel

▶ Zweige mit *nur einem* Kreisstrom

$I_1 = I_a$ $I_4 = I_c$ $I_5 = I_b$ $I_6 = I_b$

▶ Zweige mit *mehreren* Kreisströmen (**Überlagerung**)

$I_2 = (-I_a) + (-I_b)$ siehe **Bild 1** $I_3 = (I_b) + (-I_c)$ siehe **Bild 2**

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-18.DOC - 17.11.02

Arbeitsblatt Nr. **18** : **Übungen** zum **Kreisstromverfahren**

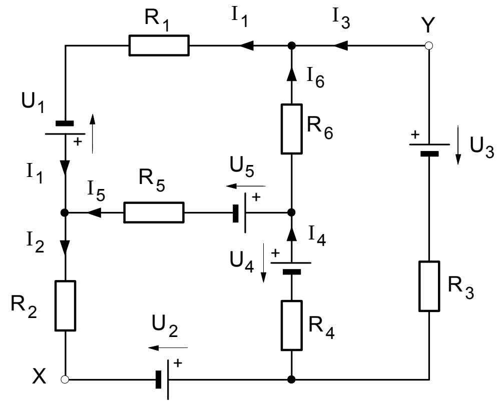
1. In der nebenstehenden Schaltung mit den Spannungen
$\mathbf{U_1} = \mathbf{10}$ V, $\mathbf{U_2} = \mathbf{50}$ V sowie $\mathbf{U_3} = \mathbf{U_4} = \mathbf{U_5} = \mathbf{20}$ V
beträgt **jeder** einzelne Widerstand **10 Ω.**

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Kreisstromverfahrens **sämtliche Zweigströme**.

b) Berechnen Sie die **Spannung** $\mathbf{U_{XY}}$ zwischen **X** und **Y**.

Lösung:

I_1 = 2,75 A I_2 = 3,25 A I_3 = 2,00 A
I_4 = 1,25 A I_5 = 0,50 A I_6 = 0,75 A $\mathbf{U_{XY}}$ = – 50 V

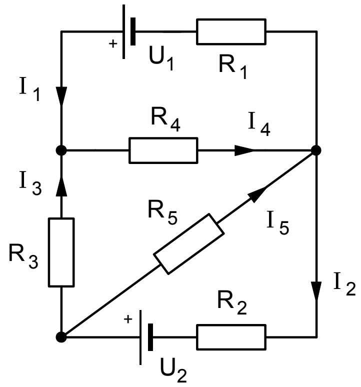


2. Die nebenstehende Schaltung mit den Spannungen $\mathbf{U_1}$ = **9** V und $\mathbf{U_2}$ = **12** V enthält die Widerstände $\mathbf{R_1}$ = **2,4** Ω , $\mathbf{R_2}$ = **1** Ω , $\mathbf{R_3}$ = **2** Ω , $\mathbf{R_4}$ = **3** Ω und $\mathbf{R_5}$ = **5** Ω .

Berechnen Sie mit Hilfe des Kreisstromverfahrens **sämtliche Zweigströme**.

Lösung:

I_1 = 1,0 A I_2 = 3,0 A I_3 = 1,2 A
I_4 = 2,2 A I_5 = 1,8 A



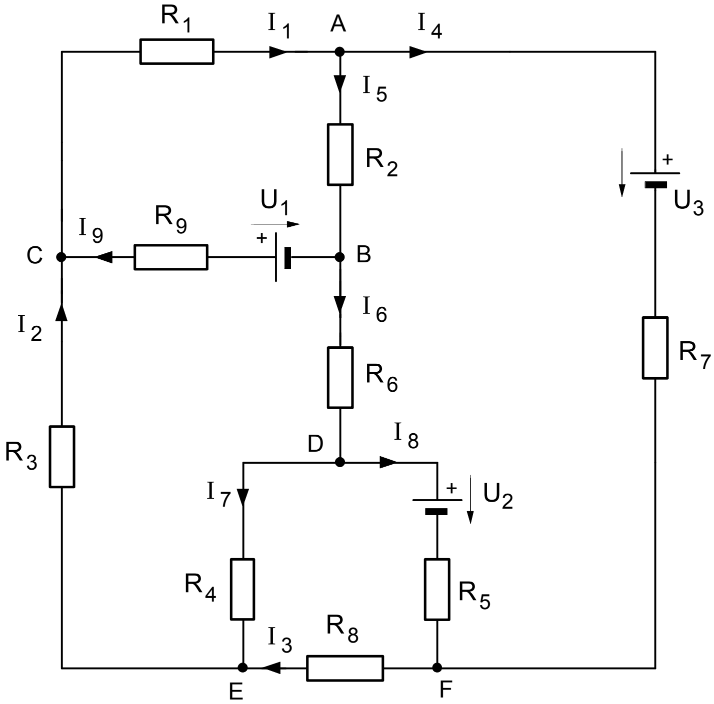
3. Von dem nebenstehenden Netzwerk sind folgende Daten bekannt:

$\mathbf{U_1}$ = **100** V	$\mathbf{U_2}$ = **150** V	$\mathbf{U_3}$ = **200** V
$\mathbf{R_1}$ = **10** Ω	$\mathbf{R_2}$ = **20** Ω	$\mathbf{R_3}$ = **30** Ω
$\mathbf{R_4}$ = **40** Ω	$\mathbf{R_5}$ = **50** Ω	$\mathbf{R_6}$ = **60** Ω
$\mathbf{R_7}$ = **70** Ω	$\mathbf{R_8}$ = **80** Ω	$\mathbf{R_9}$ = **1** Ω

Berechnen Sie mit Hilfe des Kreisstromverfahrens **sämtliche Zweigströme**.

Lösung:

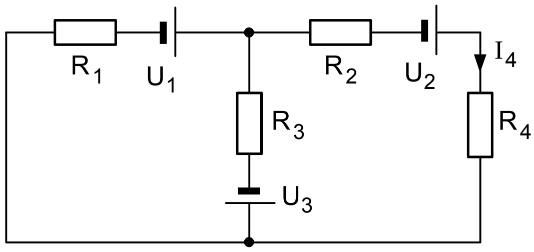
I_1 = + 2,63 A I_2 = – 1,58 A I_3 = – 1,50 A
I_4 = – 0,84 A I_5 = + 3,47 A I_6 = – 0,74 A
I_7 = – 0,08 A I_8 = – 0,66 A I_9 = + 4,21 A



4. Berechnen Sie den Zweigstrom I_4 des nebenstehenden Netzwerks. Gehen Sie von folgenden Daten aus:

$\mathbf{U_1}$ = **4,5** V $\mathbf{U_2}$ = **6,0** V $\mathbf{U_3}$ = **7,5** V
$\mathbf{R_1}$ = **3** Ω $\mathbf{R_2}$ = **5** Ω $\mathbf{R_3}$ = **4** Ω $\mathbf{R_4}$ = **1** Ω

Lösung: I_4 = 0,694 A



Arbeitsblatt Nr. **18** Aufgabe **3** Lösung mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren

M1 $R_1\,I_a + R_2\,(I_a - I_d) + R_9\,(I_a - I_b) = +U_1$

M2 $R_9\,(I_b - I_a) + R_6\,(I_b - I_d) + R_4\,(I_b - I_c) + R_3\,I_b = -U_1$

M3 $R_5\,(I_c - I_d) + R_4\,(I_c - I_b) + R_8\,I_c = -U_2$

M4 $R_5\,(I_d - I_c) + R_6\,(I_d - I_b) + R_2\,(I_d - I_a) + R_7\,I_d = +U_2 - U_3$

$I_a = I_1$	$R_1 = 10\,\Omega$	$R_5 = 50\,\Omega$	$R_9 = 1\,\Omega$
$I_b = I_2$	$R_2 = 20\,\Omega$	$R_6 = 60\,\Omega$	$U_1 = 100$ V
$I_c = I_3$	$R_3 = 30\,\Omega$	$R_7 = 70\,\Omega$	$U_2 = 150$ V
$I_d = I_4$	$R_4 = 40\,\Omega$	$R_8 = 80\,\Omega$	$U_3 = 200$ V

	I_a	I_b	I_c	I_d	=		
M1	31 I_a	− I_b		− 20 I_d	=	+ 100 A	: 31
M2	− I_a	+ 131 I_b	− 40 I_c	− 60 I_d	=	− 100 A	· (−1)
M3		− 40 I_b	+ 170 I_c	− 50 I_d	=	− 150 A	
M4	− 20 I_a	− 60 I_b	− 50 I_c	+ 200 I_d	=	− 50 A	: (−20)

	I_a	I_b	I_c	I_d	=		
M1	I_a	− 0,03 I_b		− 0,65 I_d	=	+ 3,23 A	
M2	I_a	− 131 I_b	+ 40 I_c	+ 60 I_d	=	+ 100 A	
M3		− 40 I_b	+ 170 I_c	− 50 I_d	=	− 150 A	
M4	I_a	+ 3 I_b	+ 2,5 I_c	− 10 I_d	=	+ 2,5 A	

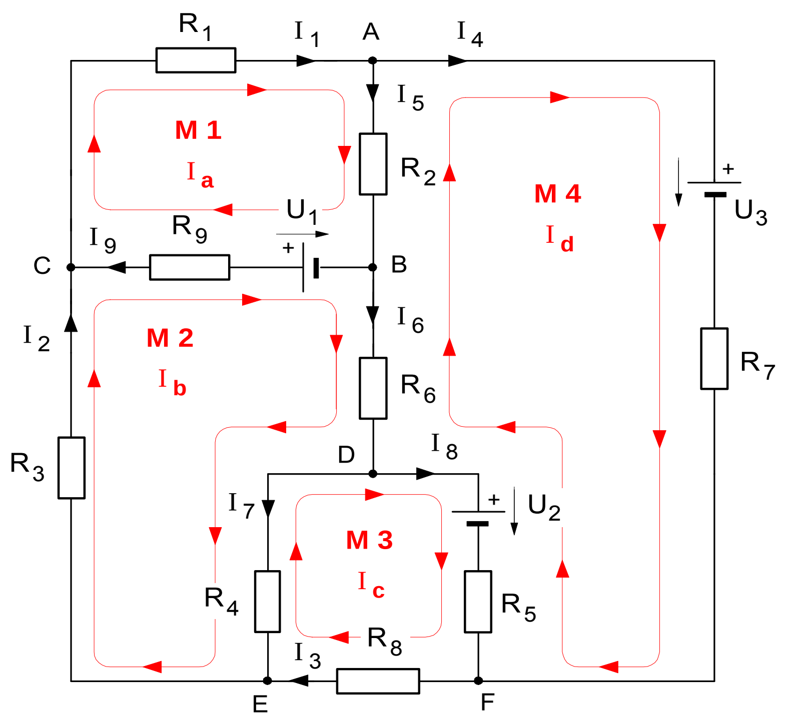
	I_a	I_b	I_c	I_d	=		
M1	I_a	− 0,03 I_b		− 0,65 I_d	=	+ 3,23 A	
M1-M2		130,97 I_b	− 40 I_c	− 60,65 I_d	=	− 96,8 A	: 130,97
M3		− 40 I_b	+ 170 I_c	− 50 I_d	=	− 150 A	: (−40)
M1-M4		− 3,03 I_b	− 2,5 I_c	+ 9,35 I_d	=	+ 0,73 A	: (−3,03)

	I_a	I_b	I_c	I_d	=	
M1	I_a	− 0,03 I_b		− 0,65 I_d	=	+ 3,23 A
1		I_b	− 0,31 I_c	− 0,46 I_d	=	− 0,74 A
2		I_b	− 4,25 I_c	+ 1,25 I_d	=	+ 3,75 A
3		I_b	+ 0,83 I_c	− 3,09 I_d	=	− 0,24 A

	I_a	I_b	I_c	I_d	=		
M1	I_a	− 0,03 I_b		− 0,65 I_d	=	+ 3,23 A	
1		I_b	− 0,31 I_c	− 0,46 I_d	=	− 0,74 A	
1 – 2			+ 3,94 I_c	− 1,71 I_d	=	− 4,49 A	: 3,94
1 – 3			− 1,13 I_c	+ 2,62 I_d	=	− 0,5 A	: (−1,13)

	I_a	I_b	I_c	I_d	=	
M1	I_a	− 0,03 I_b		− 0,65 I_d	=	+ 3,23 A
1		I_b	− 0,31 I_c	− 0,46 I_d	=	− 0,74 A
a			I_c	− 0,43 I_d	=	− 1,14 A
b			I_c	− 2,32 I_d	=	+ 0,44 A

	I_a	I_b	I_c	I_d	=		
M1	I_a	− 0,03 I_b		− 0,65 I_d	=	+ 3,23 A	
1		I_b	− 0,31 I_c	− 0,46 I_d	=	− 0,74 A	
a			I_c	− 0,43 I_d	=	− 1,14 A	
a – b				1,89 I_d	=	− 1,58 A	: 1,89
				I_d	=	− 0,84 A	

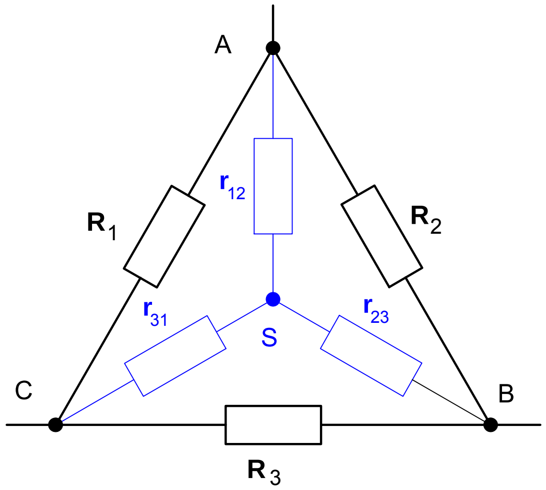


Ermittlung der **Zweigströme** durch **Überlagerung der Kreisströme**

$I_1 = I_a$	$I_5 = I_a + (-I_d)$
$I_2 = I_b$	$I_6 = I_b + (-I_d)$
$I_3 = I_c$	$I_7 = I_b + (-I_c)$
$I_4 = I_d$	$I_8 = I_c + (-I_d)$

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name:	ET1-19-F.DOC - 25.02.04
Arbeitsblatt Nr. **19** :	**Dreieck-Stern-Umwandlung** (und umgekehrt)	

1. Dreieck- und Stern-Schaltung



2. Prinzip der Dreieck-Stern-Umwandlung

Jede Dreieckschaltung kann in eine elektrisch gleichwertige **Sternschaltung** umgewandelt werden.

Die Dreieckschaltung mit den **Dreieckwiderständen R_1** , **R_2** und **R_3** zwischen den Knotenpunkten A, B und C läßt sich in eine elektrisch gleichwertige Sternschaltung mit den **Sternwiderständen r_{12}** , **r_{23}** und **r_{31}** umwandeln.

Umgekehrt läßt sich die **Sternschaltung** mit **r_{12}** , **r_{23}** und **r_{31}** in eine elektrisch gleichwertige **Dreieckschaltung** mit **R_1**, **R_2** und **R_3** umwandeln

a) Dreieck-Stern-Umwandlung

- gegeben: R_1 R_2 R_3
- gesucht: r_{12} r_{23} r_{31}

Sternwiderstände :

$$\boxed{r_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

$$\boxed{r_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

$$\boxed{r_{31} = \frac{R_3 \cdot R_1}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

b) Stern-Dreieck-Umwandlung

- gegeben: r_{12} r_{23} r_{31}
- gesucht: R_1 R_2 R_3

Dreieckwiderstände :

$$\boxed{R_1 = r_{12} + r_{31} + \frac{r_{12} \cdot r_{31}}{r_{23}}}$$

$$\boxed{R_2 = r_{12} + r_{23} + \frac{r_{12} \cdot r_{23}}{r_{31}}}$$

$$\boxed{R_3 = r_{31} + r_{23} + \frac{r_{31} \cdot r_{23}}{r_{12}}}$$

3. Übungsaufgabe : Brückenschaltung

Berechnen Sie für die nebenstehende Brückenschaltung

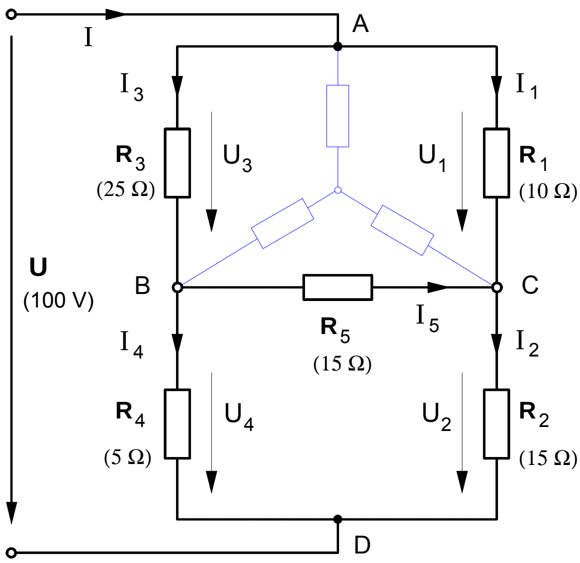
a) den **Ersatzwiderstand** der Schaltung zwischen den Knotenpunkten **A** und **D** ,

b) die **Brückenspannung U_{BC}** zwischen den Knotenpunkten **B** und **C** und schließlich

c) den **Brückenstrom** I_5 sowie alle übrigen **Zweigströme**.

Lösungen:

R_{AD} = 12,38 Ω U_{BC} = –25,8 V I_5 = –1,72 A
I_1 = 5,03 A I_2 = 3,3 A I_3 = 3,04 A
I_4 = 4,77 A



Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-20-1.DOC - 28.11.02	
Arbeitsblatt Nr. **20** :	Netzwerksberechnung mit der **Ersatzspannungsquelle**	Seite **1**

Grundlage der folgenden Darstellung des Ersatzspannungsquellen-Verfahrens ist das im Unterricht behandelte *Einführungsbeispiel* (siehe Mitschrift). Dabei wurde angenommen, daß der Widerstand $\mathbf{R_3}$ als Lastwiderstand an einen aktiven Zweipol mit der Spannungsquelle **U** und den Widerständen $\mathbf{R_1}$ und $\mathbf{R_2}$ angeschlossen sei.

• Zusammenfassung zur Bestimmung der Kennwerte $\mathbf{U_0}$ und $\mathbf{R_i}$ der **Ersatzspannungsquelle**

1. Zur Bestimmung der **Quellenspannung** $\mathbf{U_0}$ der Ersatzspannungsquelle denken wir uns den ***Widerstand*** $\mathbf{R_3}$ zunächst ***herausgetrennt***, d.h. es wird angenommen, daß der aktive Zweipol im Leerlauf betrieben wird (siehe **Bild 1**). Die ***Leerlaufspannung*** $\mathbf{U_{ABo}}$ an den Klemmen des aktiven Zweipols ist dann die Quellenspannung $\mathbf{U_0}$ der Ersatzspannungsquelle, d.h. $\mathbf{U_0} = \mathbf{U_{ABo}}$ (im Leerlauf bei $I = \mathbf{0}$).

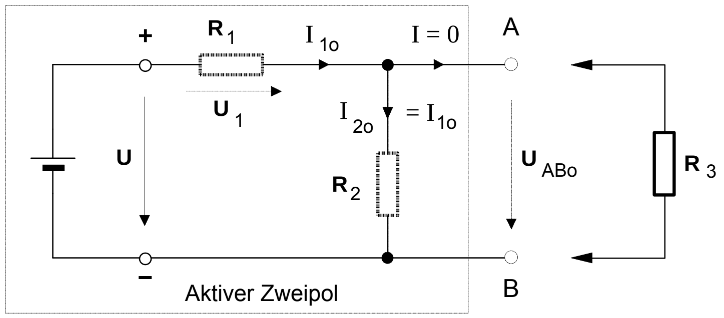


Bild 1: Aktiver Zweipol im **Leerlauf**

2. Zur Bestimmung des **Innenwiderstandes** $\mathbf{R_i}$ der Ersatzspannungsquelle denken wir uns die ***Spannungsquelle*** in **Bild 1** ***kurzgeschlossen*** (d.h. wir setzen **U = 0 !!**) und ermitteln den Ersatzwiderstand $\mathbf{R_{AB}}$ des aktiven Zweipols zwischen den Klemmen **A** und **B** (siehe **Bild 2**). Dieser ***Ersatzwiderstand*** $\mathbf{R_{AB}}$ ist dann der Innenwiderstand $\mathbf{R_i}$ der Ersatzspannungsquelle, d.h.: $\mathbf{R_i} = \mathbf{R_{AB}}$ (bei **U** = **0**).

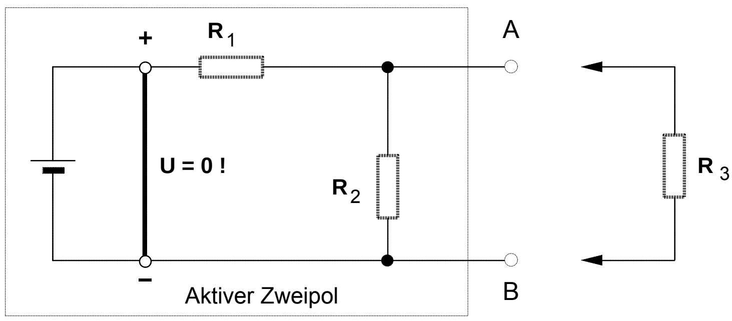


Bild 2: Aktiver Zweipol mit **kurzgeschlossener** Spannungsquelle

3. Mit der Bestimmung der Kennwerte $\mathbf{U_0}$ und $\mathbf{R_i}$ der **Ersatzspannungsquelle** haben wir für den aktiven Zweipol eine vereinfachte und elektrisch gleichwertige Ersatzschaltung gewonnen (siehe **Bild 3**).

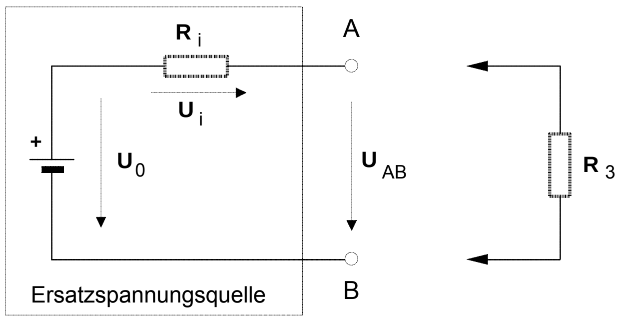


Bild 3: Ersatzspannungsquelle für den aktiven Zweipol

4. Zur **Untersuchung der Schaltung** gemäß der jeweiligen Fragestellung denken wir uns den ***Widerstand*** $\mathbf{R_3}$ jetzt an die ***Ersatzspannungsquelle*** (siehe **Bild 4**) angeschlossen und bestimmen auf der Grundlage dieses vereinfachten Ersatzschaltbildes die geforderten Größen, also in unserem Aufgabenbeispiel den Strom I_3 und die Spannung $\mathbf{U_{AB}}$.

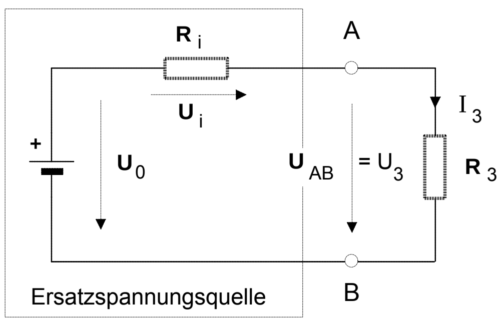


Bild 4: Ersatzspannungsquelle mit angeschlossenem Widerstand $\mathbf{R_3}$

• Aufgabenbeispiel zur **Ersatzspannungsquelle**

Das Gleichstrom-Netzwerk in **Bild 1** soll mit Hilfe des Verfahrens der sog. "**Ersatzspannungsquelle**" unter folgenden Gesichtspunkten untersucht werden.

a) Stellen Sie die dem Potentiometer R_a zugeführte Leistung P_a in Abhängigkeit von R_a graphisch in einem entsprechenden Diagramm dar.

b) Wie groß muß R_a gewählt werden, damit dem Potentiometer die Leistung P_a = **20** W zugeführt wird?

c) Wie groß muß R_a gewählt werden, damit dem Potentiometer die **maximale** Leistung P_{amax} zugeführt wird (Leistungsanpassung). Berechnen Sie diese maximale Leistung P_{amax} .

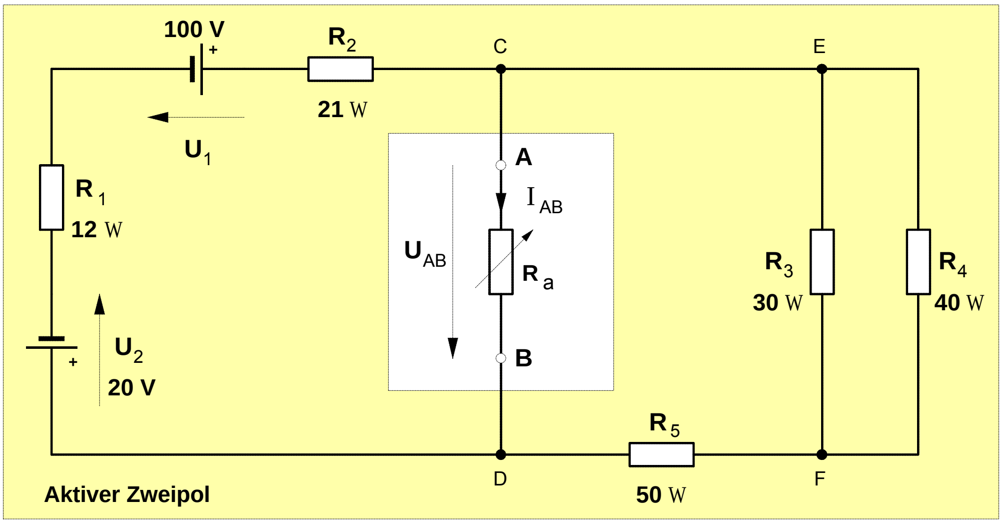


Bild 1 :

Darstellung des Netzwerks als **aktiven Zweipol** mit den Klemmen **A** und **B** und dem Widerstand R_a als daran angeschlossenen **passiven Zweipol**

• **Verfahren** zur Bestimmung der Kennwerte U_0 und R_i der **Ersatzspannungsquelle** für den aktiven Zweipol:

► Zur Bestimmung der <u>**Quellenspannung**</u> U_0 der Ersatzspannungsquelle denken wir uns den ***Widerstand*** R_a zunächst ***herausgetrennt***, d.h. er wird als $R_a = \infty$ angenommen (Leerlauffall - siehe **Bild 2**). Die ***Leerlaufspannung*** U_{ABo} des aktiven Zweipols ist dann die Quellenspannung U_0 der Ersatzspannungsquelle, d.h. $U_0 = U_{ABo}$ (bei $R_a = \infty$).

► Zur Bestimmung des <u>**Innenwiderstandes**</u> R_i der Ersatzspannungsquelle denken wir uns sämtliche ***Spannungsquellen*** in **Bild 2** ***kurzgeschlossen*** (d.h. wir setzen $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ **!!**) und ermitteln den Ersatzwiderstand R_{AB} des aktiven Zweipols zwischen den Klemmen **A** und **B**. Der ***Ersatzwiderstand*** R_{AB} ist dann der Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle, d.h.: $R_i = R_{AB}$ (bei $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$).

► Zur <u>Untersuchung der Schaltung</u> gemäß der oben genannten Fragestellungen denken wir uns den ***Widerstand*** R_a an die ***Ersatzspannungsquelle*** (siehe **Bild 3**) angeschlossen und berechnen auf der Grundlage dieses vereinfachten Ersatzschaltbildes die geforderten Größen.

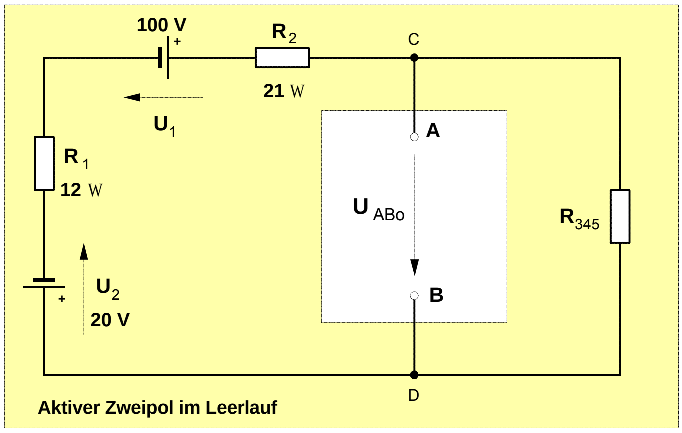


Bild 2 : Vereinfachter aktiver Zweipol im Leerlauf

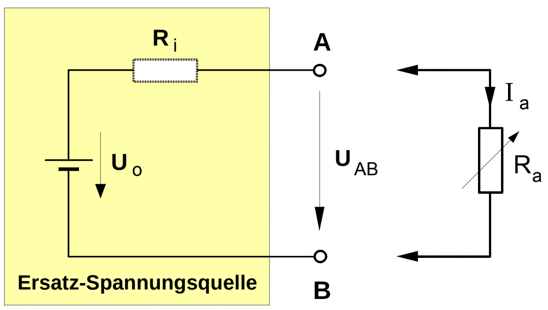
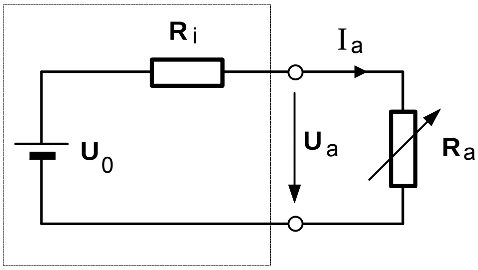


Bild 3 : Ersatzspannungsquelle für den aktiven Zweipol

Mathematische Begründung der maximalen Leistungsabgabe bei $R_a = R_i$

- **Problemstellung**: Auf welchen Wert muß $\mathbf{R_a}$ eingestellt werden, damit die Ersatzspannungsquelle an den Außenwiderstand $\mathbf{R_a}$ die größtmögliche Leistung abgibt. Dazu müssen wir als erstes eine Gleichung entwickeln, mit der die Abhängigkeit der Leistung $\mathbf{P_a}$ vom Außenwiderstand $\mathbf{R_a}$ mathematisch beschrieben werden kann.



$$P_a = U_a \cdot I_a = (U_0 - R_i \cdot I_a) \cdot I_a$$

$$= \left(U_0 - R_i \cdot \frac{U_0}{R_i + R_a} \right) \cdot \frac{U_0}{R_i + R_a}$$

$U_0 = \text{const.}$

$R_i = \text{const.}$

- Daraus ergibt sich für die Abhängigkeit $\mathbf{P_a} = f(\mathbf{R_a})$ folgende Funktionsgleichung

$$P_a = U_0^2 \cdot (R_i + R_a)^{-1} - U_0^2 \cdot R_i \cdot (R_i + R_a)^{-2}$$

$(......)^{-n}$ ist eine äußere, $R_i + R_a$ eine innere Funktion.

- Der Graph dieser Funktionsgleichung ist in dem untenstehenden P-R-Diagramm dargestellt.
- Um nun herauszufinden, bei welchem $\mathbf{R_a}$-Wert die maximale Leistung $\mathbf{P_{a\,max}}$ auftritt, bilden wir zunächst die erste Ableitung der Funktion $\mathbf{P_a} = f(\mathbf{R_a})$ und gewinnen damit die Steigungsfunktion :

$$P_a' = \frac{dP_a}{dR_a} = U_0^2 \cdot \underbrace{(-1) \cdot (R_i + R_a)^{-2}}_{\text{1. Ableitung der äußeren Fkt.}} \cdot \underbrace{1}_{\text{1. Abl. d. inneren Fkt.}} - U_0^2 \cdot R_i \cdot \underbrace{(-2) \cdot (R_i + R_a)^{-3}}_{\text{1. Ableitung der äußeren Fkt.}} \cdot \underbrace{1}_{\text{1. Abl. d. inneren Fkt.}}$$

$$P_a' = \frac{dP_a}{dR_a} = -U_0^2 \cdot (R_i + R_a)^{-2} + 2 \cdot U_0^2 \cdot R_i \cdot (R_i + R_a)^{-3} \quad \Leftarrow \quad \textbf{Steigungsfunktion} \quad P_a' = f(R_a)$$

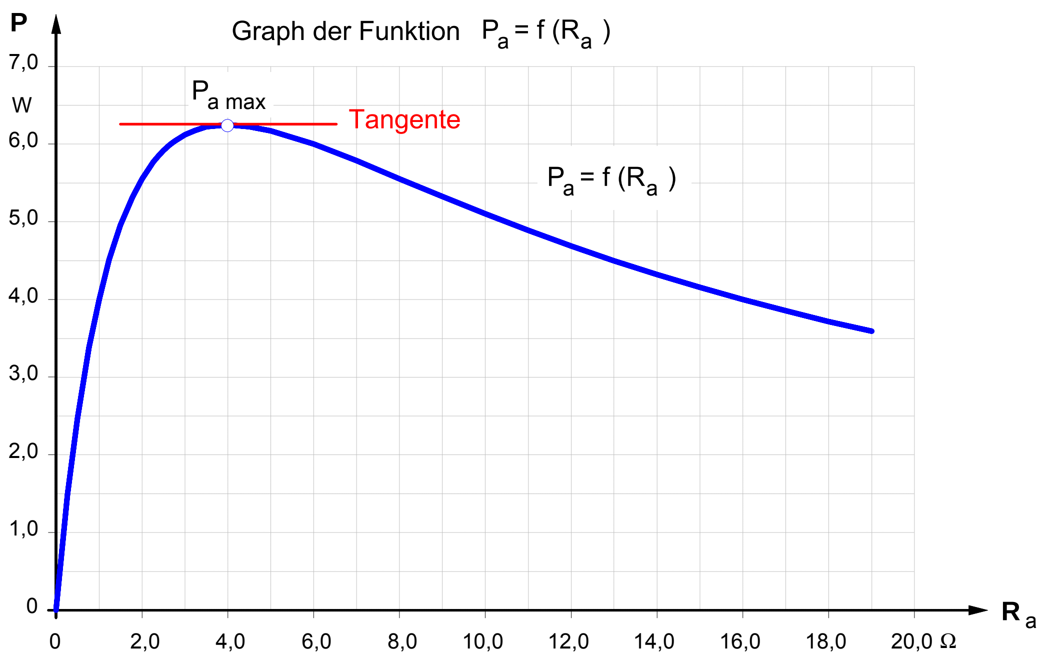
- Im Kurvenpunkt des relativen Maximums ist die Steigung des Graphen **null** (genauer: die Steigung der Tangenten). Daher setzen wir die Steigungungsfunktion $\mathbf{P_a}$' gleich **null** und lösen dann die Gleichung nach $\mathbf{R_a}$ auf.

$$P_a' = \frac{dP_a}{dR_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad -U_0^2 \cdot (R_i + R_a)^{-2} + 2 \cdot U_0^2 \cdot R_i \cdot (R_i + R_a)^{-3} = 0 \quad \Big| : U_0^2$$

$$2 \cdot R_i \cdot (R_i + R_a)^{-3} = (R_i + R_a)^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \cdot R_i \cdot (R_i + R_a)^2}{(R_i + R_a)^3} = \frac{2 \cdot R_i}{R_i + R_a} = 1$$

$$2 \cdot R_i = R_i + R_a$$

$$\underline{\underline{R_a = R_i}} \qquad \text{q.e.d}$$

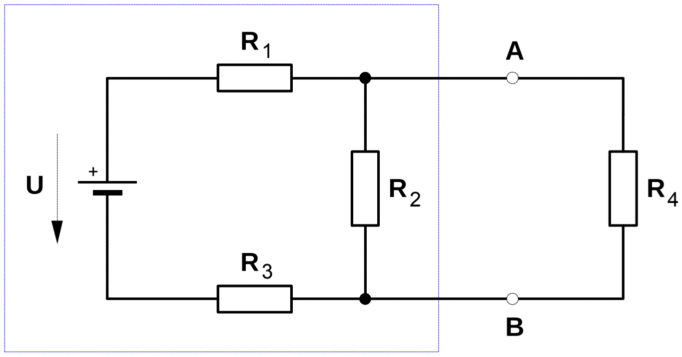


• **Übungsaufgaben** zur Anwendung der **Ersatzspannungsquelle**

1. Der nebenstehende aktive Zweipol mit den Daten **U** = **4** V , $\mathbf{R_1}$ = $\mathbf{R_3}$ = **5** Ω und $\mathbf{R_2}$ = **6** Ω wird mit dem Widerstand $\mathbf{R_4}$ belastet.

a) Wie groß ist der Widerstand $\mathbf{R_4}$ zu wählen, damit ihm die **maximale Leistung** zugeführt wird **?** [R_4 = 3,75 Ω]

b) Wie groß ist diese maximale Leistung **?** [P_{4max} = 150 mW]



---

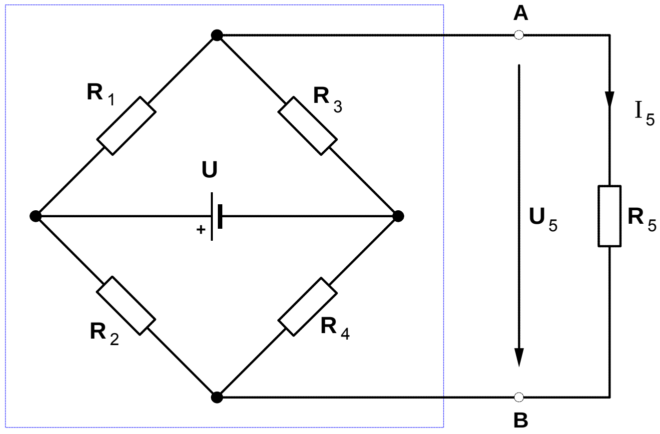
2. Die nebenstehende Brückenschaltung mit den Widerständen

$\mathbf{R_1}$ = $\mathbf{R_4}$ = **3** Ω und $\mathbf{R_2}$ = $\mathbf{R_3}$ = $\mathbf{R_5}$ = **6** Ω

liegt an der Spannung **U** = **12** V.

Berechnen Sie mit Hilfe der Ersatzspannungsquelle die **Spannung** $\mathbf{U_5}$ am Widerstand $\mathbf{R_5}$.

[U_5 = 2,4 V]



---

3. An die Klemmen **A** und **B** im Brückenzweig der nebenstehenden Brückenschaltung ist ein **nicht-linearer Widerstand** $\mathbf{R_5}$ (**VDR**-Widerstand) mit den unten angegebenen Kennlinienwerten angeschlossen.

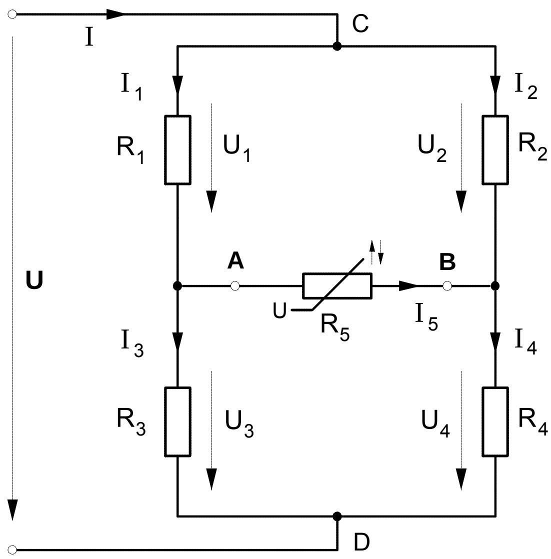
Daten der Brückenschaltung:

$\mathbf{R_1}$ = **10** Ω $\mathbf{R_2}$ = **270** Ω $\mathbf{R_3}$ = **90** Ω $\mathbf{R_4}$ = **30** Ω

U = **15** V

Bestimmen Sie den **Brückenstrom** I_5 .

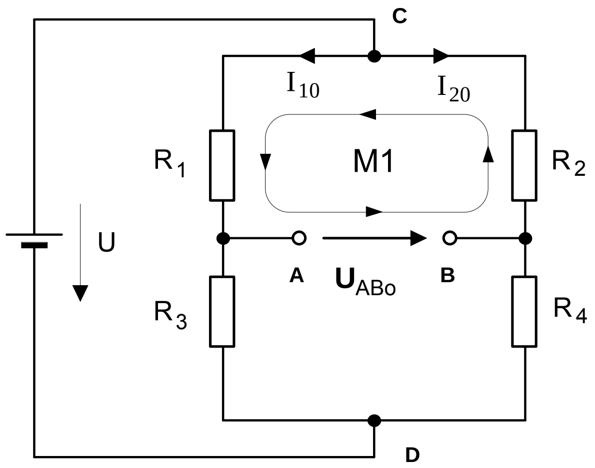
[I_5 = 145 mA]



• **Kennlinienwerte** des **VDR**-Widerstandes:

U	3 V	4 V	5 V	6 V	7 V	8 V	9 V	10 V	11 V	12 V
I	30 mA	50 mA	75 mA	115 mA	155 mA	205 mA	270 mA	340 mA	430 mA	560 mA

1. Schritt : Berechnung der **Quellenspannung U_o** (= $U_{qErs.}$) der **Ersatzspannungsquelle** bei **offenen** Klemmen **A** und **B**



$$R_1 \cdot I_{10} + U_{AB0} - R_2 \cdot I_{20} = 0 \qquad \text{(Masche M1)}$$

$$U_{AB0} = R_2 \cdot I_{20} - R_1 \cdot I_{10}$$

$$U_{AB0} = R_2 \cdot \frac{U}{R_2 + R_4} - R_1 \cdot \frac{U}{R_1 + R_3}$$

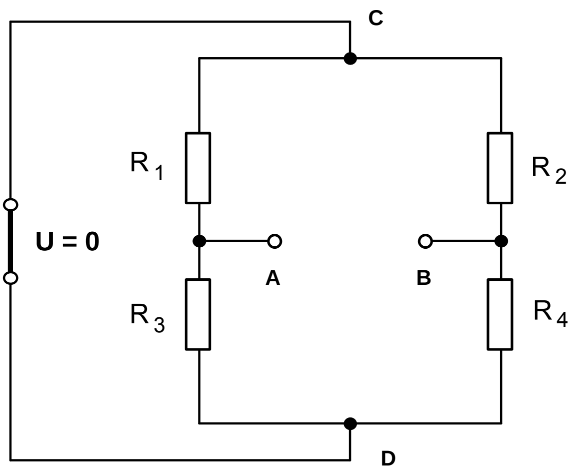
$$U_{AB0} = 270\,\Omega \cdot \frac{15\,V}{270\,\Omega + 30\,\Omega} - 10\,\Omega \cdot \frac{15\,V}{10\,\Omega + 90\,\Omega}$$

$$U_{AB0} = 270\,\Omega \cdot 0{,}05\,A - 10\,\Omega \cdot 0{,}15\,A$$

$$U_{AB0} = 13{,}5\,V - 1{,}5\,V$$

$$\boxed{U_{AB0} = U_0 = 12\,V}$$

2. Schritt : Berechnung des **Innenwiderstandes R_i** der **Ersatzspannungsquelle** bei **kurzgeschlossener Spannungsquelle** (d.h. bei **U = 0**)



Von den Klemmen **A** und **B** aus betrachtet sind bei kurzgeschlossener Spannungsquelle **R_1 und R_3** sowie **R_2 und R_4 parallel** und diese Parallelschaltungen **in Reihe** geschaltet. Damit gilt:

$$R_{AB} = R_{13} + R_{24}$$

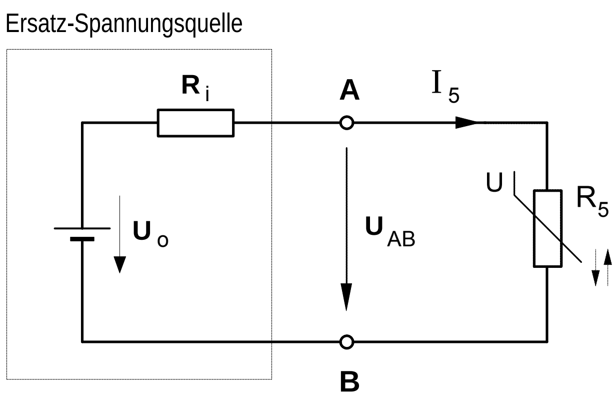
$$R_{AB} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4}$$

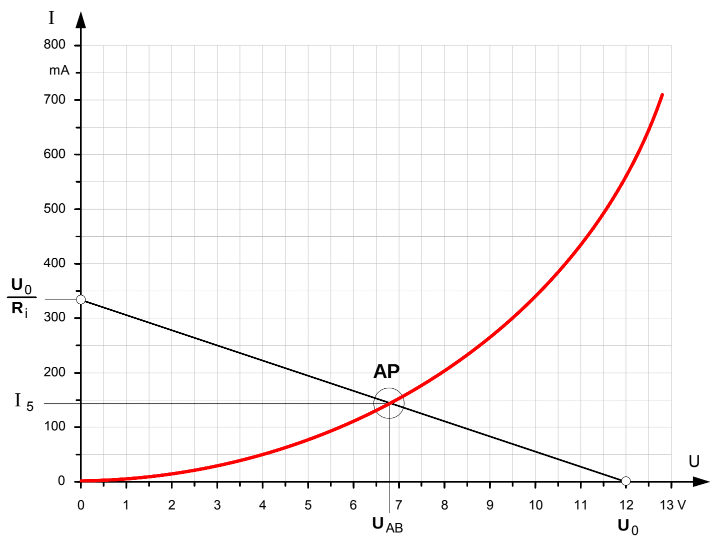
$$R_{AB} = \frac{10\,\Omega \cdot 90\,\Omega}{10\,\Omega + 90\,\Omega} + \frac{270\,\Omega \cdot 30\,\Omega}{270\,\Omega + 30\,\Omega}$$

$$R_{AB} = 9\,\Omega + 27\,\Omega$$

$$\boxed{R_{AB} = R_i = 36\,\Omega}$$

3. Schritt : Anschluß des **nichtlinearen VDR-Widerstandes R_5** an die Klemmen **A** und und **B** der **Ersatzspannungsquelle** und Bestimmung des **Arbeitspunktes** und damit des Stromes I_5 sowie der Spannung **U_{AB}** im **U-I**-Diagramm



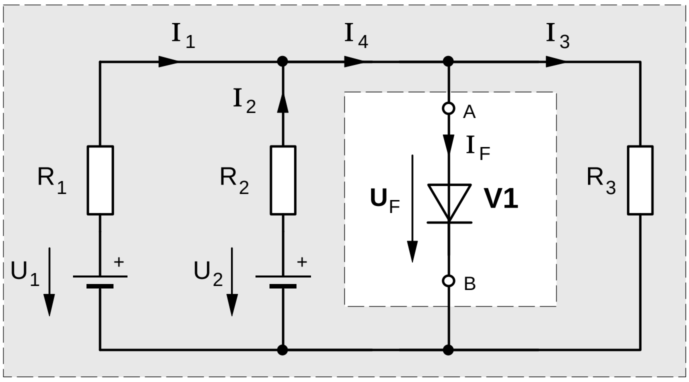


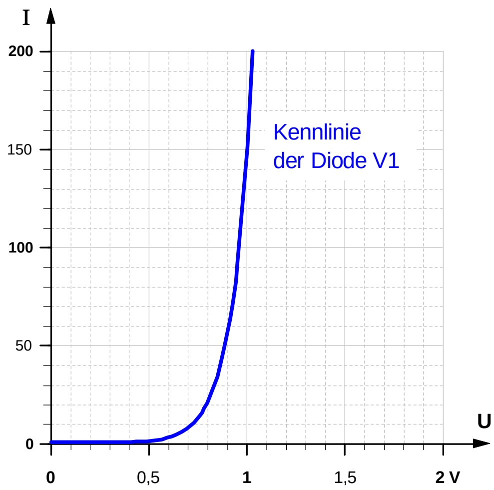
Koordinatenpunkte der R_i-Geraden:

U_0 = 12 V und $\frac{U_0}{R_i} = \frac{12\,V}{36\,\Omega} = 333{,}3\,mA$

• **Weitere Übungsaufgaben** zur Anwendung der **Ersatzspannungsquelle**

1. Bestimmen Sie den Strom I_F und die Spannung $\mathbf{U_F}$ an der Diode **V1** in dem folgenden Netzwerk.





$\mathbf{R_1 = 100\ \Omega}$ $\mathbf{R_2 = 100\ \Omega}$ $\mathbf{R_3 = 50\ \Omega}$

$\mathbf{U_1 = 4{,}5}$ V $\mathbf{U_2 = 3{,}0}$ V [Lösung: I_F = 40 mA ; U_F = 0,86 V]

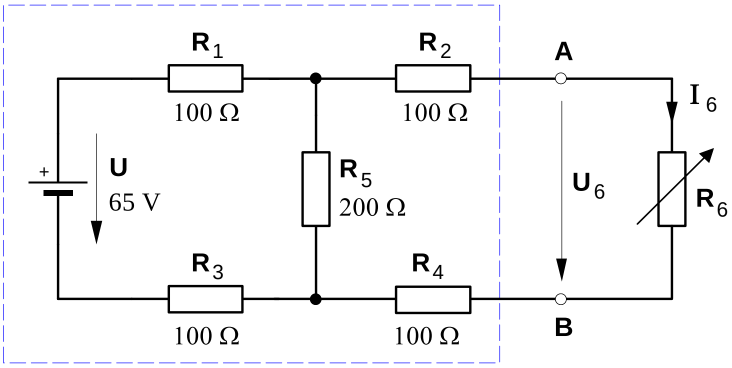
---

2. Zu dem nebenstehenden Netzwerk sind folgende Berechnungen durchzuführen

a) Welche Leistung nimmt der Widerstand $\mathbf{R_6}$ auf, wenn er auf den Wert **200** Ω eingestellt worden ist**?** [P_6 = 0,845 W]

b) Wie groß muß der Widerstand $\mathbf{R_6}$ gewählt werden, damit ihm die **maximal mögliche Leistung** zugeführt wird **?** [R_6 = 300 Ω]

c) Wie groß ist diese maximale Leistung **?** [P_{6max} = 0,88 W]



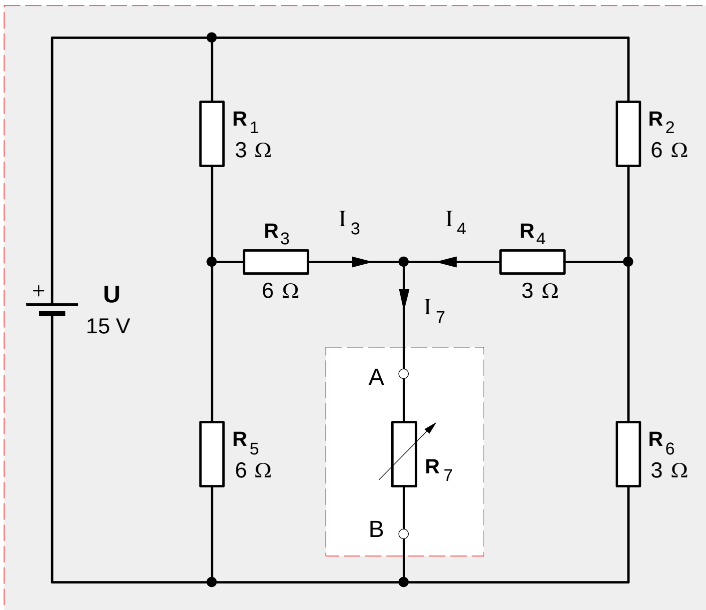
---

3. Das im nebenstehenden Schaltplan dargestellte Netzwerk ist unter folgenden Aspekten zu untersuchen.

a) Welche Leistung wird an dem Widerstand $\mathbf{R_7}$ bei Leistungsanpassung abgegeben**?**

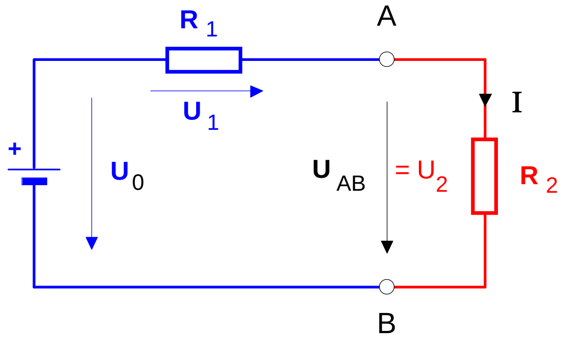
[R_i = 3,1 Ω ; U_0 = 6,9 V ; P = 3,9 W]

b) Stellen Sie die an den Widerstand $\mathbf{R_7}$ abgegebene Leistung in Abhängigkeit von $\mathbf{R_7}$ zwischen $\mathbf{R_7}$ = **0** Ω und $\mathbf{R_7}$ = **10** Ω in einem Leistungs-Widerstands-Diagramm dar.



1. Wiederholung: **Reihenschaltung** aus zwei **linearen** Widerständen

1. Normalbetrieb eines aktiven Zweipols (R_1 = 175 Ω; U_0 = 22 V; R_2 = 100 Ω)



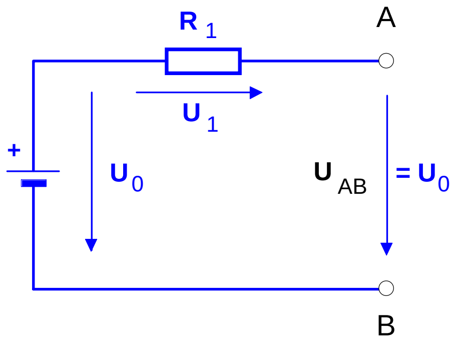
Gesucht: Strom **I** = ?

Lösung:

Strom **I** = **80** mA

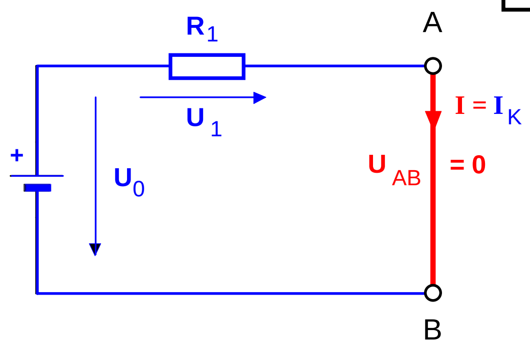
$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

2. Leerlauf: $U_{AB} = U_0$ und $I = 0$

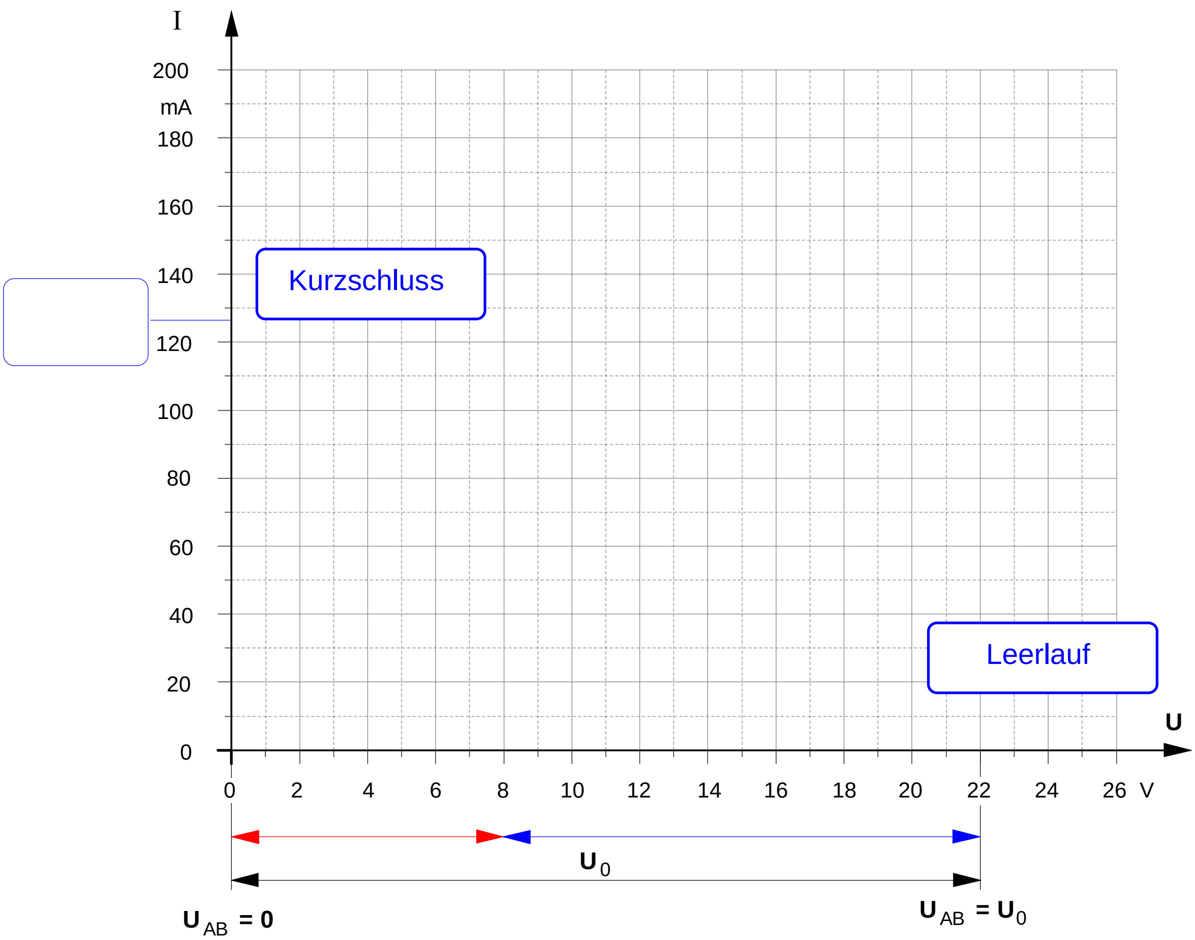


3. Kurzschluss: $U_{AB} = 0$ und $I = I_K$

$$I_K = \frac{U_0}{R_1}$$



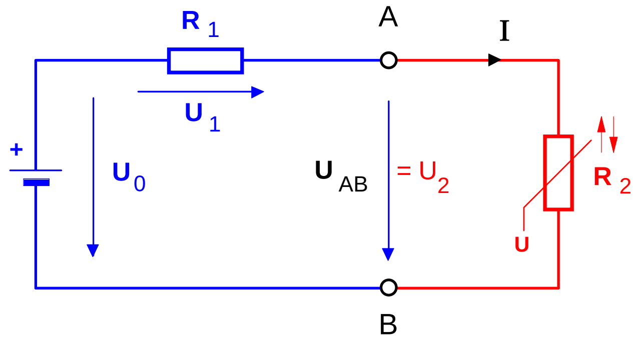
4. Darstellung im U-I-Diagramm



Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name:	ET1-20a-1-2.DOC - 15.12.11
Arbeitsblatt Nr. **20 a)** :	Schaltungen mit **nichtlinearen** Widerständen	Seite **2**

2. Reihenschaltung aus linearen und **nichtlinearen** Widerständen

1. **Normalbetrieb des aktiven Zweipols** (R_1 = 175 Ω; U_0 = 22 V) mit **nichtlinearem VDR**-Widerstand

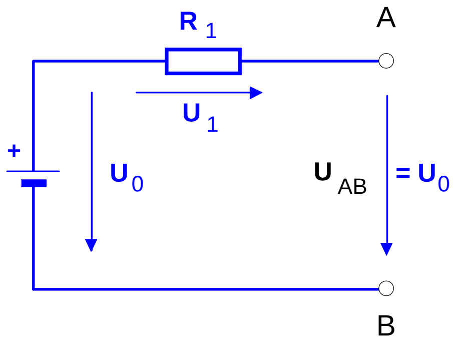


Gesucht: Strom **I** = ?

Lösung:

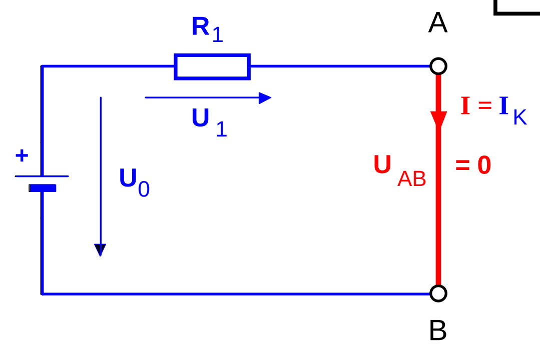
Strom **I** = **74** mA

2. **Leerlauf:** $U_{AB} = U_0$ und $I = 0$

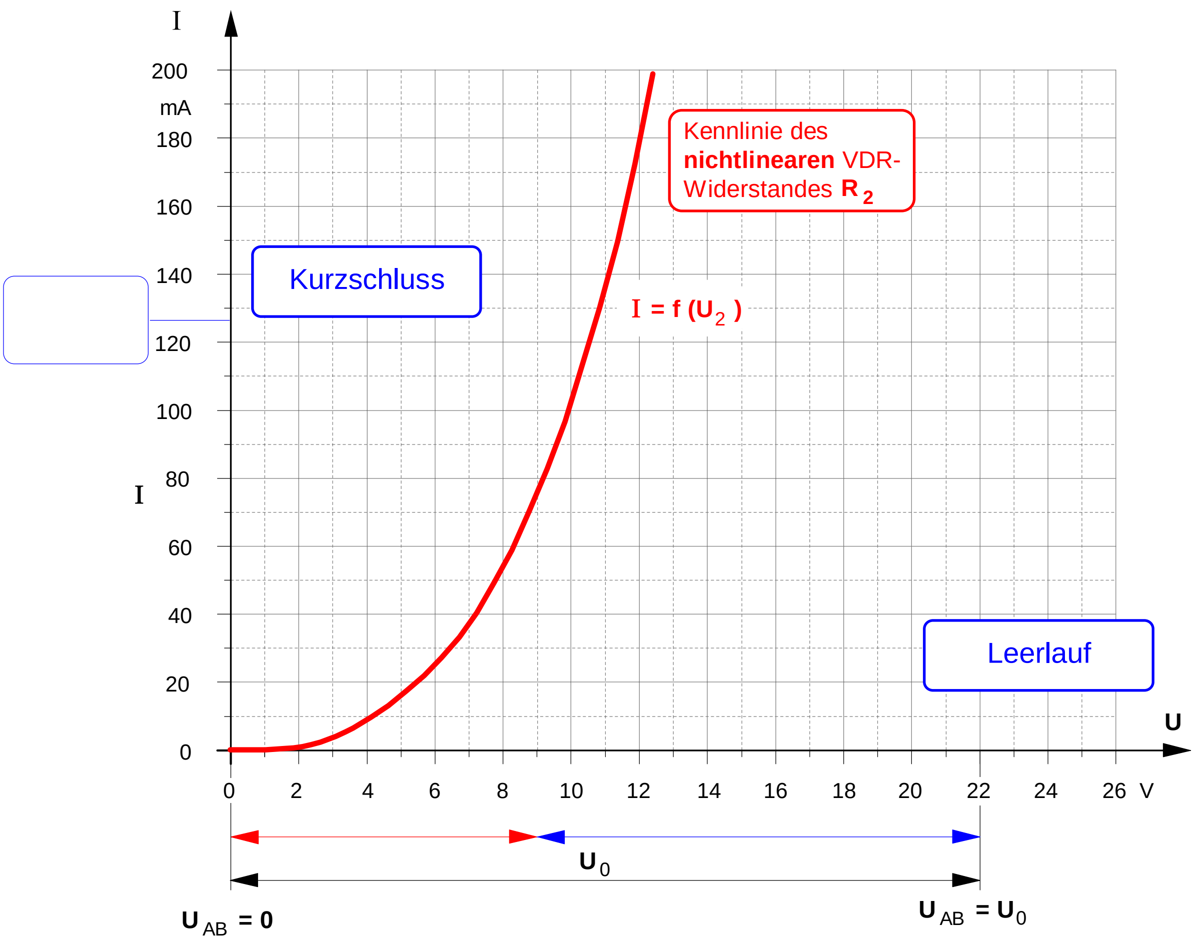


3. **Kurzschluss:** $U_{AB} = 0$ und $I = I_K$

$$I_K = \frac{U_0}{R_1}$$



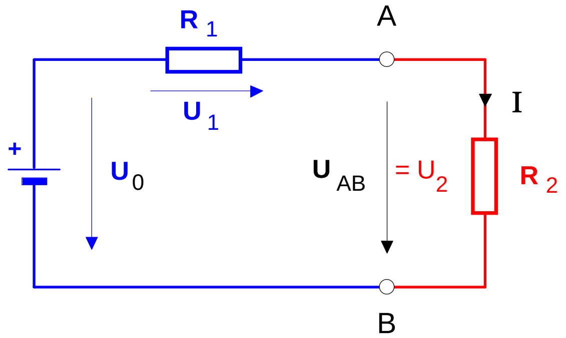
4. **Darstellung im U-I-Diagramm**



Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name:	ET1-20af-1-2.DOC - 15.12.11
Arbeitsblatt Nr. **20 a)** :	Schaltungen mit **nichtlinearen** Widerständen	Seite **1**

1. Wiederholung: **Reihenschaltung** aus zwei **linearen** Widerständen

1. Normalbetrieb eines aktiven Zweipols (R_1 = 175 Ω; U_0 = 22 V; R_2 = 100 Ω)



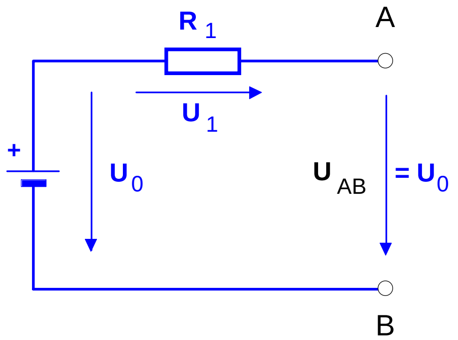
Gesucht: Strom **I** = ?

Lösung:

Strom **I** = **80** mA

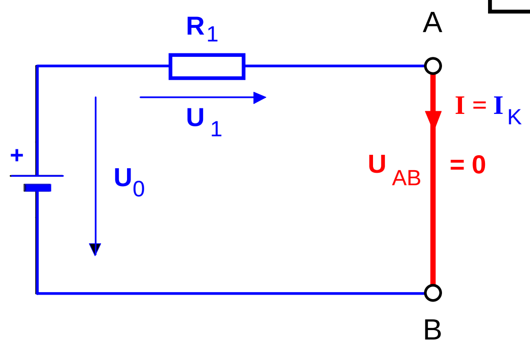
$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

2. Leerlauf: $U_{AB} = U_0$ und $I = 0$

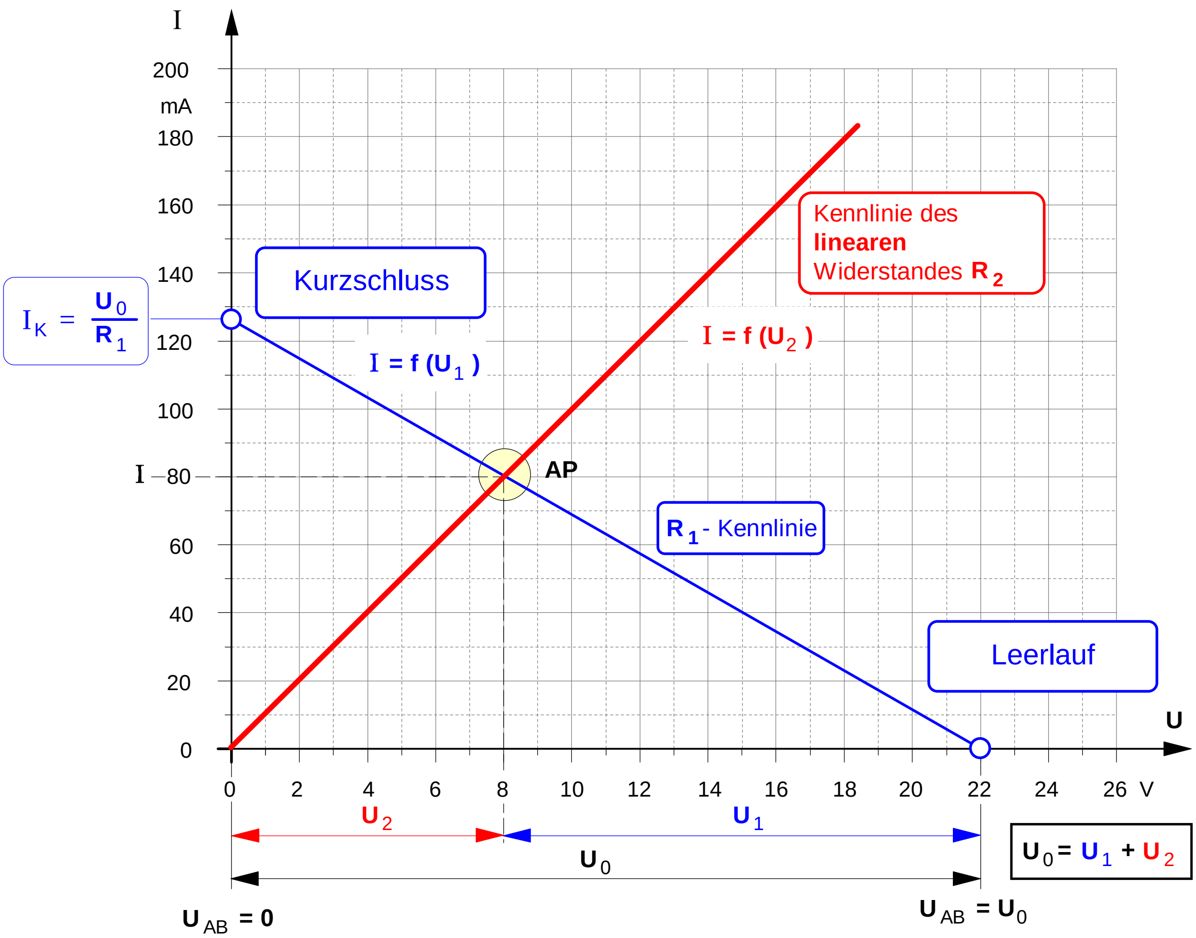


3. Kurzschluss: $U_{AB} = 0$ und $I = I_K$

$$I_K = \frac{U_0}{R_1}$$



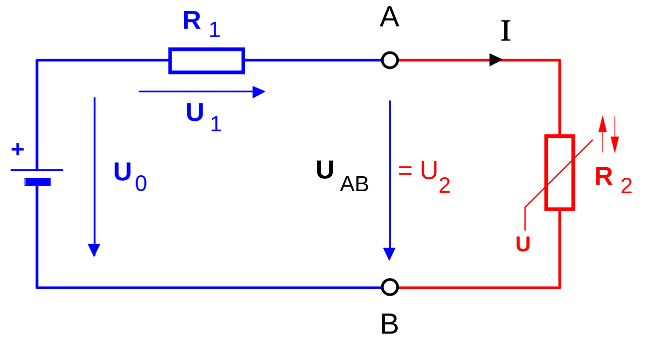
4. Darstellung im U-I-Diagramm



Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-20af-1-2.DOC - 15.12.11	
Arbeitsblatt Nr. **20 a)** :	Schaltungen mit **nichtlinearen** Widerständen	Seite **2**

2. Reihenschaltung aus linearen und **nichtlinearen** Widerständen

1. Normalbetrieb des aktiven Zweipols (R_1 = 175 Ω; U_0 = 22 V) mit **nichtlinearem VDR**-Widerstand

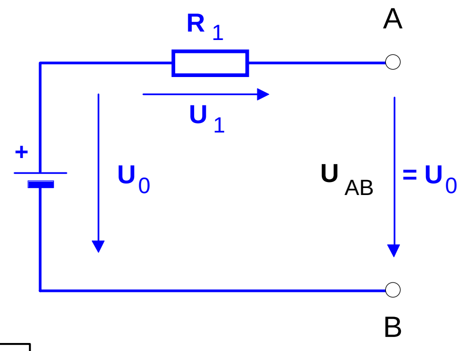


Gesucht: Strom **I** = ?

Lösung:

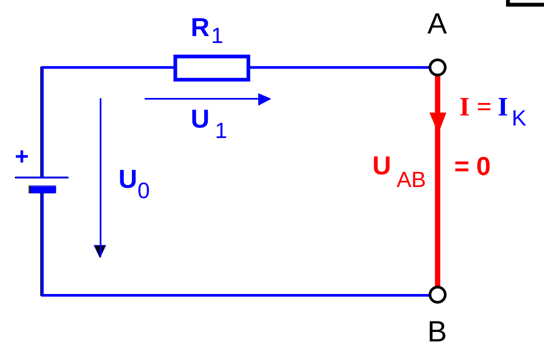
Strom **I** = **74** mA

2. Leerlauf: $U_{AB} = U_0$ und $I = 0$

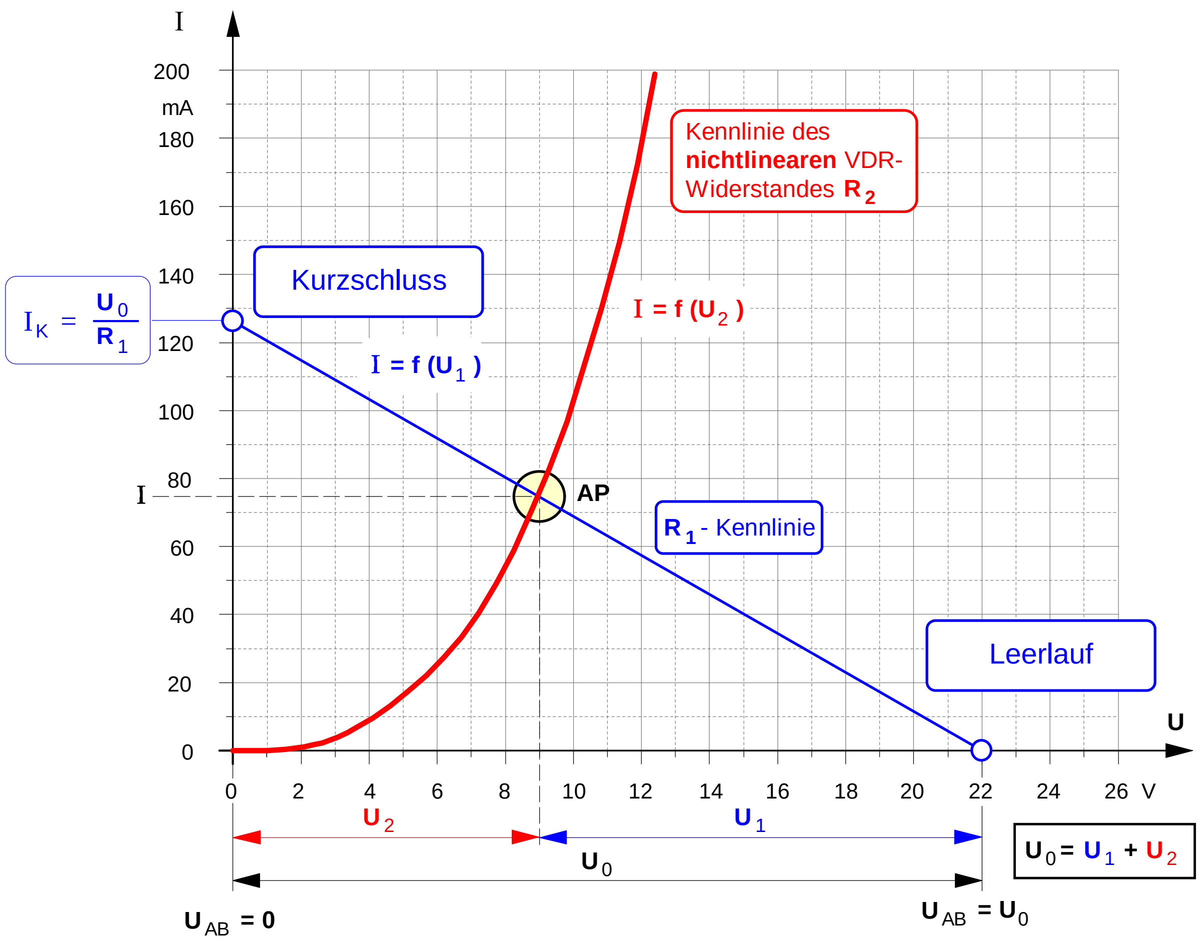


3. Kurzschluss: $U_{AB} = 0$ und $I = I_K$

$$I_K = \frac{U_0}{R_1}$$



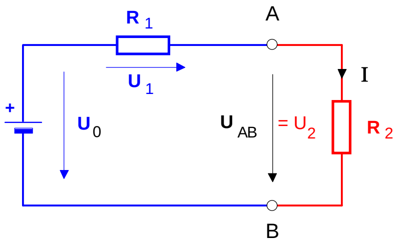
4. Darstellung im U-I-Diagramm



Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-20af-1-2.DOC - 15.12.11	
Arbeitsblatt Nr. **20 a)** :	Schaltungen mit **nichtlinearen** Widerständen	Seite **1**

1. Wiederholung: **Reihenschaltung** aus zwei **linearen** Widerständen

1. Normalbetrieb eines aktiven Zweipols (R_1 = 175 Ω; U_o = 22 V; R_2 = 100 Ω)



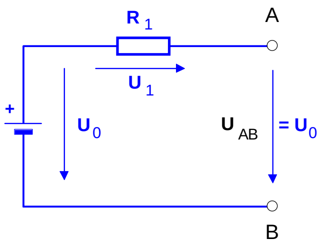
Gesucht: Strom **I** = ?

Lösung:

Strom **I** = **80** mA

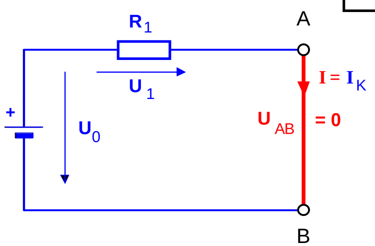
$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

2. Leerlauf: $U_{AB} = U_0$ und $I = 0$

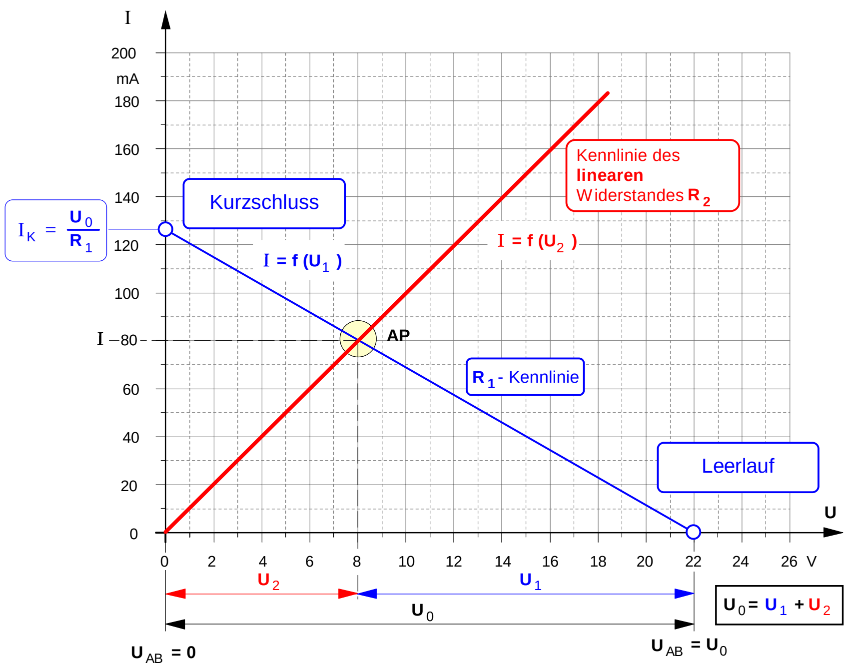


3. Kurzschluss: $U_{AB} = 0$ und $I = I_K$

$$I_K = \frac{U_0}{R_1}$$



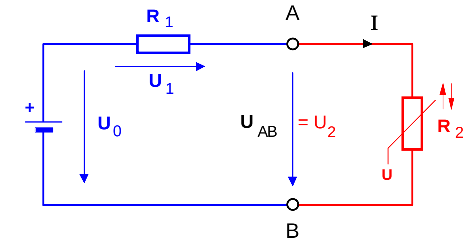
4. Darstellung im U-I-Diagramm



Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 1**	Name: ET1-20af-1-2.DOC - 15.12.11	
Arbeitsblatt Nr. **20 a)** :	Schaltungen mit **nichtlinearen** Widerständen	Seite **2**

2. Reihenschaltung aus linearen und **nichtlinearen** Widerständen

1. Normalbetrieb des aktiven Zweipols (R_1 = 175 Ω; U_o = 22 V) mit **nichtlinearem VDR**-Widerstand

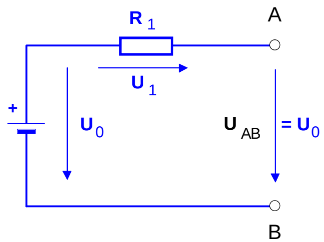


Gesucht: Strom **I** = ?

Lösung:

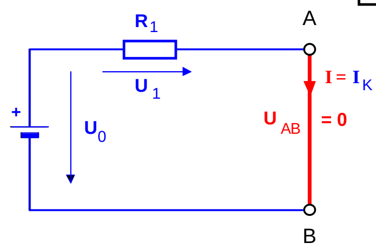
Strom **I** = **74** mA

2. Leerlauf: $U_{AB} = U_0$ und $I = 0$

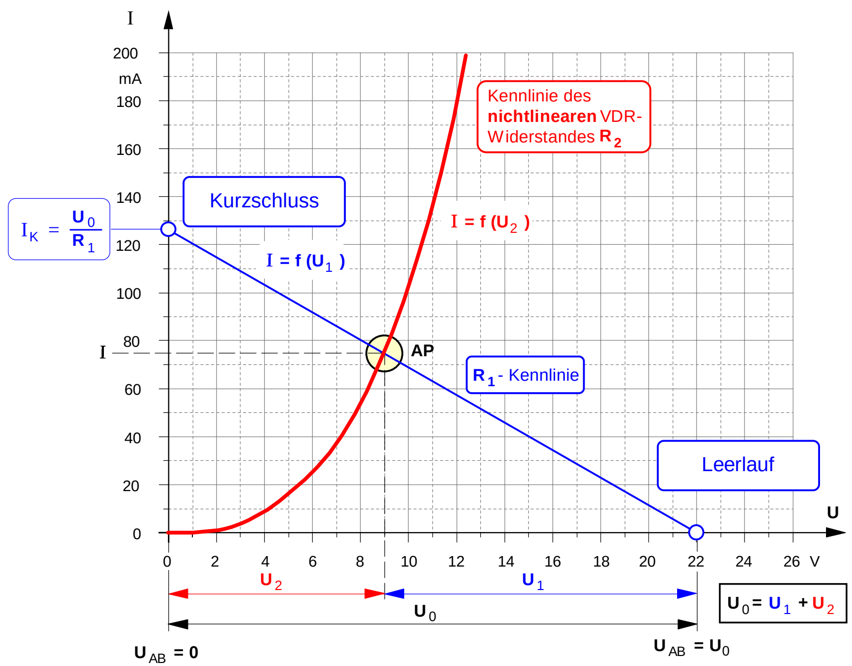


3. Kurzschluss: $U_{AB} = 0$ und $I = I_K$

$$I_K = \frac{U_0}{R_1}$$



4. Darstellung im U-I-Diagramm



- Übung: **Reihenschaltung** aus einem **linearen Festwiderstand** und einem **nichtlinearen VDR-Widerstand** (auch: Varistor = spannungsabhängiger Widerstand)

Der im folgenden Schaltbild angegebene VDR-Widerstand $\mathbf{R_2}$ ist mit einem Kohleschichtwiderstand $\mathbf{R_1}$ = **175** Ω in Reihe geschaltet und an eine konstante Betriebsspannung $\mathbf{U_0}$ = **22** V angeschlossen. Die Kennlinie des VDR-Widerstandes ist in dem untenstehenden I-U-Diagramm dargestellt; seine höchstzulässige Verlustleistung beträgt laut Datenblatt $\mathbf{P_{tot}}$ **= 1** W.

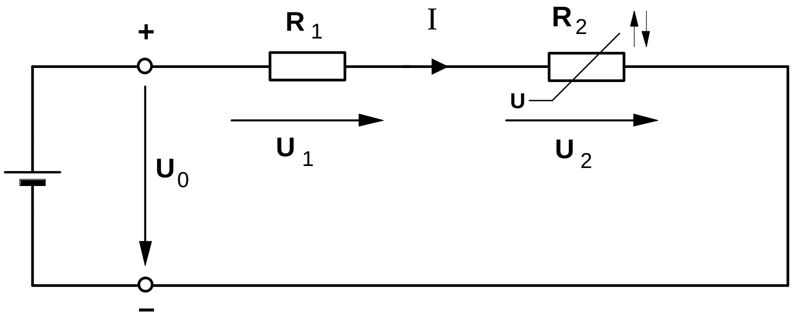
a) Bestimmen Sie die **Stromstärke** I in der Reihenschaltung.

b) Wie groß sind die **Teilspannungen** $\mathbf{U_1}$ und $\mathbf{U_2}$?

c) Auf welchen Wert I' ändert sich der Strom, wenn der Vorwiderstand auf den Wert $\mathbf{R_1'}$ = **400** Ω erhöht wird?

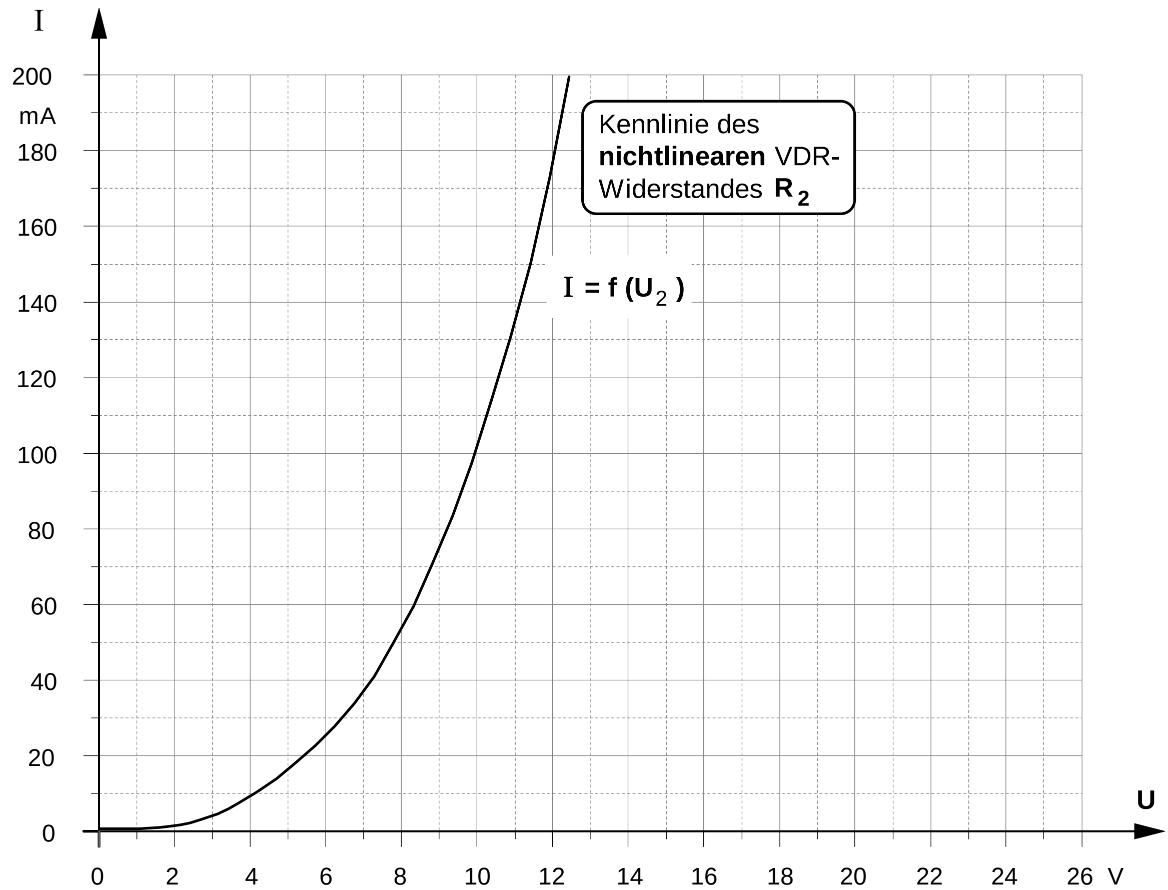
d) Zeichnen Sie die **Verlustleistungshyperbel** des VDR-Widerstandes in das I-U-Diagramm ein.

e) Bestimmen Sie den **Mindestwert** $\mathbf{R_{1min}}$ des linearen Widerstandes.



- Verlustleistungs-hyperbel

U_2	$I = \frac{P_{tot}}{U_2}$
5 V	
8 V	
10 V	
12 V	
14 V	
16 V	
18 V	
20 V	



● Übung: **Reihenschaltung** aus einem **linearen Festwiderstand** und einem **nichtlinearen VDR-Widerstand** (auch: Varistor = spannungsabhängiger Widerstand)

Der im folgenden Schaltbild angegebene VDR-Widerstand $\mathbf{R_2}$ ist mit einem Kohleschichtwiderstand $\mathbf{R_1} = \mathbf{175}\ \Omega$ in Reihe geschaltet und an eine konstante Betriebsspannung $\mathbf{U_0} = \mathbf{22}$ V angeschlossen. Die Kennlinie des VDR-Widerstandes ist in dem untenstehenden I-U-Diagramm dargestellt; seine höchstzulässige Verlustleistung beträgt laut Datenblatt $\mathbf{P_{tot}} = \mathbf{1}$ W.

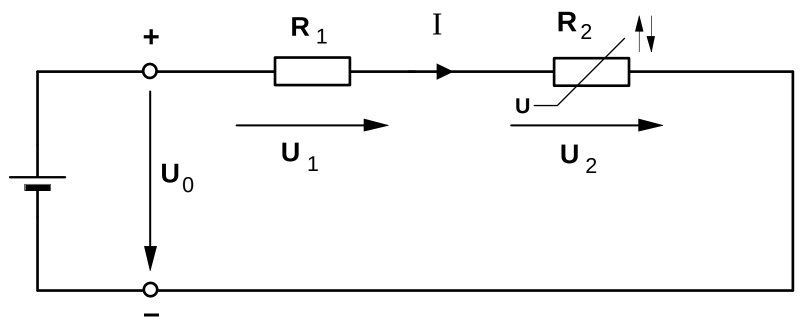
a) Bestimmen Sie die **Stromstärke** I in der Reihenschaltung.

b) Wie groß sind die **Teilspannungen** $\mathbf{U_1}$ und $\mathbf{U_2}$?

c) Auf welchen Wert I' ändert sich der Strom, wenn der Vorwiderstand auf den Wert $\mathbf{R_1'} = \mathbf{400}\ \Omega$ erhöht wird?

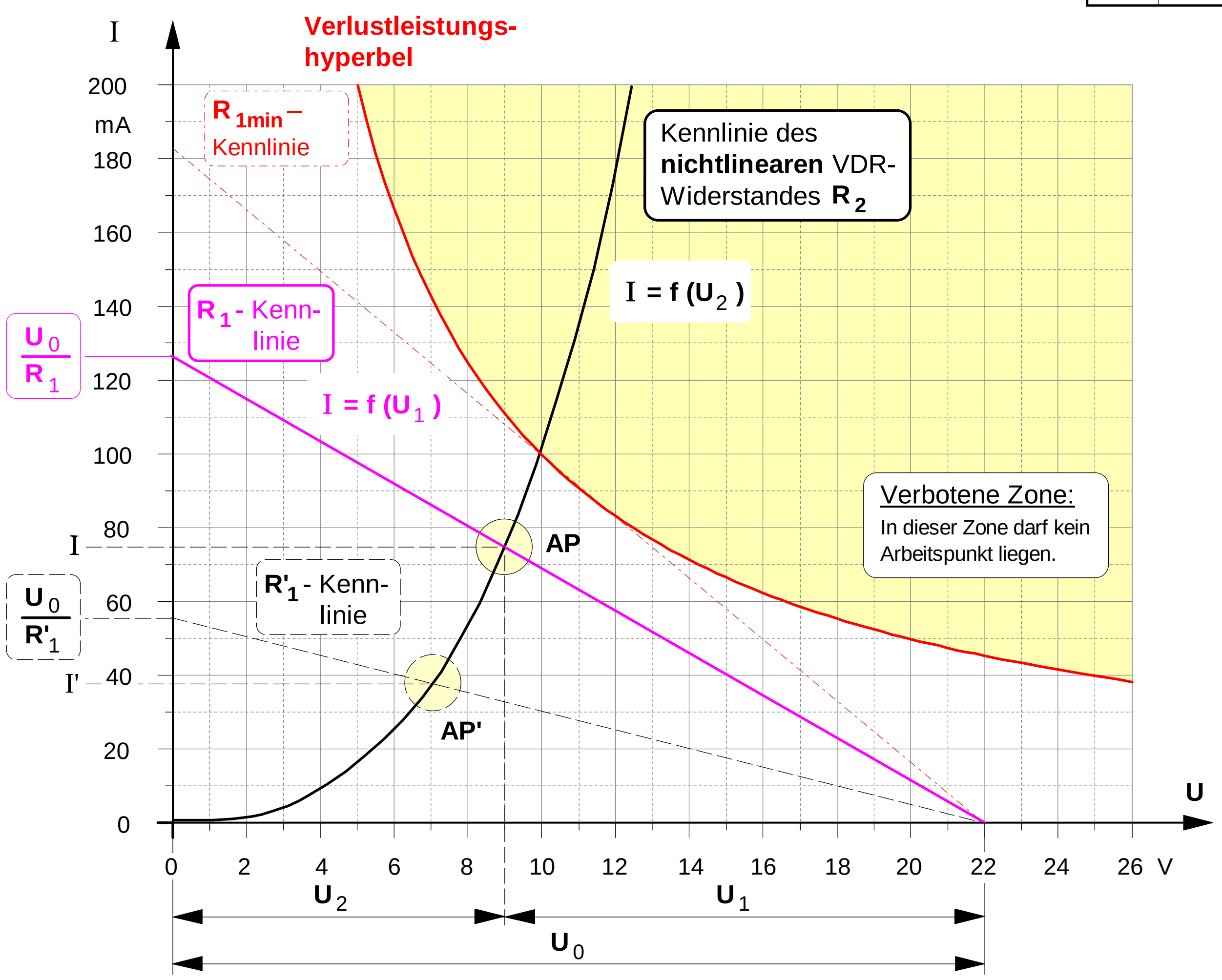
d) Zeichnen Sie die **Verlustleistungshyperbel** des VDR-Widerstandes in das I-U-Diagramm ein.

e) Bestimmen Sie den **Mindestwert** $\mathbf{R_{1min}}$ des linearen Widerstandes.



● Verlustleistungs-hyperbel

U_2	$I = \frac{P_{tot}}{U_2}$
5 V	200 mA
8 V	125 mA
10 V	100 mA
12 V	83,3 mA
14 V	71,4 mA
16 V	62,5 mA
18 V	55,5 mA
20 V	50,0 mA



Schwerpunktfach

Elektrotechnik in der Fachoberschule

Klasse 12 – Organisationsform **B**

Technik kommt ohne Physik aus, wie der Filmstar ohne Lehrzeit und der faschistische Staatsmann ohne Bildung.

(Max Horkheimer)

Coulomb Oersted Ampére Ohm Kirchhoff Gauß Faraday Maxwell

Themenfeld ET **1** : **Elektrisches Feld und GS-Netzwerke**

A. Mechanik
B. Elektrische Ladung
C. Elektrisches Feld
D. Potential und Spannung
E. Kapazität und Kondensator
F. Laden und Entladen
G. Strömungsfeld
H. Gleichstrom-Netzwerke

Themenfeld ET **2** : **Magnetisches Feld**

A. Magnetische Kraft
B. Grundgrößen des Magnetfeldes
C. Stoffe im Magnetfeld
D. Magnetischer Kreis

Themenfeld ET **3** : **Induktion und Wechselstrom**

A. Induktionsvorgänge und deren Gesetze
B. Selbstinduktion und RL-Schaltvorgänge
C. Sinusförmige Wechselgrößen
D. Mathematischer Exkurs: Komplexe Zahlen
E. Komplexe Wechselstromkreise

Themenfeld ET **4** : **Elektrische Messtechnik**

A. Oszilloskop
B. Strom- und Spannungsmesser
C. Leistungsmesser

Heinrich-Emanuel-Merck-Schule Darmstadt

Fachoberschule – Schwerpunkt Elektrotechnik

Zur didaktischen Konzeption des Faches »Elektrotechnik« für die Organisationsform **B**

Themenfeld »Elektrotechnik 2«: Magnetisches Feld

A. Magnetische Kraft und Darstellung des magnetischen Feldes

1. Zur Theorie der Fernwirkung magnetischer Kräfte (Arbeitsblatt Nr. **1**)
   - Wechselwirkung zwischen Dauermagneten
   - Eigenschaften magnetischer Fernkräfte
2. Erste Bestimmungen zum Begriff des magnetischen Feldes (Arbeitsblatt Nr. **1 a**)
3. Der elektrische Strom als Ursache des magnetischen Feldes (Arbeitsblatt Nr. **2**)
   - Der Versuch von H.Chr. Oersted (Juli 1820)
   - Magnetfeldverlauf um einen geraden Stromleiter
4. Wechselwirkung zwischen zwei parallelen Stromleitern (Arbeitsblatt Nr. **3**)
   - Der Versuch von A.-M. Ampère (Oktober 1820)
   - Zur Notwendigkeit der Unterscheidung von elektrischer und magnetischer Kraft
5. Zwischenbilanz: Vergleich zwischen elektrischem und magnetischem Feld (Arbeitsblatt Nr. **4**)
6. Kraftwirkung auf einen Stromleiter im magnetischen Feld (Arbeitsblatt Nr. **4 a**)

B. Grundgrößen und Grundgesetze des magnetischen Feldes

1. Die magnetische Feldstärke B als Wirkungsgröße des magnetischen Feldes
   - Bestimmung des Begriffs der bewegten Ladung als "$q \cdot v$" bzw. "$I \cdot \ell$" (Arbeitsblatt Nr. **5** / S.1)
   - Definition der magnetischen Feldstärke B als Wirkungsgröße
   - Meßverfahren zur Bestimmung der magnetischen Feldstärke B mit der Stromwaage (Arbeitsblatt Nr. **5** / S.2)
   - Bestimmung der magnetische Kraft als Vektorprodukt (Arbeitsblatt Nr. **5** / S.3)
2. Die magnetische Erregung H als Ursachengröße des magnetischen Feldes (Arbeitsblatt Nr. **6**)
3. Der Zusammenhang zwischen den magnetischen Feldgrößen B und H
   - Verknüpfung von Ursachengröße H und Wirkungsgröße B (Arbeitsblatt Nr. **7**)
   - Magnetische Feldkonstante und Permeabilität
4. Anwendung der magnetischen Feldgrößen $\vec{\mathbf{B}}$ und $\vec{\mathbf{H}}$ auf verschiedene Anordnungen
   - Berechnung der Feldgrößen **H** und **B** (Arbeitsblatt Nr. **8**)
     - ► ***außerhalb*** eines **geraden Stromleiters**
     - ► im Inneren einer langen Zylinderspule sowie in einer Ringspule
   - Überlagerung von Magnetfeldern paralleler Stromleiter (Arbeitsblatt Nr. **9**)
   - Magnetische Kraft zwischen zwei parallelen Stromleitern (Arbeitsblatt Nr. **10**)
   - Definition der Stromstärke-Maßeinheit »1 Ampere«
   - Berechnung der Feldgrößen H und B *innerhalb* eines geraden Stromleiters (Arbeitsblatt Nr. **11**)
   - Magnetische Erregung in Spulen und Durchflutung als skalare magnetische Feldgröße (Arbeitsblatt Nr. **12**)
5. Der magnetische Feldfluß Φ als weitere skalare magnetische Feldgröße
   - Definition des magnetischen Flusses (Arbeitsblatt Nr. **13**)
   - Verallgemeinerung: Der magnetische Feldfluß als Skalarprodukt der Vektoren $\vec{\mathbf{B}}$ und $\vec{\mathbf{A}}$ (Arbeitsblatt Nr. **13 a**)

6. Der Durchflutungssatz
   - Die magnetische Feldlinie als Umlaufweg eines Magnetpols (Arbeitsblatt Nr. **14**)
   - Entwicklung des Durchflutungssatzes (Arbeitsblatt Nr. **15**):
     Erster Sonderfall: Gerader Stromleiter mit kreisförmigem Umlaufweg
     Zweiter Sonderfall: Gerader Stromleiter mit zusammengesetztem kreisförmigem Umlaufweg
     Übergang zur allgemeinen Form des Durchflutungssatzes
   - Erstes Anwendungsbeispiel zum Durchflutungssatz: Koaxiale Hohlleiter (Arbeitsblatt Nr. **15** / S.4 – S.6)
7. Nachtrag: Magnetische Kraft auf freie Elektronen
   - Hall-Effekt und Hall-Spannung (Arbeitsblatt Nr. **16** / S.1)
   - Meßtechnische Anwendungen des Hall-Effekts (Arbeitsblatt Nr. **16** / S.2)

C. Stoffe im Magnetfeld

1. Luft im Magnetfeld einer langen Zylinderspule (Arbeitsblatt Nr. **17** / S.1)
   - Messung der magnetischen Feldstärke B mit Hall-Sonden-Meßgerät
   - Meßtechnische Bestimmung der Permeabilität in einer Luftspule
2. Eisen im Magnetfeld einer langen Zylinderspule
   - Erster Hinweis auf die Besonderheiten ferromagnetischer Stoffe (Arbeitsblatt Nr. **17** / S.2)
   - Modell der Elementarmagnete
   - Nichtlinearer Zusammenhang zwischen B und H bei Eisenwerkstoffen (Arbeitsblatt Nr. **17** / S.3)
3. Ferromagnetische Stoffe
   - Entstehung magnetischer Felder durch Bahn- und Spinbewegung von Elektronen (Arbeitsblatt Nr. **18** / S.1)
   - Weißsche Bezirke und Blochwände
   - Magnetisierungskurve und Hystereseschleife (Arbeitsblatt Nr. **18** / S.2)
4. Para- und diamagnetische Stoffe im Magnetfeld (Arbeitsblatt Nr. **19**)

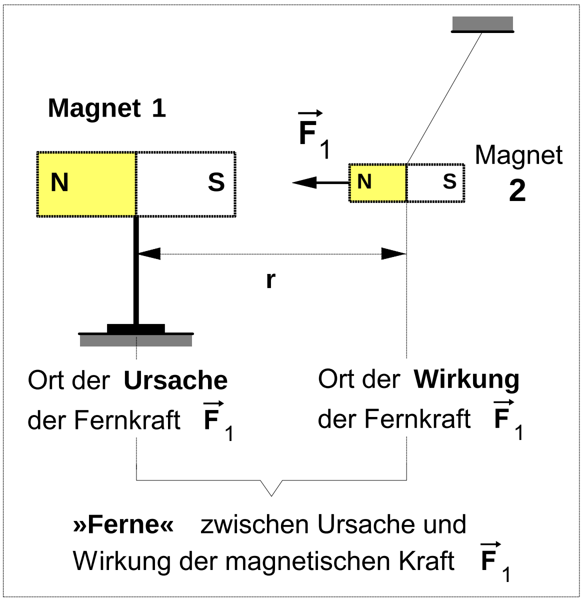
D. Der magnetische Kreis

1. Formale Analogien zwischen elektrischem und magnetischem Kreis (Arbeitsblatt Nr. **20** / S.1)
2. Berechnung unverzweigter magnetischer Kreise
   - Anwendung des Durchflutungssatzes auf den magnetischen Kreis (Arbeitsblatt Nr. **20** / S.1 und S.2)
   - Berechnungsverfahren und erste Übungsaufgaben (Arbeitsblatt Nr. **20** / S.3 und S.4)
3. Magnetische Kraft zwischen Magnetpolen (Arbeitsblatt Nr. **21**)
   - Vorläufige Darstellung der Formel – Begründung folgt nach Behandlung der Induktion
4. Vertiefende Übungen zum magnetischen Kreis
   - Weitere Berechnungsbeispiele zum magnetischen Kreis (Arbeitsblatt Nr. **22**)
   - Verfahren der Luftspaltgeraden (Ergänzung zu Arbeitsblatt Nr. **22**)

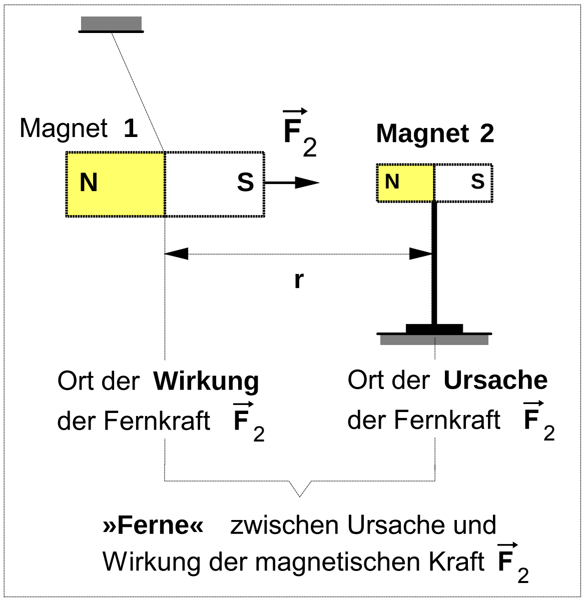
Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name: ET2-1.DOC - 24.11.03
Arbeitsblatt Nr. **1** : **Wechselwirkung** zwischen zwei **Dauermagneten**	

- Zur **Theorie** der **Fernwirkung** von **magnetischen Kräften**

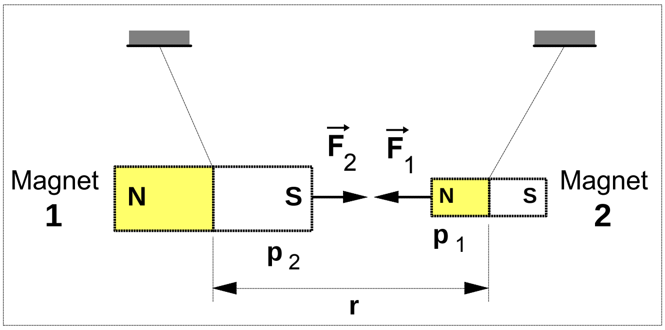
a) Magnet 1 zieht Magnet 2 an



b) Magnet 2 zieht Magnet 1 an



c) Magnet 1 und **Magnet 2** ziehen sich **gegenseitig** an (Wechselwirkung)



p_1 ... Polstärke des Magneten 1

p_2 ... Polstärke des Magneten 2

- Gemäß dem *Wechselwirkungsgesetz* ("actio = reactio") von NEWTON (3. Axiom) gilt für die beiden Fernkräfte:

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2}$$

- Nach dem *Coulombschen Gesetz des Magnetismus* gilt für die **Beträge** der beiden magnetischen Fernkräfte (mit $\mathbf{F_1} = \mathbf{F_2} = \mathbf{F}$):

$$\boxed{F = K \cdot \frac{p_1 \cdot p_2}{r^2}}$$

Konstante:

$$K = \frac{\mu_o}{4 \cdot \pi}$$

Da es keine allgemeingültige Definition zur Messung der **Polstärken** von Magneten gibt, wird dieses Gesetz von Coulomb in unseren weiteren Betrachtungen **keine Anwendung** finden.

- Eigenschaften von **Fernkräften** nach der **Fernwirkungstheorie** (18. Jahrhundert)

Die Anhänger der **Fernwirkungstheorie** –die sich insbesondere im 18.Jahrhundert großer Beliebtheit erfreute, vor allen Dingen bei französischen Physikern wie Ch.A.COULOMB, J.B.BIOT und F.SAVART– behaupteten, bei der Anziehung und Abstoßung von Magneten oder von elektrischen Ladungen seien **Fernkräfte** am wirken, denen folgende Eigenschaften zugeschrieben wurden:

(1) **Ursache** und **Wirkung** von Fernkräften treten an **verschiedenen Orten** auf.

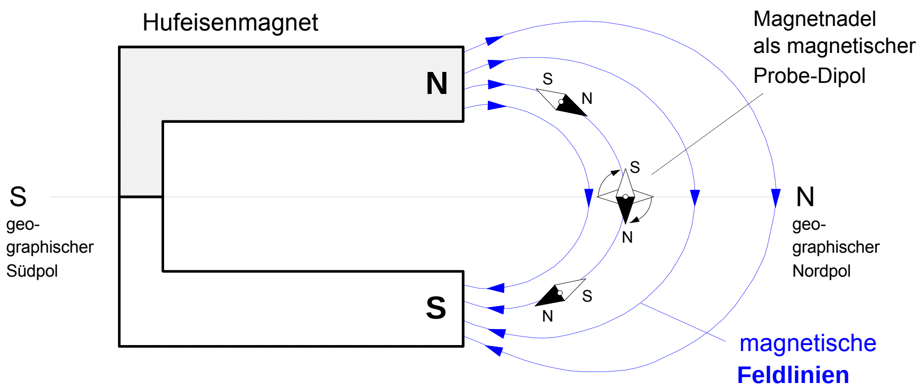
(2) Die Fernkraft erscheint **gleichzeitig** an verschiedenen Orten, nämlich dem Ort ihrer Entstehung (Körper mit der Ladung $\mathbf{Q}_1$) und dem Ort ihrer Wirkung (Körper mit der Ladung $\mathbf{Q}_2$), d.h.: ihre **Ausbreitungsgeschwindigkeit** ist **unendlich groß**.

(3) Die **Ausbreitung** einer Fernkraft erfolgt stets **geradlinig**, also auf dem kürzesten Weg zwischen dem Ort ihrer Entstehung und dem Ort ihrer Wirkung.

(4) Es gibt **keinen Übertragungsmechanismus**, der die Fernkraft von Raumpunkt zu Raumpunkt vom Ort ihrer Entstehung zum Ort ihrer Wirkung überträgt, d.h.: der **Raum** ist an der Übertragung der Fernkraft **nicht beteiligt**.

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name: ET2-1AF.DOC - 17.01.03
Arbeitsblatt Nr. **1 a)** : Erste Bestimmungen zum **Begriff** des **magnetischen Feldes**	

1. Versuch: **Magnetnadeln** in der **Umgebung** um den **Nord- und Südpol** eines **Hufeisenmagneten**



2. Beobachtung

Stellt man eine Magnetnadel in irgend einen Raumpunkt in der Umgebung um den Nord- und Südpol des Hufeisenmagneten, so wird sie abgelenkt, d.h. die Magnetnadel wird aus ihrer ursprünglichen Ruhelage (Nord-Süd-Richtung) heraus **beschleunigt** und dreht sich solange, bis sie schließlich in einer anderen Richtung wieder zur Ruhe kommt. Mit zunehmender Entfernung von den Polen des Hufeisenmagneten sinkt die Beschleunigung, mit der die Ablenkung erfolgt.

3. Schlußfolgerungen

In **jedem Raumpunkt** in der Umgebung um den Nord- und Südpol des Hufeisenmagneten wirkt auf die als **magnetischer Probe-Körper** (Probe-Dipol) dienende Magnetnadel eine **magnetische Kraft** . Diese **Kraft** ist offensichtlich in unmittelbarer Nähe der Pole des Hufeisenmagneten am stärksten und nimmt mit zunehmender Entfernung von den Polen ab.

4. Erste Begriffsbestimmungen und Festlegungen

- Diesen besonderen Raumzustand in der Umgebung eines Magneten bezeichnet man als "**magnetisches Feld**". Halten wir also zunächst fest:

> Mit dem Begriff des "**magnetischen Feldes**" kennzeichnet man den ***Zustand eines Raumes***, in dem in ***jedem Raumpunkt*** auf magnetische Probekörper (z.B. Magnetnadeln) **magnetische Kräfte** ausgeübt werden.

- Zwischen den Drehpunkten mehrerer ausgerichteter magnetischer Dipole in der Umgebung eines Magneten kann man sich eine oder mehrere Verbindungslinien denken. Solche Linien nennt man **magnetische Kraft-** oder **Feldlinien**. Diese Feldlinien existieren nicht wirklich; sie sind ein Gedanken**modell** zur anschaulichen Beschreibung magnetischer Felder. Damit lassen sich die Raumbereiche, in denen das Feld **stärker** ist, durch eine größerer Feldlinien**dichte** kennzeichnen. Außerdem kann mit ihnen in jedem Punkt, der auf einer solchen Feldlinie liegt, die **Richtung** angeben werden, in die eine Magnetnadel, die sich in einem dieser Punkte befindet, unter dem Einfluß der dort wirkenden magnetischen Kraft ausgerichtet wird. Dazu wurde folgende Festlegung getroffen:

> Die **Richtung** des **magnetischen Feldes** in einem Feldpunkt ist definiert als die Richtung, in die der **Nordpol** einer Magnetnadel zeigt, die sich in eben diesem Feldpunkt befindet.

- Von daher ließe sich das Feldlinienmodell bezogen auf den **Hufeisenmagneten** folgendermaßen deuten: Am **Nord**pol "treten" die magnetischen Feldlinien gleichsam aus dem Hufeisenmagneten **aus** und an seinem **Süd**pol "treten" sie wieder **ein** .

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name:	ET2-2.DOC - 24.11.03
Arbeitsblatt Nr. **2** : **Kraftwirkung** des **elektrischen Stromes** auf eine **Magnetnadel**		

1. Versuch: **Magnetnadeln** in der **Umgebung** um den **Nord- und Südpol** eines **Hufeisenmagneten**

Hans Christian Oersted
(1777–1851)

H.C.Oersted wurde am 14. August 1777 in Rudkjöbing auf der dänischen Ostseeinsel Langeland als Sohn eines Apothekers geboren. Er studierte an der Universität zu Kopenhagen Philosophie und Medizin. Bereits während des Studiums erhielt er Preise für medizinische und sprachwissenschaftliche Abhandlungen, 1799 wurde er Doktor der Philosophie mit einer Dissertation über **Kants** Philosophie. Nach Studienreisen durch Deutschland (1801 und 1802) und Frankreich wird er 1806 Professor für Physik an der Kopenhagener Universität. **Oersted** starb am 9. März 1851.

Sein wichtigster Beitrag zur Wissenschaft waren die ***Versuche über die Wirkung eines elektrischen Stromes auf die Magnetnadel*** vom 21. Juli 1820. Der in lateinischer Sprache abgefaßte Bericht *»Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticum«* über den von **Oersted** schon seit 1812 vermuteten Zusammenhang von Elektrizität und Magnetismus löste unter den Physikern seiner Zeit (u.a. Ampère, Biot, Savart, Faraday) auf diesem Gebiet eine wahre Flut von Forschungsaktivitäten aus.

Oersteds Untersuchungen auf dem Gebiet der Elektrizität waren von seinem spekulativen Glauben an eine ***Einheit und Wechselwirkung aller Kräfte in der Natur*** geprägt. Dieser sog. "Dynamismus" wurde insbesondere von der naturphilosophischen Strömung in Deutschland zu Anfang des 19. Jahrhunderts, deren Hauptvertreter F.W.J. **Schelling** war, beeinflußt. Die Anhänger des Dynamismus, zu denen übrigens auch Michael **Faraday** zählte, betonten das Wissen ***a priori*** und lehnten rein empirisches Wissen ab, eine Ansicht, die zu unterstützen **Kant**, den **Oersted** ebenfalls studiert hatte, nicht abgeneigt war. **Schelling** betrachtete die "***Spekulation als den Königsweg zur Erkenntnis***" und "für einen guten Physiker wie **Oersted** oder gar für einen genialen wie **Faraday** war der Dynamismus tatsächlich ein ungeheuer fruchtbares heuristisches Prinzip" (Armin Hermann, Weltreich der Physik, Frankfurt a.M. 1983, S.108 und S.128).

2. **H.Ch. Oersted über seine Entdeckung** (Auszug aus seinem Bericht vom 21. Juli 1820)

„Die ersten Versuche über den hier behandelten Gegenstand führte ich im letzten Winter durch; und zwar in meinen Vorlesungen über Elektrizität, Magnetismus und Galvanismus. Diese Versuche scheinen zu zeigen, daß sich eine Magnetnadel mittels eines galvanischen Apparates aus ihrer Ruhelage bringen läßt. Allerdings muß der galvanische Kreis geschlossen sein und nicht offen. ... Die entgegengesetzten Enden der galvanischen Batterie wurden mit einem Metalldraht verbunden. Diesen werden wir der Kürze halber den *verbindenden Draht* oder den *verbindenden Leiter* nennen. Den Effekt, der in diesem Leiter und in dessen Umgebung auftritt, werden wir *als elektrischen Konflikt* bezeichnen.

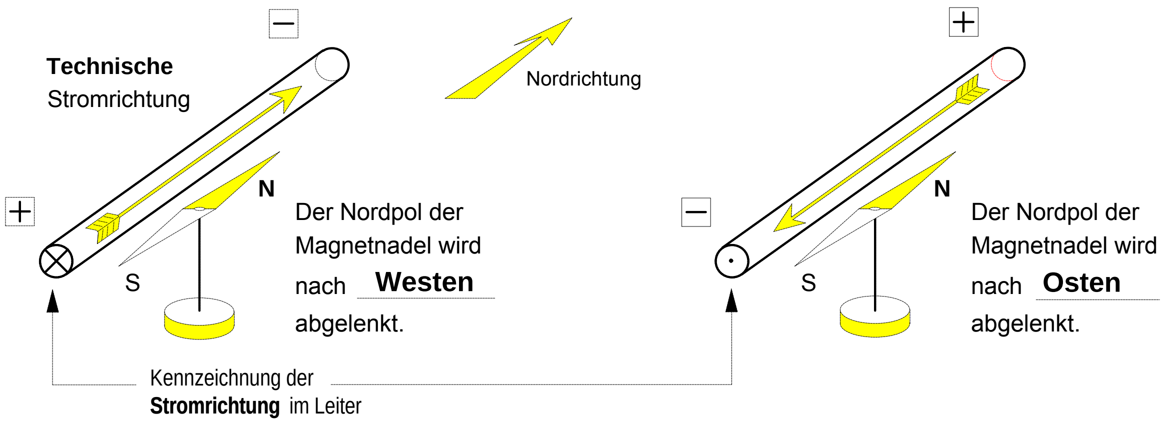
Ein geradliniges Stück dieses ***Drahtes*** wird nun horizontal ***über der*** sich frei bewegenden ***Magnetnadel*** so angeordnet, daß es zu der Magnetnadel parallel ist. Falls es sich als notwendig erweisen sollte, kann der verbindende Draht in eine für das Experiment geeignete Lage gehoben werden. Ist alles so eingerichtet, so wird sich die Magnetnadel bewegen. Dabei wird der dem negativen Ende der Batterie nähere Teil nach ***Westen*** ausgelenkt. ...

Befindet sich der verbindende ***Draht unter der Magnetnadel*** in einer horizontalen Ebene, sind die Wirkungen die gleichen, als wenn er sich über der Nadel befindet. Sie sind lediglich entgegengesetzt. Der Pol der Magnetnadel, der dem negativen Ende der Batterie am nächsten ist, wird nach ***Osten*** ausgelenkt. ...

Aus den genannten Tatsachen läßt sich außerdem schließen, daß dieser Konflikt ***Kreise*** bildet. Denn ohne diese Annahme scheint es unverständlich zu sein, weshalb ein und derselbe Teil des verbindenden Drahtes die Nadel einmal nach Osten und einmal nach Westen treibt, je nachdem, ob er sich über oder unter der Nadel befindet.“

Übersetzung des lateinischen Originaltextes. Quelle: R.A.R. Tricker, Frühe Elektrodynamik, Braunschweig 1974, S.149 ff.

3. Zum **Versuch** von **Hans Christian Oersted** mit dem Drahtleiter ***über*** der Magnetnadel

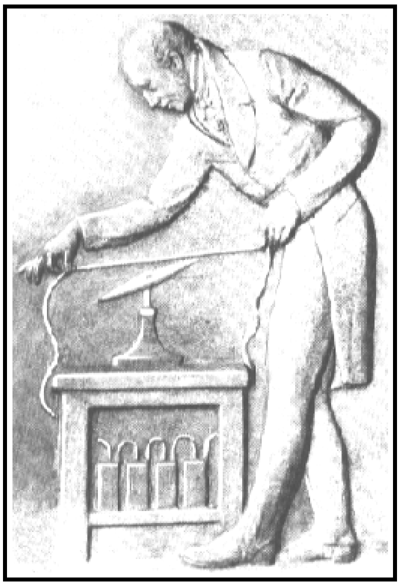


Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name: ET2-2A.DOC - 24.11.03
Arbeitsblatt Nr. **2 a)** : Ergänzung: **Magnetfeld** eines **stromdurchflossenen Leiters**	

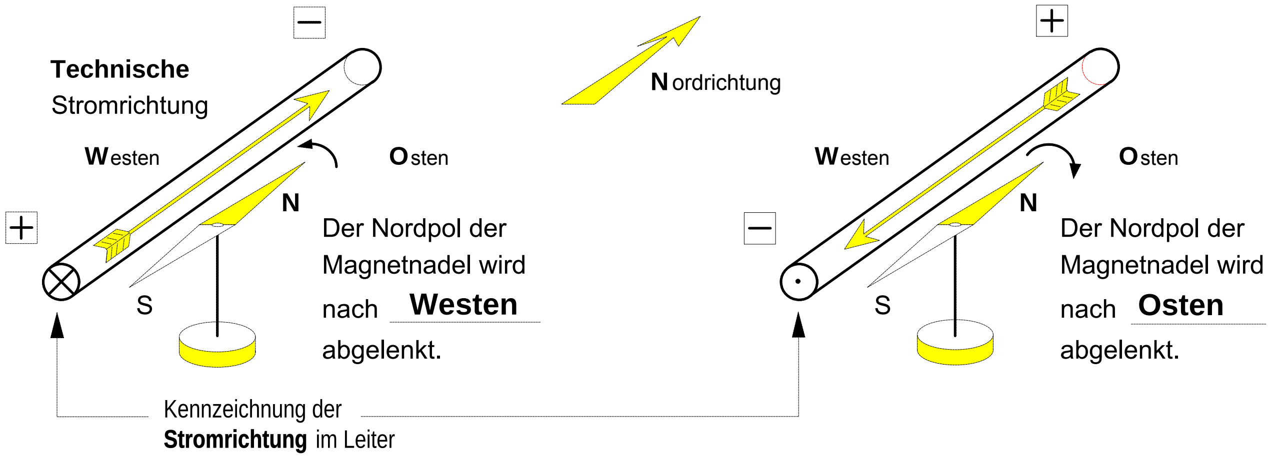
1. Aus dem **Bericht von H.Ch. Oersted** (1777 – 1851) über seine **Entdeckung** vom **21. Juli 1820**

In den letzten Julitagen des Jahres 1820 erhielten bekannte Physiker und naturwissenschaftliche Gesellschaften einen kurzen Versuchsbericht mit dem Titel „Experimente über den elektrischen Einfluß auf die Magnetnadel“, den der dänische Physiker Hans Christian Oersted (siehe Abb. rechts) verfaßt hatte:

„ ... Ein gerader, von Süden nach Norden gerichteter Draht, gleich welcher Art, wird über eine ruhende Magnetnadel gehalten und mit einer Spannungsquelle verbunden. Sobald der Strom durch diesen Leiter fließt, wird die Kompaßnadel aus der Nord-Süd-Richtung ausgelenkt, ohne daß sie dabei vom Draht berührt wird.“



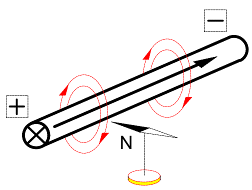
2. Der **Versuch** von **Hans Christian Oersted** mit einem **Stromleiter *über* der Magnetnadel**

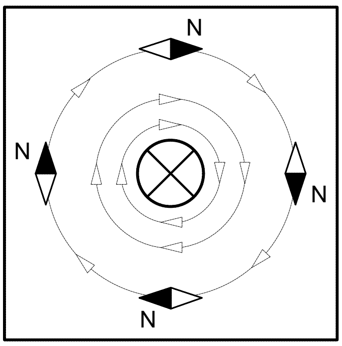


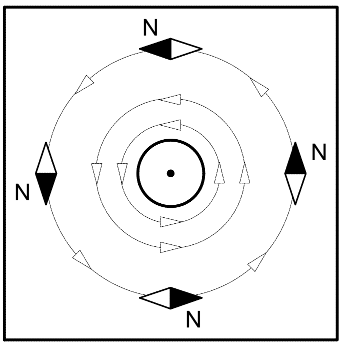
3. Schlußfolgerungen zum **Verlauf** des **Magnetfeldes** um einen **stromdurchflossenen Leiter**

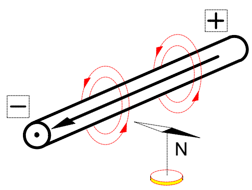
a) Fließt der Strom **vom Betrachter weg**, dann verlaufen die Feldlinien **im** Uhrzeigersinn um den Leiter.

b) Fließt der Strom **auf den Betrachter zu**, dann verlaufen die Feldlinien **gegen den** Uhrzeigersinn um den Leiter.







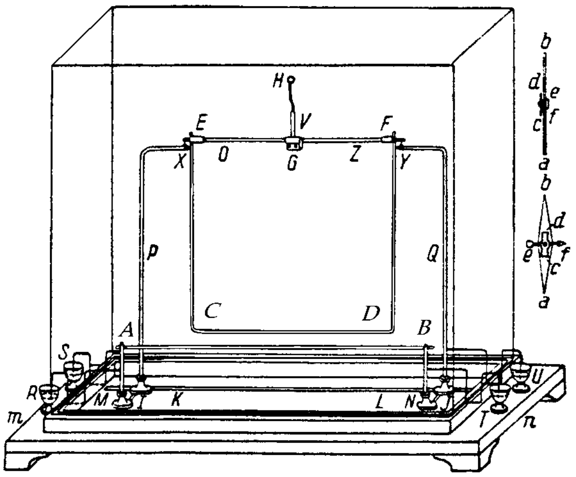


Zur Erinnerung: Der **N**ordpol der Magnetnadel **zeigt** die **Richtung** des **Magnetfeldes** in dem jeweilgen Raumpunkt an.

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name:	ET2-3-F.DOC - 29.01.03
Arbeitsblatt Nr. **3** :	**Kraftwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern**	

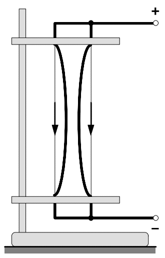
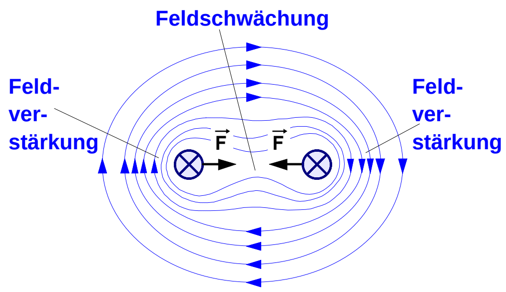
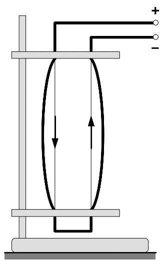
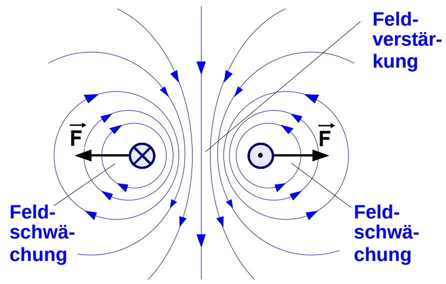
1. Auszug aus einem Bericht von **André-Marie Ampère** vom **20. Oktober 1820**

"Es gibt aber auch andere bemerkenswerte Unterschiede zwischen den beiden Zuständen der Elektrizität. Diese entdeckte ich, als ich die Enden zweier Voltaschen Batterien mit zwei geraden, zueinander parallelen leitenden Drähten verband (siehe Abbildung). Der eine dieser beiden Drähte war festgemacht (A–B); den anderen hängte ich an zwei Punkten auf und machte ihn durch ein Gegengewicht sehr beweglich (C–D). Er konnte sich so frei zu dem ersten Draht hin oder von ihm weg bewegen. Dabei blieben die beiden Drähte stets zueinander parallel. Dann ließ ich durch beide Drähte gleichzeitig einen Strom fließen. Dabei beobachtete ich, daß sich die beiden Drähte gegenseitig anzogen, wenn beide Ströme in die gleiche Richtung flossen, und daß sie sich abstießen, wenn die Ströme in entgegengesetzte Richtungen flossen." (Übersetzung des Originaltextes, aus: R.A.Tricker, Frühe Elektrodynamik, Braunschweig 1974, S.190 f.)



André-Marie Ampère (1775-1836), geboren in Lyon, Professor der Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie an der Pariser École Polytechnique. Begründer der Elektrodynamik, Definition der Begriffe *Strom* und *Spannung*. Erhielt die höchsten Ehren, die die Wissenschaft zu vergeben hatte. Lebte nach schweren Schicksalsschlägen zuletzt verarmt und einsam. Er starb in Marseille an einer Infektion.

2. Nachvollzug des Ampère-Versuchs zur **Kraftwirkung zwischen zwei parallelen Stromleitern**

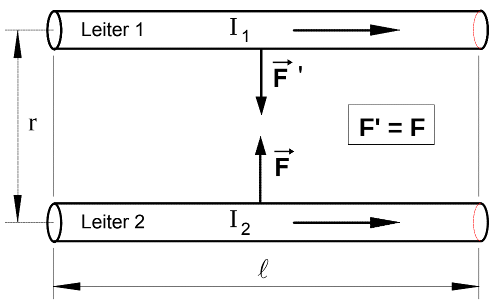
Versuch	Beobachtung	Verlauf des Magnetfeldes
	Parallele Leiter mit **gleicher** Stromrichtung **ziehen sich gegenseitig an.**	
	Parallele Leiter mit **entgegengesetzter** Stromrichtung **stoßen sich gegenseitig ab.**	

- **Hypothese** zur **Größe der magnetischen Kraft** (*Begründung folgt später !*) :

$$\boxed{F = K \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r} \cdot \ell}$$

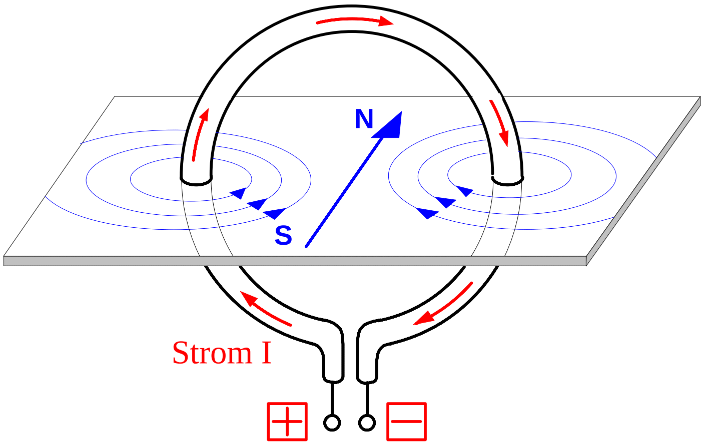
I_1 ... Stromstärke im Leiter 1 in A
I_2 ... Stromstärke im Leiter 2 in A
r ... Abstand der Leiter in m
ℓ ... gemeinsame Länge in m
F ... magnetische Kraft in N

Konstante: $K = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$

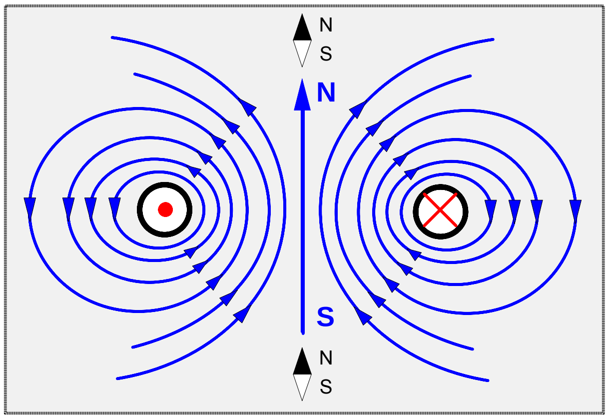


Arbeitsblatt Nr. **3 a)** : **Magnetfeld** von **Leiterschleife** und **Spule**

1. Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen **Leiterschleife**

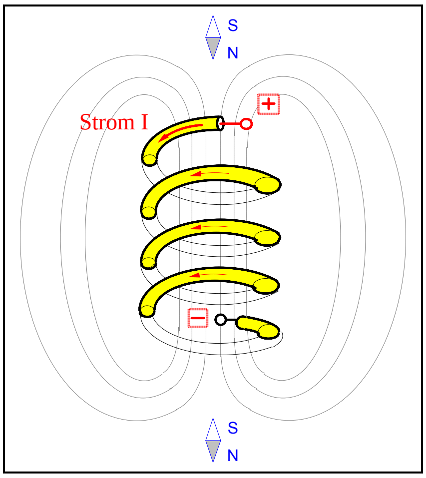


Leiterschleife in der Draufsicht im Schnitt

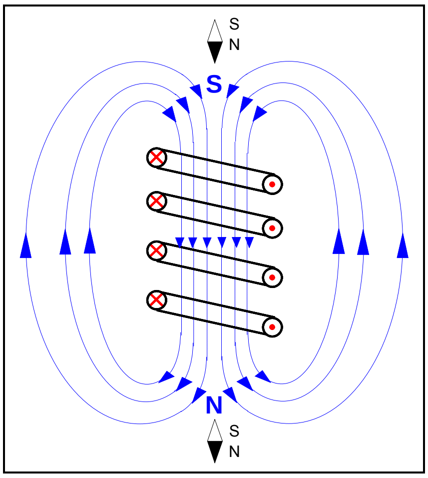


Am **Nord**pol treten die Feldlinien aus der Leiterschleife **aus**, am **Süd**pol treten sie wieder **ein**.

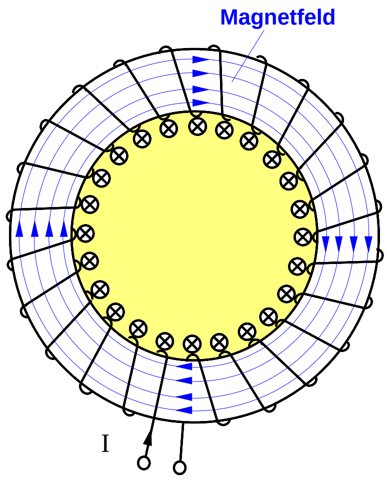
2. Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen **Spule**



• Zylinderspule mit Fe-Spänen



• Zylinderspule im Schnitt mit magnetischen Feldlinien

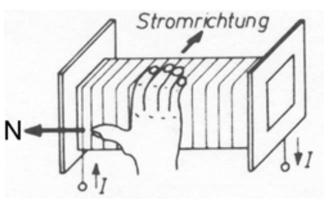


• Magnetfeld im Inneren einer **Ringspule** (»Toroid«)

Bei einer stromdurchflossenen Spule **überlagern** sich die Magnetfelder der einzelnen Windungen und bilden gemeinsam ein resultierendes Magnetfeld. Im Inneren einer dichtgewickelten, im Verhältnis zum Durchmesser **langen** Zylinderspule (»Solenoid«) ist das Magnetfeld fast **homogen**. Daher sind hier die Feldlinien nahezu parallel und in gleicher Dichte zu zeichnen.

▶ An der **Aus**trittsstelle der Feldlinien ist der **Nordpol** der Spule.
▶ An der **Ein**trittsstelle der Feldlinien ist der **Südpol** der Spule.

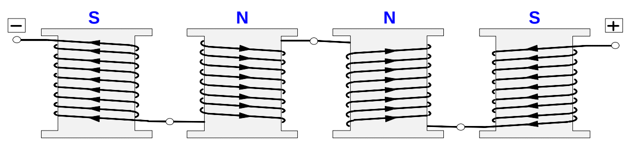
• **Rechte-Hand-Regel** zur Bestimmung des **Nordpols** einer **Spule**



Legt man die **rechte Hand** so um die Spule, daß die **Finger** in Stromrichtung zeigen, dann zeigt der **abgespreizte Daumen** den Richtungssinn des Magnetfeldes im Inneren der Spule und damit zugleich in Richtung des **Nordpols** der Spule.

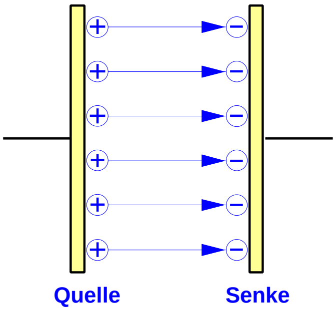
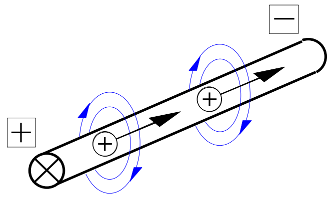
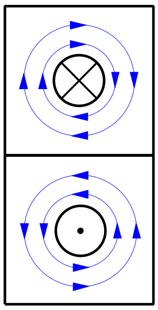
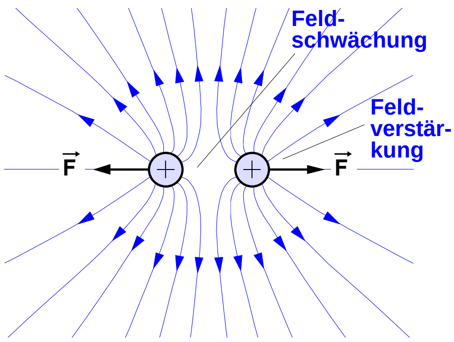
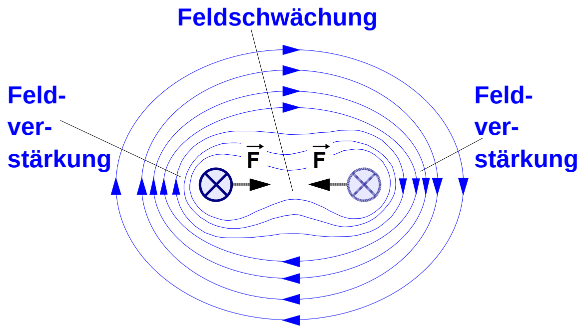
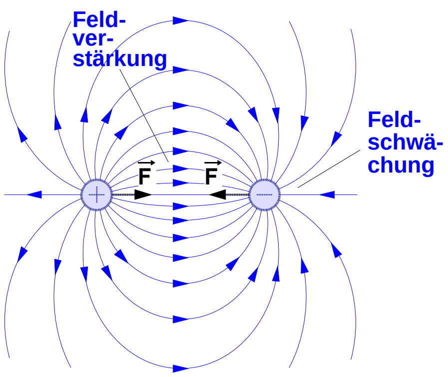
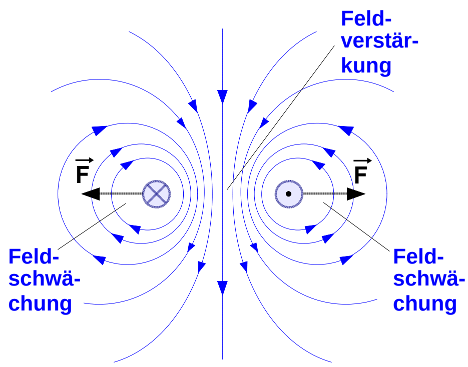
• Aufgabe

Bestimmen Sie die magnetische Polarität der nebenstehenden vier Spulen !



Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name:	Et2-4-F.Doc - 29.01.03

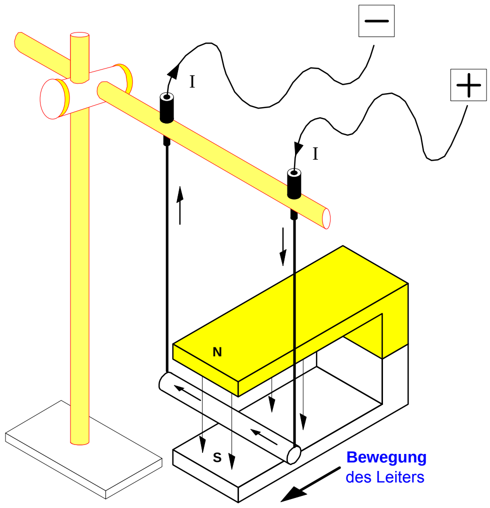
Arbeitsblatt Nr. **4** : **Elektrostatisches und elektromagnetisches Feld** (Vergleich)

	Elektrostatisches Feld	**Elektromagnetisches Feld**
Feldlinienverlauf	 **Quellenfeld** Die elektrischen Feldlinien beginnen an der **positiven** Ladung und enden an der **negativen** Ladung.	  **Wirbelfeld** Die magnetischen Feldlinien sind **in sich geschlossene** und bilden um den Stromleiter **konzentrische Kreise**
Ursachen	Elektrostatische Felder **entstehen** durch **ruhende** elektrische Ladungen.	Elektromagnetische Felder **entstehen** durch **bewegte** elektrische Ladungen.
Kraftwirkungen	**Kraft**wirkungen zwischen zwei **ruhenden** Ladungen **a)** bei **gleichartiger** Ladung  **Abstoßung**	**Kraft**wirkungen zwischen zwei **bewegten** Ladungen (Strömen) **a)** bei **gleicher** Stromrichtung  **Anziehung**
	b) bei **entgegengesetzter** Ladung  **Anziehung**	**b)** bei **entgegengesetzter** Stromrichtung  **Abstoßung**

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name: ET2-4A-1.DOC - 11.02.07	
Arbeitsblatt Nr. **4 a)** : **Kraftwirkung** auf einen **Stromleiter** im **Magnetfeld**		Seite **1**

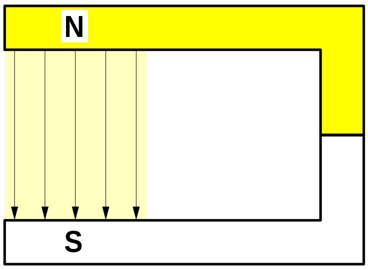
1. Versuch: "**Leiterschaukel**" im **Magnefeld** eines Dauermagneten

Ein Leiterstab aus Aluminium ist im Magnetfeld eines Hufeisen-magneten beweglich aufgehängt. Er ist so ausgerichtet, daß die Feldlinien senkrecht auf den Leiter auftreffen. Beim Einschalten des Stromes entsteht eine Bewegung des Leiters, oder präziser: er wird in horizontaler Richtung beschleunigt.

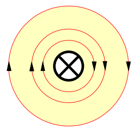


Schlußfolgerung: In einem Magnetfeld erfährt ein senkrecht zu den Feldlinien angeordneter stromdurchflossener Leiter eine **magnetische Kraft $\vec{F}$**, die gegenüber dem *Leiter* und gegen-über der *Feld*richtung **senkrecht** verläuft.

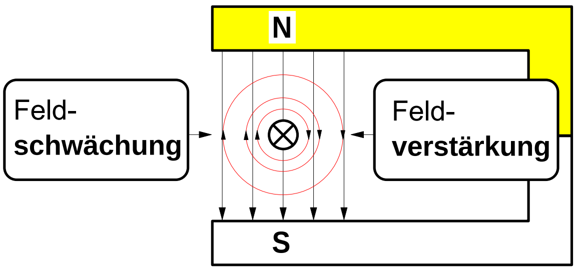
2. Erklärung mit Hilfe des **Feldlinienmodells**



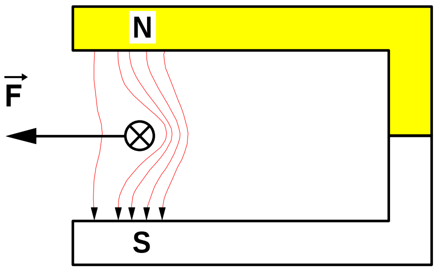
1. Magnetfeld zwischen den Polen des Dauermagneten (Polfeld)



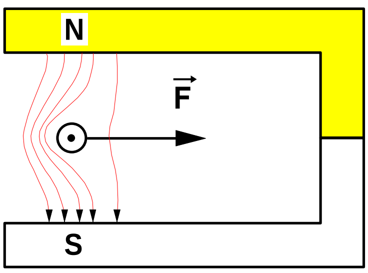
2. Magnetfeld des Stromleiters (Leiterfeld)



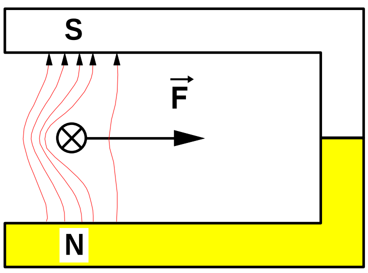
3. Stromleiter im Magnetfeld des Dauermagneten
(Überlagerung von Polfeld und Leiterfeld)



4. Verlauf des resultierenden **Gesamtfeldes und Ablenkung**



5. Gesamtfeld und Ablenkung bei **umgekehrter Stromrichtung**



6. Gesamtfeld und Ablenkung bei **umgekehrter Polfeldrichtung**

Ein stromdurchflossener Leiter wird im Magnetfeld **abgelenkt** . Die **Richtung** der magnetischen **Ablenkkraft $\vec{F}$ ändert** sich, wenn man die Richtung des **Stromes** ***oder*** die Richtung des **Magnetfeldes (Polfeldes)** umkehrt.

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2** | Name: | ET2-4A-2.DOC - 11.02.07

Arbeitsblatt Nr. **4 a)** : **Kraftwirkung** auf einen **Stromeiter** im **Magnetfeld** | Seite **2**

3. Berechnung der magnetischen Kraft F auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld

- Ein beweglich angeordneter **stromdurchflossener Leiter** wird in einem **Magnetfeld** durch eine magnetische **Kraft F abgelenkt.** .

- Die **Richtung** der **magnetischen Kraft F** ist abhängig von
  - der Richtung des **Magnetfeldes B** und von
  - der Richtung des **Stromes I** im Leiter.

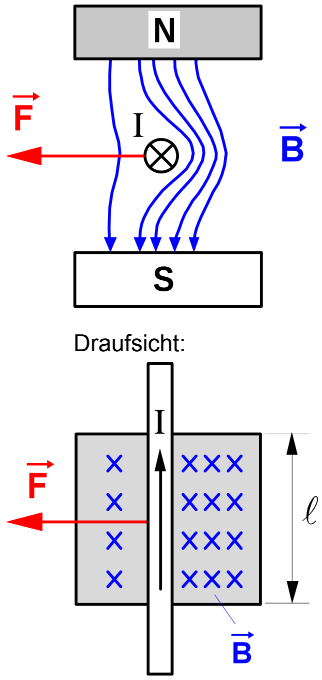


Bild 1: Stromleiter im Magnetfeld $\vec{B}$

Die Richtung der magnetischen Kraft F läßt sich mit Hilfe der »Linken-Hand-Regel« (siehe Bild 2) oder durch folgende Überlegung bestimmen (siehe zur Richtungsbestimmung auch den Leiterschaukelversuch auf dem Arbeitsblatt Nr. 4 a) S.1):

Auf der einen Seite des Leiters verlaufen die Feldlinien des Leiterfeldes entgegen den Feldlinien des Polfeldes (Bild **1**). Hier schwächen die Felder einander. Die Feldstärke nimmt auf dieser Seite des Leiters ab. Auf der anderen Seite des Leiters haben die Feldlinien beider Felder gleiche Richtung. Auf dieser Seite des Leiters wird das Feld dichter. Die Feldlinien werden dort „gestaut". Sie stoßen sich gegenseitig ab und haben das Bestreben, sich zu verkürzen. Der Leiter wird daher von der Stelle mit großer Feldstärke abgedrängt. Eine Begründung dieser Regel erfolgt im Zusammenhang der sog. »elektromagnetischen Induktion« im Lehrgang "Wechselstromtechnik".

- Der **Betrag F** der **magnetischen Kraft** auf den Stromleiter im Magnetfeld ist abhängig von:
  - der magnetischen **Feldstärke B** des Magnetfeldes, $F \sim B$
  - der elektrischen **Stromstärke I** in dem Leiter $F \sim I$
  - der im Magnetfeld **wirksamen** **Länge l** des Leiters . $F \sim \ell$

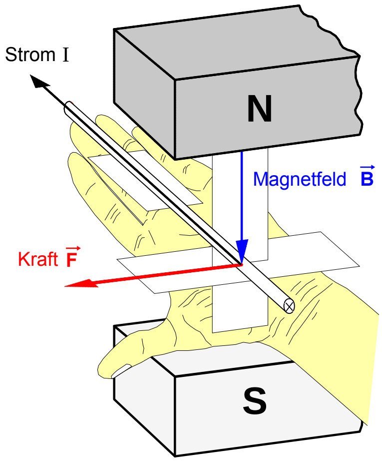


Bild 2: Linke-Hand-Regel

Ist der Stromleiter **senkrecht** zum Magnetfeld angeordnet (wie in den Bildern 1 und 2), so läßt sich der **Betrag F** der **magnetischen Kraft** (gemäß der bereits entwickelten Definitionsgleichung für die magnetische Feldstärke B) nach folgender Formel **berechnen**:

$$\boxed{F = I \cdot \ell \cdot B}$$

B ... magnet. Feldstärke in T

I ... Stromstärke im Leiter in A

ℓ ... wirksame Leiterlänge in m

F ... magnetische Kraft in N

Beispiel:
Ein Stromleiter mit der Stromstärke I = **10** A befindet sich senkrecht im Magnetfeld eines Dauermagneten. Mit Hilfe einer Stromwaage wird festgestellt, daß er mit einer Kraft **F** = **1,2** N abgelenkt wird. Wie groß wird die Ablenkkraft **F'**, wenn die Stromstärke in dem Leiter auf I' = **15** A erhöht wird? Die im Magnetfeld wirksame Leiterlänge beträgt **8** cm.

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name: ET2-5-1F.DOC - 30.01.03	
Arbeitsblatt Nr. **5** : **Kraftwirkung magnetischer Felder** auf **stromdurchflossene Leiter**		Seite **1**

1. Vorbetrachtung zum Begriff der **bewegten Ladung**

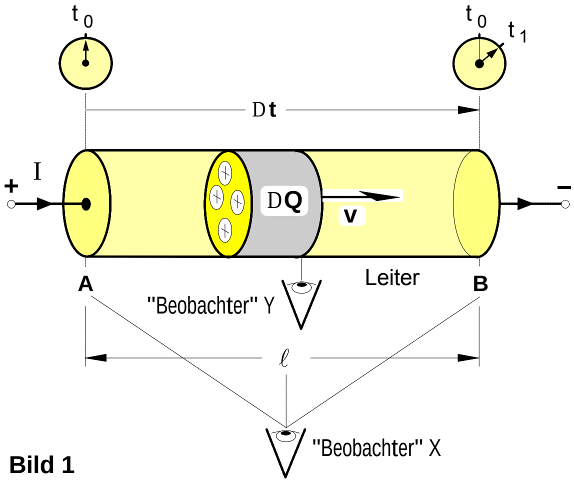


Bild 1

- **Voraussetzung**: In einem Leiterstück mit der Länge ℓ (Bild **1**) fließt ein Gleichstrom I, d.h. der gesamte Leiter ist von einer gleichförmig und stetig strömenden elektrischen Ladung Q erfüllt.
- "**Beobachter**" **X** ("Mechaniker") beobachtet die Bewegung einer Teilladung D**Q** gemäß **Bild 1** und stellt fest, daß diese sich in der Zeit D**t** gleichförmig durch das Leiterstück von **A** nach **B** bewegt und dabei den Weg D**s** = ℓ zurücklegt. Damit kann er eine Aussage machen über die **Geschwindigkeit** der bewegten Ladung:

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\ell}{\Delta t}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\ell}{v} \qquad \boxed{1.}$$

- "**Beobachter**" **Y** ("Elektriker") konzentriert seine Beobachtungen auf eine Querschnittsfläche des Leiters. Durch sie strömt in der gleichen Zeit D**t** nicht nur die Teilladung D**Q**, sondern eine Ladung **Q**, deren Größe bestimmt ist von der Stromstärke I in dem Leiterstück:

$$\boxed{Q = I \cdot \Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{Q}{I} \qquad \boxed{2.}$$

- Setzt man beide Gleichungen gleich, so ergibt sich $\frac{Q}{I} = \frac{\ell}{v}$ und für die **bewegte Ladung** gilt dann:

$$\boxed{Q \cdot v = I \cdot \ell}$$

Das Produkt "**Q · v**" ist ein Maß für die **Intensität der bewegten Ladung** in einem Leiter. Sie läßt sich meßtechnisch einfach bestimmen, indem man die Stromstärke I in dem Leiter und dessen Länge ℓ mißt. Das Produkt "$I \cdot \ell$", das auch als Merkmal des **stromdurchflossenen Leiters** gedeutet werden kann, ist zugleich ein Maß für die bewegte Ladung "**Q · v**" .

2. Die **magnetische Feldstärke B** als **Wirkungsgröße** des magnetischen Feldes

Bringt man gemäß Bild **2** in einen beliebigen Raumpunkt **P** eines Magnetfeldes einen Probekörper in Form eines stromdurchflossenen Probeleiters "$I \cdot \ell$" mit der bewegten Probeladung "**Q · v**", so wird dieser Probeleiter von einer magnetischen Kraft $\vec{F}$ abgelenkt, deren Größe durch die in dem jeweiligen Punkt wirksame Intensität des Magnetfeldes bestimmt ist. Auf dieser Kraft**wirkung**, die Magnetfelder auf bewegte Ladungen ausüben, beruht die im folgenden definierte Feldgröße **B**. Wir kennzeichnen sie daher als **Wirkungsgröße** des magnetischen Feldes und nennen sie analog zur elektrischen Feldstärke **E**, die ja ebenfalls auf einer Kraftwirkung beruht, als **magnetische Feldstärke B**. Exemplarisch wurde in den Abbildungen rechts ein Magnetfeld angenommen, das erzeugt wird von einem Strom I_1 bzw. einer bewegten Ladung $\mathbf{Q_1} \cdot \mathbf{v_1}$, die in einem geraden, langgestreckten Leiter strömt.

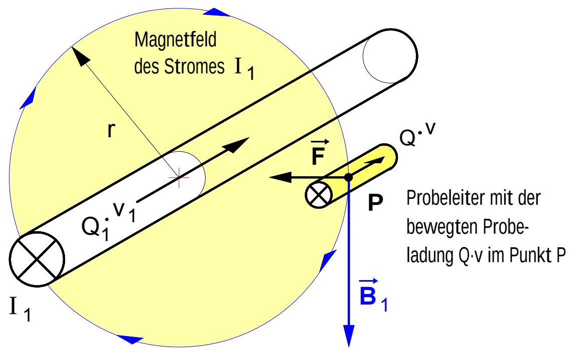


Bild 2 : Probeleiter mit der bewegten Probeladung **Q · v** im Punkt **P** eines Magnetfeldes

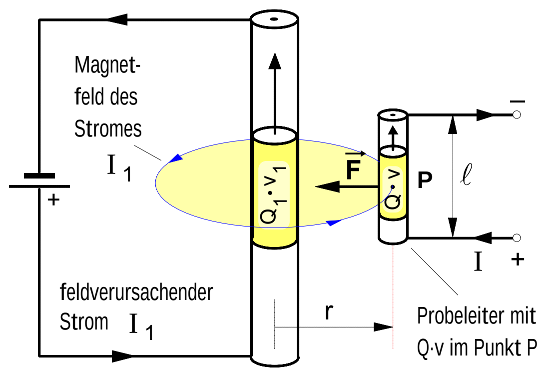


Bild 3 : Draufsicht zu **Bild 2**

- **Definition** (Meßvorschrift) der **magnetischen Feldstärke B**:

$$\boxed{B = \frac{F}{Q \cdot v}} \quad \text{bzw. mit } Q \cdot v = I \cdot \ell : \quad \boxed{B = \frac{F}{I \cdot \ell}}$$

Maßeinheit der magnetischen Feldstärke B:

$$[B] = \frac{[F]}{[I] \cdot [\ell]} = \frac{1N}{1A \cdot 1m} = 1\frac{N}{A \cdot m} = 1T \, (\Rightarrow \text{"Tesla"})$$

- Fazit: Die **magnetische Feldstärke B** in einem beliebigen Raumpunkt eines magnetischen Feldes ist demnach definiert als der **Quotient** aus der **magnetischen Kraft F**, die das Magnetfeld im Punkt P auf einen dort befindlichen stromdurchflossenen Probeleiter "$I \cdot \ell$" mit der bewegten Probeladung "**Q · v**" ausübt, und der **bewegten Ladung** "**Q · v**" in dem Probeleiter.

3. **Meßverfahren** zur Bestimmung der magnetischen **Feldstärke B** in einem **Magnetfeld**

a) Meßprinzip

An der Stelle, an der der Betrag der magnetischen Feldstärke **B** des zu untersuchenden Magnetfeldes bestimmt werden soll, wird gemäß **Bild 1** ein Probeleiter senkrecht zu den Feldlinien angeordnet. Sobald durch den Probeleiter mit der Länge ℓ ein Strom I fließt, überlagern sich die beiden Magnetfelder zu einem resultierenden Feld und auf den Probeleiter wirkt eine magnetische Kraft $\vec{F}$ (die sog. *Lorentzkraft* [1]), die bei der angegebenen Stromrichtung nach unten gerichtet ist und den Probeleiter senkrecht nach unten zieht (siehe Bild **1**). Der Betrag **F** dieser Kraft kann mit einem sehr empfindlichen Federkraftmesser (siehe **b**) oder mit einer Balkenwaage (siehe **c**) gemessen werden. Solche Meßeinrichtungen werden auch als "**Stromwaagen**" bezeichnet. Mißt man außerdem den Strom I und die in dem Magnetfeld wirksame Länge ℓ des Probeleiters, so läßt sich die in dem zu untersuchenden Magnetfeld herrschende magnetische **Feldstärke B** mit Hilfe der bereits entwickelten Definition (= Meßvorschrift) wie folgt berechnen:

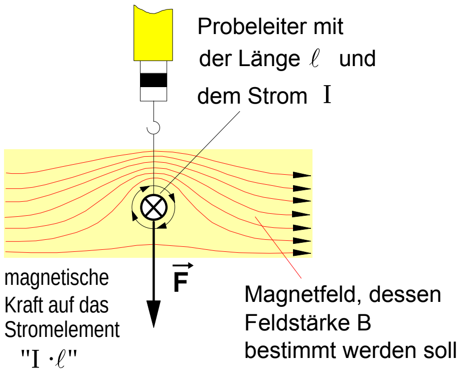
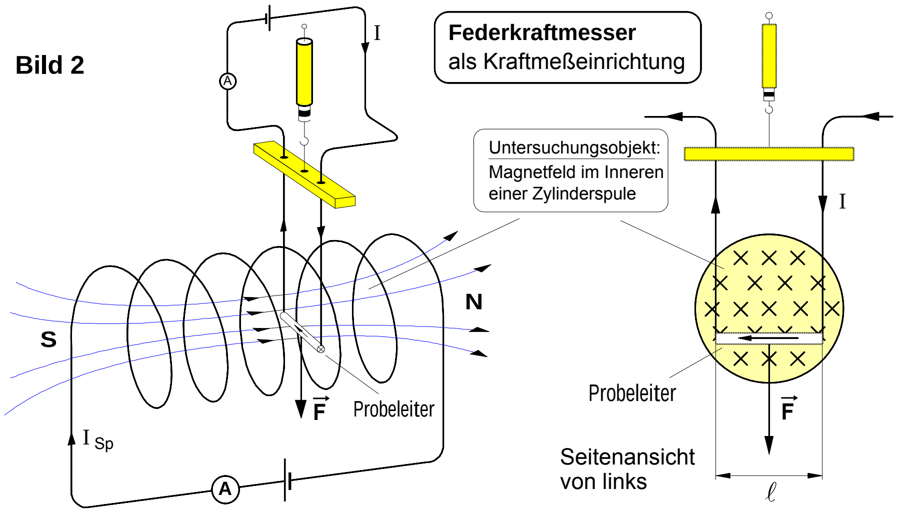


Bild 1: Probeleiter im Magnetfeld

$$\boxed{B = \frac{F}{I \cdot \ell}}$$ wobei: $I \cdot \ell = Q \cdot v$

b) Beispiel **1** : Messung der Feldstärke **B** in dem **Magnetfeld** einer **Zylinderspule**

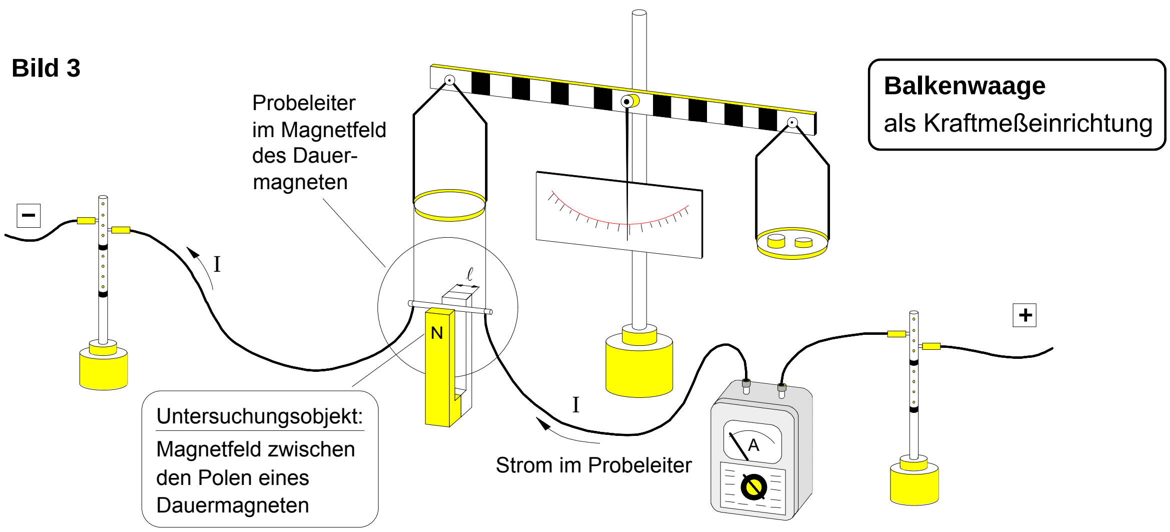
Bild 2



I	... Strom in dem Probeleiter in A
ℓ	... wirksame Länge des Probeleiters in m
F	... magnet. Kraft, die das zu untersuchende Magnetfeld auf den Probeleiter ausübt, in N
B	... magnetische Feldstärke des zu untersuchenden Magnetfeldes in T (Tesla [2])
I_{Sp}	... Spulenstrom, der das zu untersuchende Magnetfeld erzeugt

c) Beispiel **2** : Messung der Feldstärke **B** in dem **Magnetfeld** eines **Dauermagneten**

Bild 3

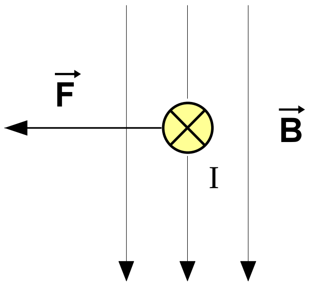


Noch ein **Hinweis**: Die magnetische Feldstärke **B** wird aus Gründen, auf die erst später eingegangen werden kann, auch als magnetische *Flußdichte* oder auch als magnetische *Induktion* bezeichnet.

[1] Hendrik Antoon **Lorentz** (1853–1928), holländ. Physiker   [2] Nicola **Tesla** (1856–1943), kroatischer Physiker (ab 1882 USA)

4. **Magnetische Kraft** auf eine **bewegte Ladung "$Q \cdot \vec{v}$"** im **Magnetfeld**

- **Erster Sonderfall:** Die bewegte Ladung $Q \cdot \vec{v}$ strömt **senkrecht** zum magnetischen Feld $\vec{B}$



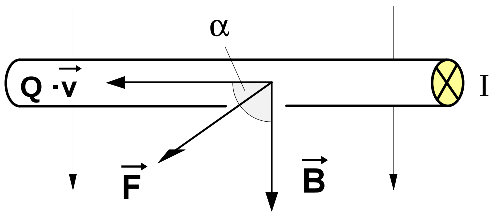
Für den **Betrag** der magnetischen Kraft gilt bei a = **90°** :

$$\boxed{F = Q \cdot v \cdot B}$$

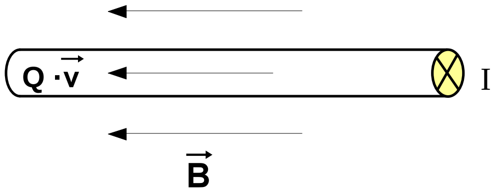
bzw. mit $Q \cdot v = I \cdot \ell$

$$\boxed{F = I \cdot \ell \cdot B}$$

Seitenansicht von links:



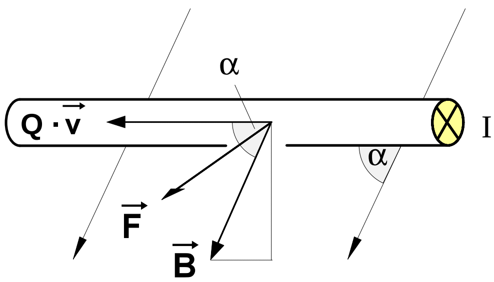
- **Zweiter Sonderfall:** Die bewegte Ladung $Q \cdot \vec{v}$ strömt **parallel** zum magnetischen Feld $\vec{B}$



Für den **Betrag** der magnetischen Kraft gilt bei a = **0°** :

$$\boxed{F = 0}$$

- **Allgemeiner Fall:** Die bewegte Ladung $Q \cdot \vec{v}$ strömt in einem **beliebigen Winkel** a zum magnetischen Feld $\vec{B}$



Allgemein gilt für den **Vektor** $\vec{F}$ der **magnetischen Kraft** das **Vektorprodukt** (auch **Kreuzprodukt** genannt) :

$$\boxed{\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}$$

bzw. mit $Q \cdot \vec{v} = I \cdot \vec{\ell}$:

$$\boxed{\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}}$$

▶ Für **alle Fälle** gilt außerdem:

> Der Kraft-Vektor $\vec{F}$ steht stets senkrecht auf dem Feld-Vektor $\vec{B}$.

Gemäß der **Definition** des **Vektorprodukts** ist der Vektor $\vec{F}$ wie folgt bestimmt:

▶ Für den **Betrag** gilt die Formel:

$$\boxed{F = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha}$$

wobei $\alpha = \angle\, \vec{v}, \vec{B}$

▶ Für die **Richtung** gilt die Regel :

"$\vec{v} \times \vec{B}$" bedeutet: Wird der Vektor $\vec{v}$ in Richtung des Vektors $\vec{B}$ gedreht, so orientiert sich der Vektor $\vec{F}$ gemäß einer **Rechtsschraube**.

▶ Für den **Betrag** gilt mit $Q \cdot v = I \cdot \ell$ die Formel:

$$\boxed{F = I \cdot \ell \cdot B \cdot \sin\alpha}$$

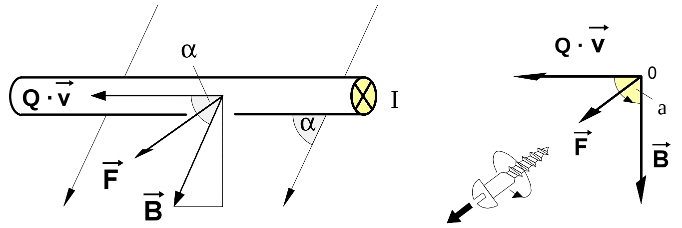
wobei $\alpha = \angle\, \vec{\ell}, \vec{B}$

▶ Für die **Richtung** gilt die Regel :

"$\vec{\ell} \times \vec{B}$" bedeutet: Wird der Vektor $\vec{\ell}$ in Richtung des Vektors $\vec{B}$ gedreht, so orientiert sich der Vektor $\vec{F}$ gemäß einer **Rechtsschraube**.

- Ist das Ergebnis der **Multiplikation zweier Vektoren** wiederum ein ***Vektor***, so handelt es sich um ein ***Vektorprodukt*** (auch ***Kreuz*produkt** genannt).

1. Die **magnetische Kraft** auf eine bewegte Ladung als Vektorprodukt



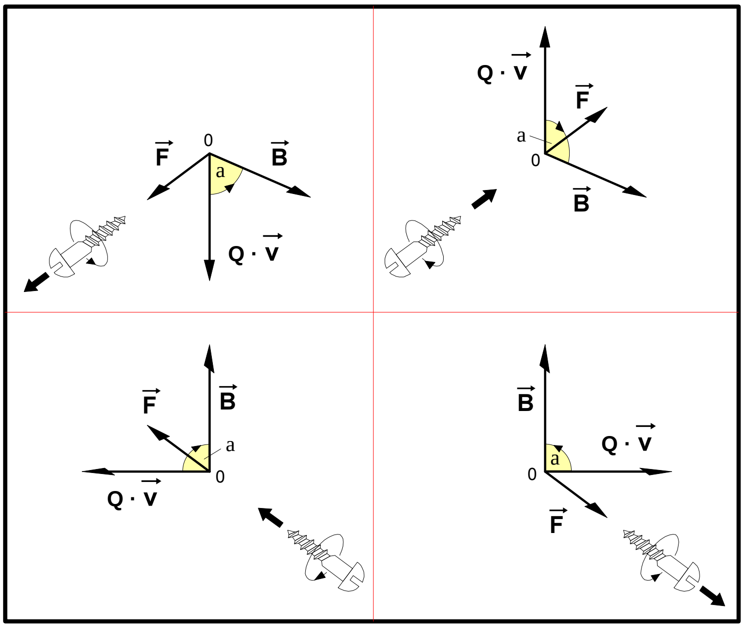
$$\boxed{\vec{F} = Q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)}$$

▶ Für den **Betrag F** des Produktvektors $\vec{F}$ gilt die Formel:

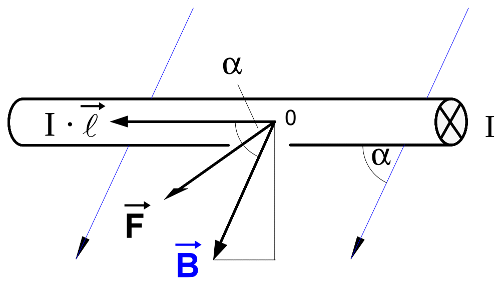
$$\boxed{F = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha}$$ wobei a = Ð $\vec{v}$, $\vec{B}$

▶ Für die **Richtung** des Produktvektors $\vec{F}$ gilt die Regel:

> $\vec{v}$ x $\vec{B}$ bedeutet: **Dreht** man den **Vektor vor** dem **Kreuzsymbol** (d.h. in diesem Falle den Vektor $\vec{v}$) in Richtung des **Vektors hinter** dem **Kreuzsymbol** (d.h. in diesem Falle in Richtung des Vektors $\vec{B}$), so entspricht die **Orientierung** des **Produktvektors** $\vec{F}$ der **Verschieberichtung** einer **Rechtsschraube**.



2. Die **magnetischen Kraft** auf einen **Stromleiter** als Vektorprodukt



$$\boxed{\vec{F} = I \cdot \left(\vec{\ell} \times \vec{B}\right)}$$

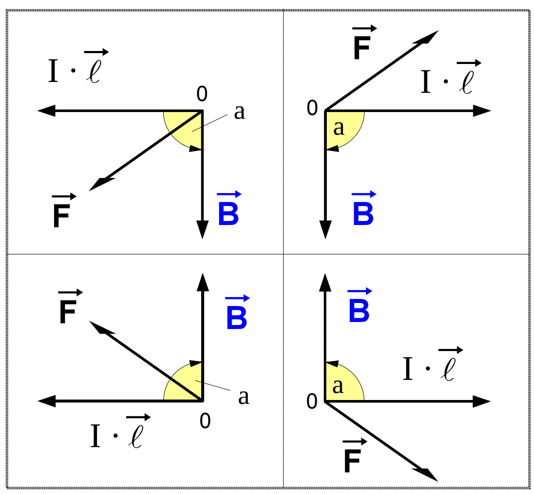
Nach dem Assoziativgesetz gilt hier auch: $\boxed{\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}}$

▶ Für den **Betrag** des Produktvektors $\vec{F}$ gilt die Formel:

$$\boxed{F = I \cdot \ell \cdot B \cdot \sin\alpha}$$ wobei a = Ð $\vec{\ell}$, $\vec{B}$

▶ Für die **Richtung** des Produktvektors $\vec{F}$ gilt die Regel:

> $\vec{\ell}$ x $\vec{B}$ bedeutet: **Dreht** man den **Vektor vor** dem **Kreuzsymbol** (d.h. in diesem Falle den Vektor $\vec{\ell}$) in Richtung des **Vektors hinter** dem **Kreuzsymbol** (d.h. in diesem Falle in Richtung des Vektors $\vec{B}$), so entspricht die **Orientierung** des **Produktvektors** $\vec{F}$ der **Verschieberichtung** einer **Rechtsschraube**.



Arbeitsblatt Nr. **6** : Die **magnetische Erregung H** als **Ursachen**größe des magnetischen Feldes

1. Zum **Problem** der Bestimmung einer **Ursachengröße** des **magnetischen Feldes**

- Nachdem wir die magnetische Feldstärke **B** als **Wirkungs**größe des magnetischen Feldes definiert haben (siehe Arbeitsblatt Nr. **5**), geht es bei den folgenden Überlegungen darum, eine Definition (= Meßvorschrift) zu begründen, die es ermöglicht, die Intensität des magnetischen Feldes in einem beliebigen Raumpunkt **P** seiner **Ursache** nach zu bestimmen. Dazu wollen wir annehmen, daß sich in dem Raumpunkt **P** ein Magnetfeld mit der Feldstärke $\mathbf{B_1}$ befinde und daß dieses Magnetfeld **verursacht** werde von einer bewegten Linienladung $\mathbf{Q_1 \cdot v_1}$, die in einem geraden Leiter ströme, der gemäß **Bild 1** im Abstand **r** vom Punkt **P** angeordnet sei. Demnach ist die bewegte Ladung $\mathbf{Q_1 \cdot v_1}$ die **Ursache** des Magnetfeldes; sie befindet sich jedoch **nicht** im Punkt **P**. Daher wäre zunächst zu fragen, wie sich in den Punkt **P** eine Feldursache, d.h. eine bewegte Ladung bringen ließe. Denn nach der FARADAYschen Nahewirkungs- bzw. Feldtheorie sind der Ort der **Wirkung** und der Ort der **Ursache** eines magnetischen Feldes nicht räumlich durch eine bestimmte Entfernung voneinander getrennt (wie dies die sog. "Fernwirkungstheorie" behauptete), sondern Ursache und Wirkung **fallen** in **jedem Raumpunkt** des jeweiligen Feldes **zusammen**.

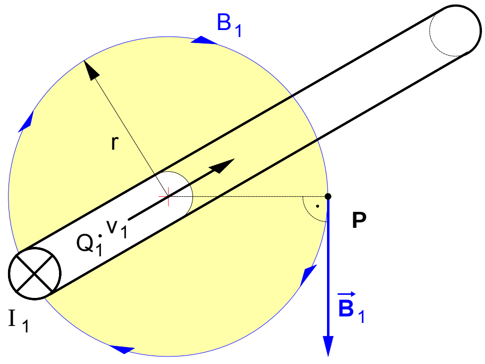


Bild 1

- Würde man im Punkt **P** ein zweites, seiner **Wirkungs**größe nach gleich großes, aber **entgegengesetzt** gerichtetes Magnetfeld mit dem Feldstärkebetrag $\mathbf{B_2}$ erzeugen, so würden sich beide Felder gegenseitig aufheben und der Raumpunkt **P** wäre magnetfeldfrei, was sich etwa mit Hilfe einer Magnetnadel unschwer nachweisen ließe. Ein solches Magnetfeld $\mathbf{B_2}$ könnte z.B. **verursacht** werden durch eine bewegte Ladung $\mathbf{Q_2 \cdot v_2}$, die auf der Manteloberfläche **A** eines sehr dünnen, koaxial um den Leiter mit der bewegten Ladung $\mathbf{Q_1 \cdot v_1}$ angeordneten Kupfer-Hohlzylinders mit dem Radius **r** in Gegenrichtung zu $\mathbf{Q_1 \cdot v_1}$ strömt (siehe **Bild 2**). Da der Punkt **P** auf dieser Zylindermantelfläche liegt, hätte man auch im Punkt **P** eine Feld**ursache** in Form der bewegten Ladung $\mathbf{Q_2 \cdot v_2}$, allerdings nicht nur dort, denn die bewegte Ladung $\mathbf{Q_2 \cdot v_2}$ würde sich gleichmäßig (so wollen wir annehmen) auf alle Punkte der Zylindermantelfläche **A** verteilen. Um nun die Größe der **Ursache** dieses Magnetfeldes gleichsam **pro Punkt** und damit auch im Punkt **P** zu bestimmen, müßte der Quotient aus der feldverursachenden Ladung $\mathbf{Q_2 \cdot v_2}$ und der Fläche **A** (in der ja alle Punkte auf der Zylindermantelfläche enthalten sind) gebildet werden. Da zudem vorausgesetzt wurde, daß die beiden Felder ihrer Wirkungsgröße nach gleich sind, daß also $\mathbf{B_2 = B_1}$ ist, wäre dieser Quotient $(\mathbf{Q_2 \cdot v_2})$ / **A** zugleich auch ein Maß für die **Ursache** von Feld $\mathbf{B_1}$ im Punkt **P**, also auch jenes Feldes, das von der im Innenleiter strömenden Ladung $\mathbf{Q_1 \cdot v_1}$ im Abstand **r** verursacht wird.

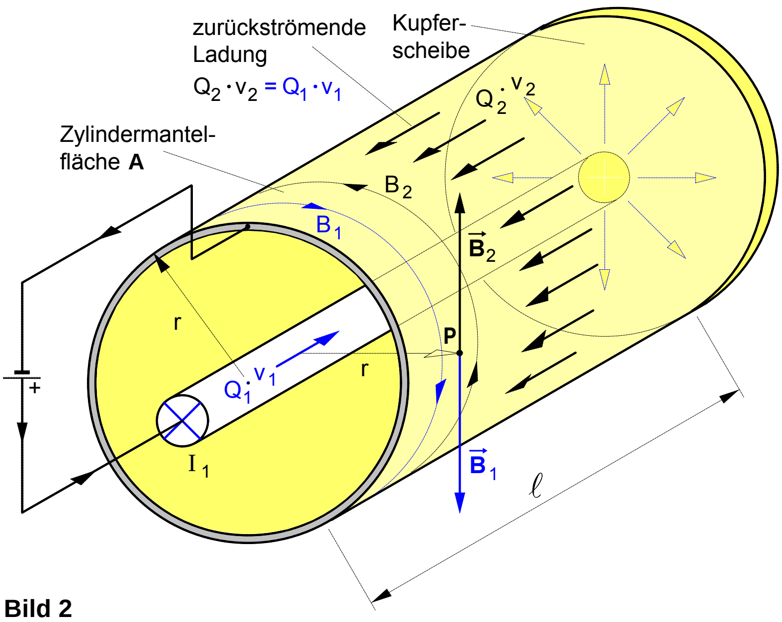


Bild 2

- Die dünne Kupferscheibe an der Stirnseite stellt eine leitende Verbindung zwischen Innenleiter und Hohlleiter dar. Dadurch ist gewährleistet, daß die zurückströmende Ladung $\mathbf{Q_2 \cdot v_2}$ dem Betrage nach genau so groß ist wie die in dem Innenleiter strömende Ladung $\mathbf{Q_1 \cdot v_1}$, d.h. es ist $\mathbf{Q_2 \cdot v_2 = Q_1 \cdot v_1}$. Deshalb kann –obwohl die feldverursachende Ladung $\mathbf{Q_1 \cdot v_1}$ sich selbst **nicht** im Punkt **P** befindet– auch der Quotient $(\mathbf{Q_1 \cdot v_1})$ / **A** als Größe zur Beschreibung der **Ursache** des Magnetfeldes $\mathbf{B_1}$ im Punkt **P** gedeutet werden, also jenes Magnetfeldes, das im **Abstand** **r** von der in dem Innenleiter strömenden Ladung $\mathbf{Q_1 \cdot v_1}$ verursacht wird. Wir bezeichnen diese **Ursachen**größe $(\mathbf{Q_1 \cdot v_1})$ / **A** des **magnetischen Feldes** analog zur "elektrischen Erregung **D**" im elektrischen Feld als **magnetische Erregung H** und definieren in allgemeinerer Form:

2. **Definition** der **magnetischen Erregung** als **Ursachen**größe des magnetischen Feldes

$$\boxed{H = \frac{Q \cdot v}{A}}$$

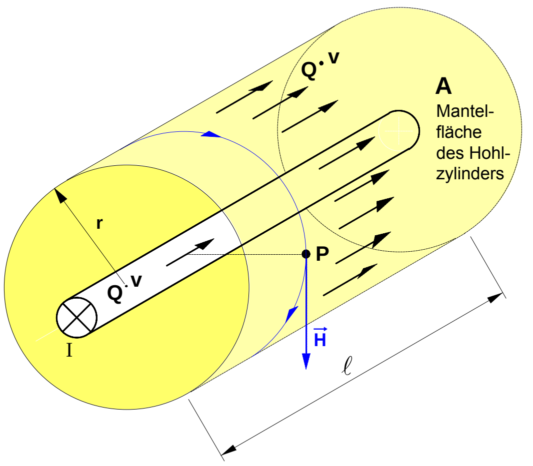
Q · v	...	feldverursachende bewegte Ladung in A · m
A	...	Mantelfläche des Hüllzylinders um die feldverursachende bewegte Ladung Q · v bzw. um das von ihr verursachte Magnetfeld mit dem Feldpunkt P in m²
H	...	magnetische Erregung im Feldpunkt P in A/m

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name: ET2-7-F.DOC - 06.02.03
Arbeitsblatt Nr. **7** : Der **Zusammenhang** der magnetischen **Feldgrößen B** und **H**	

· Bestimmung der **Ursachen**größe **H** und der **Wirkungs**größe **B** im **magnetischen Feld**

Auch in der folgenden Darstellung gehen wir von einem Magnetfeld aus, daß erzeugt werde von einem Strom I bzw. einer bewegten Ladung **Q · v** in einem geraden, langgestreckten Leiter und konzentrieren uns auf einen Raumpunkt **P**, der sich im Abstand **r** von dem geraden Leiter befinde.

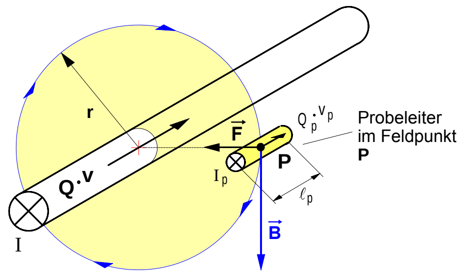
▶ Denkt man sich den Punkt **P** auf die Mantelfläche **A** eines sehr dünnen, koaxial um den geraden Leiter angeordneten "Probe-Hohlzylinders" z.B. aus einer Kupferfolie, und stellt sich vor, daß die feldverursachende Ladung **Q · v** statt in dem Innenleiter auf der Mantelfläche dieses Hohlleiters strömt, so würde diese in dem Punkt **P** das gleiche Magnetfeld ver**ursachen** wie die in dem geraden Leiter strömende Ladung **Q · v** .



▶ Gemäß ihrer Definition (Meßvorschrift) kann damit die magnetische **Erregung H** als **Ursachen**größe des magnetischen Feldes im Raumpunkt **P** wie folgt bestimmt werden:

$$\boxed{H = \frac{Q \cdot v}{A}}$$

▶ Bringt man in den Punkt **P** des Magnetfeldes einen stromdurchflossenen Probeleiter mit der Länge ℓ_P und der Stromstärke I_P, so ruft das magnetische Feld auf die bewegte Probeladung $\mathbf{Q_P \cdot v_P}$ in dem Probeleiter bzw. auf das Stromelement $I_P \cdot l_P$ eine **Wirkung** hervor, die darin besteht, daß der Probeleiter von einer magnetischen Kraft $\vec{F}$ abgelenkt wird, die senkrecht zu den Feldlinien verläuft.



▶ Gemäß ihrer Definition (Meßvorschrift) kann damit die magnetische **Feldstärke B** als **Wirkungs**größe des magnetischen Feldes im Raumpunkt **P** wie folgt bestimmt werden:

$$\boxed{B = \frac{F}{Q_P \cdot v_P}} \quad \text{bzw.:} \quad \boxed{B = \frac{F}{I_P \cdot \ell_P}}$$

· **Zusammenhang** zwischen **Ursachen**größe **H** und **Wirkungs**größe **B** des **magnetischen Feldes**

Ursache **H** - ⇒ **B** - **Wirkung**

Annahme: Die Wirkung ändere sich in gleichem Verhältnis wie die Ursache, d.h.: $\mathbf{B \sim H}$

Fügt man eine Konstante K als Proportionalitätsfaktor ein, so ergibt sich: $\mathbf{B = K \cdot H}$

Die **Konstante K** ist von dem **Material** des Stoffes **abhängig**, in dem sich das magnetische Feld befindet. Sie wird als **"Permeabilität" μ** (magn. Durchlässigkeit) bezeichnet (siehe unten).

$$\boxed{B = \mu \cdot H}$$

B ... magnetische Feldstärke in N/Am = T
μ ... Permeabilität in Tm/ A
H ... magnetische Erregung in A/m

· Die magnetische **Permeabilität μ**

$$\boxed{\mu = \mu_0 \cdot \mu_r}$$

μ_0 ... magnetische Feldkonstante in Tm/A

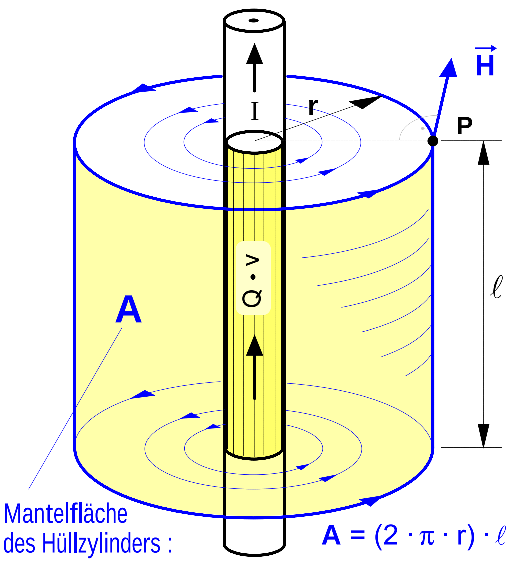
μ_r ... Permeabilitätszahl (Materialfaktor ohne Einheit)

▶ **Magnetische Feldkonstante:** $\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}\ \frac{T \cdot m}{A}$

▶ Die **Permeabilitätszahl** bei Magnetfeldern im *Vakuum* ist $\mathbf{\mu_r}$ = **1**. Bei *Luft* und bei vielen Nichteisenmetallen wie *Kupfer* und *Aluminium* liegt dieser Wert bei $\mathbf{\mu_r}$ » **1**. Bei *Eisen, Nickel* und *Kobalt* sind die $\mathbf{\mu_r}$–Werte deutlich höher und auch nicht konstant. Auf die Besonderheiten dieser sog. *ferromagnetischen Stoffe* wird später noch eingegangen.

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name: ET2-8-F.DOC - 13.02.03	
Arbeitsblatt Nr. **8** : **Magnetfeld** von **geradem Stromleiter** und **langer Zylinderspule**		

1. Magnetfeld in einem beliebigen Punkt außerhalb eines geraden Stromleiters



- Zur Bestimmung der **magnetischen Erregung H** in einem beliebigen Raumpunkt **P** im Abstand **r** außerhalb eines geraden Stromleiters mit dem Gleichstrom I (bzw. der bewegten Linienladung **Q · v**) gehen wir gemäß unserer Überlegungen zur Definition der Ursachengröße **H** von folgender **Modellvorstellung** aus: Der Punkt P befinde sich auf der Oberfläche eines unendlich dünnen Hohlleiters, der das Magnetfeld und damit die bewegte Ladung konzentrisch umhüllt. Auf der Mantelfläche **A** dieses Hüllzylinders mit dem Radius **r** und der Länge ℓ ströme die feldverursachende bewegte Ladung **Q · v** . Außerdem sei der gerade Leiter unendlich lang und habe einen vernachlässigbar kleinen Querschnitt. Unter diesen Voraussetzungen gilt für den Betrag **H** der **magnetischen Erregung** im Punkt P :

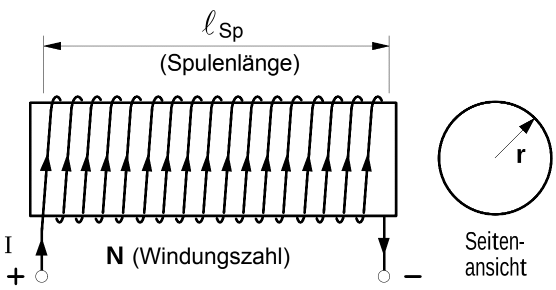
$$H = \frac{Q \cdot v}{A} \quad \text{mit} \quad Q \cdot v = I \cdot \ell \quad \text{und} \quad A = (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot \ell$$

$$H = \frac{I \cdot \ell}{(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot \ell} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}}$$

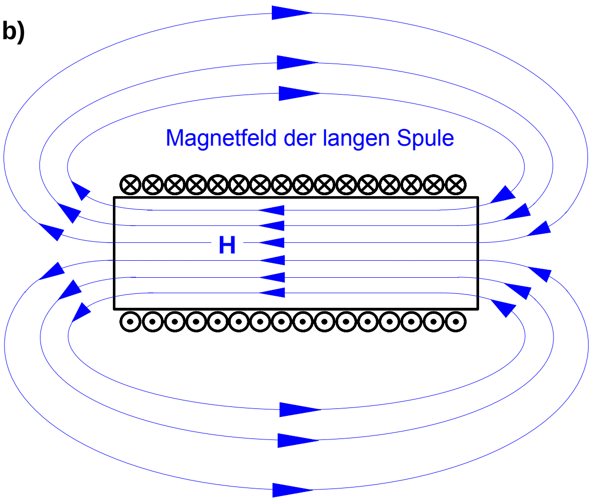
- Die magnetische **Feldstärke B** im Punkt P läßt sich dann mit folgender Formel berechnen: $\boxed{B = \mu_o \cdot H}$

2. Magnetfeld im Inneren einer »langen« Zylinderspule (auch »Solenoid« genannt)

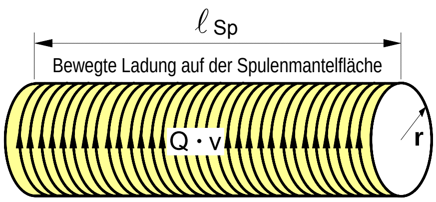
a)



b)



c)



- Die sog. »**lange**« **Spule** (Solenoid) ist ebenfalls eine theoretische Konstruktion, denn es handelt sich um das **Modell** einer unendlich langen Spule mit unendlich hoher Wicklungsdichte, bei der sich die feldverursachende Ladungsströmung **Q · v** gleichmäßig auf die Spulenmantelfläche **A** verteilt. Eine dicht gewickelte Spule, deren Länge größer ist als das 10-fache ihres Radius (ℓ_{Sp} > 10 · r), kommt diesem Modell praktisch gesehen sehr nahe. Bei einer solchen Spule ist das Magnetfeld im Inneren annähernd **homogen** und außerhalb der Spule vernachlässigbar klein.
- Für die **magnetische Erregung H** im Inneren einer solchen langen Zylinderspule gilt:

$$H = \frac{Q \cdot v}{A} \quad \text{mit} \quad A = (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot \ell_{Sp}$$

$$H = \frac{Q \cdot v}{(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot \ell_{Sp}} \quad \text{mit} \quad Q \cdot v = I \cdot \ell_{Dr}$$

$$H = \frac{I \cdot \ell_{Dr}}{(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot \ell_{Sp}} \quad \text{mit} \quad \ell_{Dr} = (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot N$$

$$H = \frac{I \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot N}{(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot \ell_{Sp}} \quad \Rightarrow$$

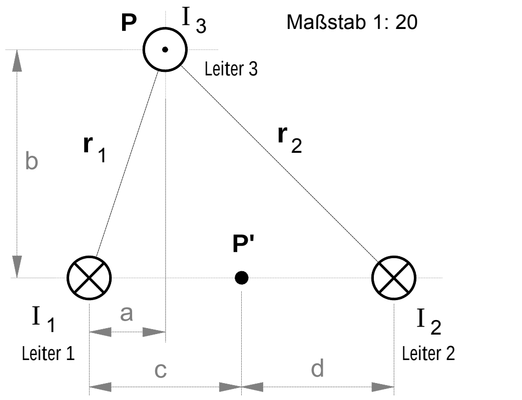
$$\boxed{H = \frac{I \cdot N}{\ell_{Sp}}}$$

I ... Stromstärke in der Spule in A
N ... Windungszahl der Spule
ℓ_{Sp} ... Länge der Spule in m
H ... magn. Erregung im Inneren der Spule in A/m
ℓ_{Dr} ... Länge des Wicklungsdrahtes in m

- Auch hier kann die magnetische **Feldstärke B** im Inneren der Spule mit der Formel $\boxed{B = \mu_o \cdot H}$ berechnet werden.

· **Überlagerung von Magnetfeldern paralleler Stromleiter** – Eine exemplarische Einführung

Drei auf einer Länge von 100m parallel verlaufende gerade Stromleiter einer **H**ochspannungs-**G**leichstrom-**Ü**bertragungs-Freileitung (HGÜ) sind gemäß nebenstehender Abbildung angeordnet.



I_1 = **90** A I_2 = **150** A I_3 = **90** A

a = 20 cm b = 60 cm c = d = 40 cm

▶ **Aufgabenstellung**

Zu bestimmen sind der **Betrag** und die **Richtung**

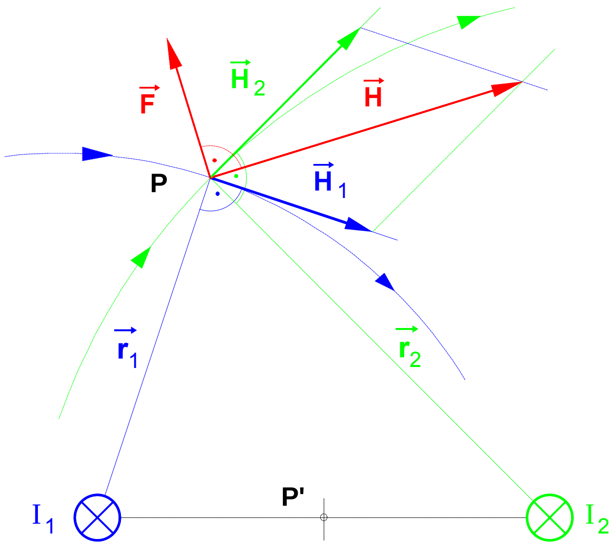
a) der magnetischen **Erregung** $\vec{H}$ im Punkt **P** im Mittelpunkt des Stromleiters mit dem Strom I_3

b) der magnetischen **Kraft** $\vec{F}$ auf den Stromleiter mit dem Strom I_3 und

c) der magnetischen **Erregung** $\vec{H}$**'** im Raumpunkt **P'**.

▶ **Lösung**

a) Die im Punkt **P** wirksame magnetische **Erregung** $\vec{H}$ wird ermittelt durch eine **geometrische Vektoraddition** der durch die Ströme I_1 und I_2 im Punkt **P** verursachten magnetischen Erregungen $\vec{H}_1$ und $\vec{H}_2$. Der Strom I_3 liefert selbst keinen Beitrag zur Magnetfelderzeugung im Punkt **P**.



- Beträge der Vektoren $\vec{H}_1$ und $\vec{H}_2$ im Punkt **P** :

$$H_1 = \frac{I_1}{2\cdot\pi\cdot r_1} = \frac{90\,\text{A}}{2\cdot\pi\cdot 0{,}63\,\text{m}} \Rightarrow \underline{H_1 = 22{,}65\ \text{A}/\text{m}}$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\cdot\pi\cdot r_2} = \frac{150\,\text{A}}{2\cdot\pi\cdot 0{,}85\,\text{m}} \Rightarrow \underline{H_2 = 28{,}10\ \text{A}/\text{m}}$$

Wichtiger Hinweis:

> Vektor $\vec{H}_1$ steht **senkrecht** auf dem Radiusvektor $\vec{r}_1$ und Vektor $\vec{H}_2$ steht **senkrecht** auf $\vec{r}_2$. Die **Orientierung** wird durch die **Stromrichtung** bestimmt.

- Aus dem maßstäblichen **Vektor-Parallelogramm** kann die Richtung und der Betrag **H** der im Punkt P wirksamen magnetischen Erregung bestimmt werden.

Ergebnis: **H = 43,27** A/m

b) Die auf den Leiter mit dem **Strom** I_3 wirkende magnetische **Kraft** $\vec{F}$ wird bestimmt durch die im Punkt **P** wirksame magnetische **Feldstärke** $\vec{B}$**.**

- Betrag **B** der **magnetischen Feldstärke** $\vec{B}$ im Punkt P (und damit in allen anderen Punkten entlang der parallel zu den Leitern 1 und 2 verlaufenden Linie durch den Mittelpunkt von Leiter 3):

$$B = \mu_0 \cdot H = 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}\cdot 43{,}27\,\frac{\text{A}}{\text{m}} \Rightarrow \underline{B = 5{,}44\cdot 10^{-5}\ \text{T} = 54{,}4\ \mu\text{T}}$$

Der $\vec{B}$-Vektor hat die gleiche Richtung wie der $\vec{H}$-Vektor.

- Betrag **F** der **magnetischen Kraft** $\vec{F}$, die das Magnetfeld mit der Feldstärke $\vec{B}$ entlang der Länge ℓ auf den Leiter mit dem Strom I_3 ausübt:

$$F = I_3\cdot\ell\cdot B = 90\,\text{A}\cdot 100\,\text{m}\cdot 5{,}44\cdot 10^{-5}\ \text{T} \Rightarrow \underline{\underline{F = 0{,}49\ \text{N}}}$$

Der magnetische Kraftvektor $\vec{F}$ steht stets senkrecht auf dem $\vec{H}$-Vektor (bzw. auf dem $\vec{B}$-Vektor).

· **Übungsaufgaben** zur Überlagerung von Magnetfeldern paralleler Stromleiter

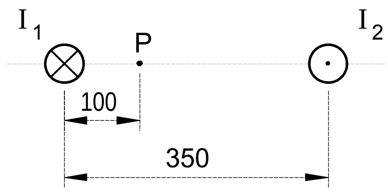
1. Ein dünner gerader Leiter wird von einem Strom I = **3,5** A durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke **B** in **5** cm Entfernung vom Mittelpunkt des Leiters. [B = 13,9 µT]

---

2. Zwei im Abstand von **35** cm parallel verlaufende Leiter führen die entgegengesetzt gerichteten Ströme $I_1 = I_2 =$ **25** A.

a) Wie groß sind die magnetische Erregung **H** und die magnetische Feldstärke **B** im Punkt **P** (siehe Abb. rechts) ? [B = 70 µT]

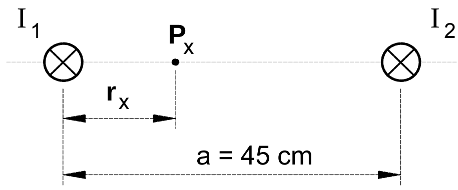
b) Wie groß wäre die magnetische Feldstärke **B** in Punkt P, wenn die Ströme in **gleicher** Richtung fließen würden? [B = 30 µT]



---

3. Zwei parallele Drähte im Abstand **45** cm führen die in gleicher Richtung fließenden Ströme I_1 = **20** A und I_2 = **30** A.

In welchem Abstand $\mathbf{r_x}$ vom linken Leiter liegt ein magnetfeldfreier Raumpunkt $\mathbf{P_x}$? [r_x = 18 cm]

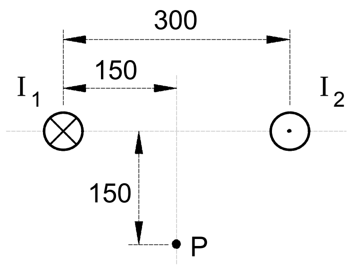


---

4. Zwei im Abstand von **30** cm parallel verlaufende Leiter führen die entgegengesetzt gerichteten Ströme $I_1 = I_2 =$ **15** A (siehe die Abb. rechts).

a) Berechnen Sie die magnetische Erregung **H** im Punkt **P**. [H = 15,9 A/m]

b) Mit welcher Kraft stoßen sich die Leiter ab, wenn sie auf einer Länge von **0,5** m parallel verlaufen? [F = 75 µN]

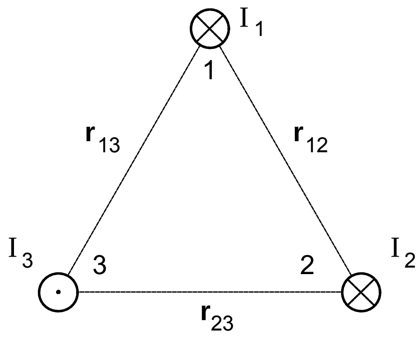


---

5. Drei parallel verlaufende Leiter sind so angeordnet, daß sie die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge **20** cm bilden. In den Leitern fließen die Ströme I_1 = **20** A , I_2 = **40** A und I_3 = **60** A. Ihre Richtungen sind in der nebenstehenden Abbildung angegeben.

a) Welche magnetische Erregung $\mathbf{H_1}$ herrscht im Mittelpunkt des Leiters mit dem Strom I_1 ? [H_1 = 42 A/m]

b) Welche Kraft $\mathbf{F_1}$ wird auf einer Länge von **1** m auf den Leiter mit dem Strom I_1 ausgeübt ? Bestimmen Sie außer dem Betrag auch die Richtung dieser Kraft. [F_1 = 1,05 mN]

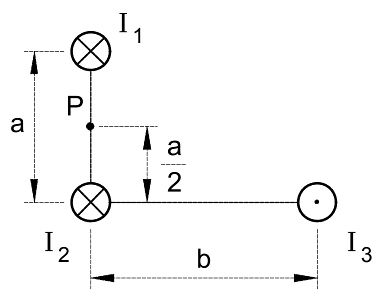


c) Welche Kräfte $\mathbf{F_2}$ und $\mathbf{F_3}$ werden je Meter Leiterlänge auf die Leiter **2** und **3** ausgübt? [2,1 mN und 3,2 mN]

---

6. In den gemäß nebenstehender Abbildung angeordneten drei Leitern einer Freileitung fließen die Ströme I_1 = **20** A, I_2 = **30** A und I_3 = **57** A. Die Abstände zwischen den Leitern betragen **a** = **40** cm und **b** = **60** cm.

Zur Beurteilung der Störwirkung dieser Freileitung sollen der Betrag und die Richtung der magnetische Erregung **H** im Punkt **P** bestimmt werden. [H = 14 A/m]

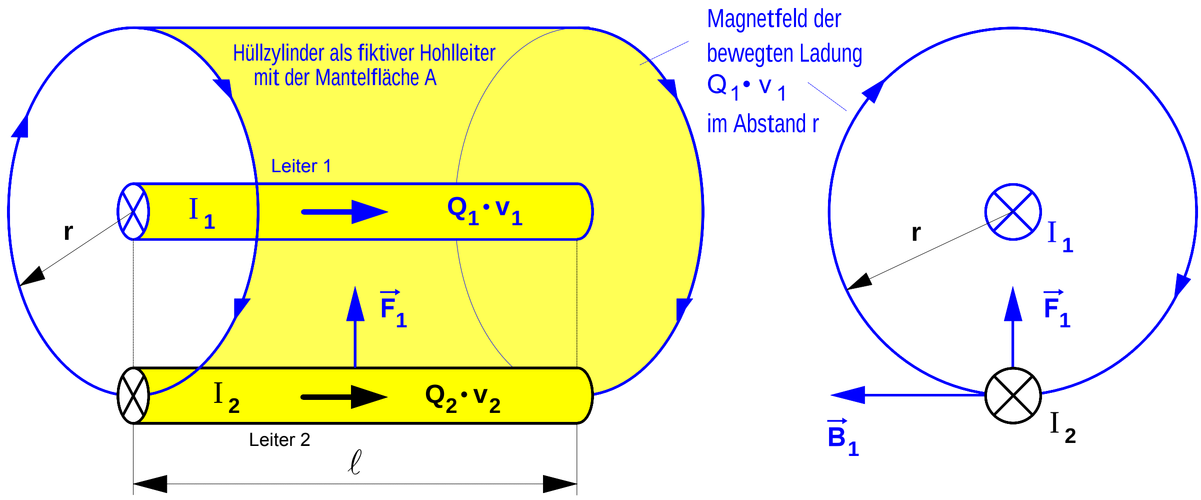


---

7. Bearbeiten Sie bitte außerdem aus dem Buch **Lindner, Elektro-Aufgaben, Band I** die Aufgaben (S. 48 f.) Nr. **484**, **490** und **491** (Übrigens: Lindner bezeichnet **B** als »Induktion« und bedauerlicherweise **H** als »Feldstärke«.)

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name: ET2-10-F.DOC - 20.02.03
Arbeitsblatt Nr. **10** : **Magnetische Kraft** zwischen zwei **parallelen Stromleitern**	

1. Berechnung der magnetischen **Kraft zwischen zwei geraden und parallelen Stromleitern**



- Berechnung des **Magnetfeldes**, den die bewegte Ladung $\mathbf{Q_1 \cdot v_1}$ im Abstand **r** verursacht

  Dazu denken wir uns um den Leiter **1** einen Hüllzylinder mit dem Radius **r** als fiktiven Hohlleiter und stellen uns vor, auf diesem Hohlleiter ströme die feldverursachende Ladung $\mathbf{Q_1 \cdot v_1}$ und rufe dort, wo sich der Leiter **2** mit der bewegten Linienladung $\mathbf{Q_2 \cdot v_2}$ befindet, ein Magnetfeld mit der Feldstärke $\mathbf{B_1}$ hervor (vgl. Arbeitsblatt Nr. **8**).

  ▸ **Magnetische Erregung H_1** (Ursachengröße) im Abstand **r** :

$$H_1 = \frac{Q_1 \cdot v_1}{A} \quad \text{mit} \quad \underbrace{A = 2\,\pi\,r \cdot \ell}_{\text{Mantelfläche des Hüllzylinders}} \qquad \Rightarrow \qquad H_1 = \frac{Q_1 \cdot v_1}{2\,\pi\,r \cdot \ell}$$

  ▸ **Magnetische Feldstärke B_1** (Wirkungsgröße) im Abstand **r** :

$$B_1 = \mu_0 \cdot H_1 \quad \text{mit} \quad H_1 = \frac{Q_1 \cdot v_1}{2\,\pi\,r \cdot \ell} \qquad \Rightarrow \qquad B_1 = \mu_0 \cdot \frac{Q_1 \cdot v_1}{2\,\pi\,r \cdot \ell}$$

- Berechnung des Betrages **magnetischen Kraft $\vec{F}_1$**, die das **Magnetfeld** mit der magnetischen Feldstärke $\mathbf{B_1}$ auf die **bewegte Ladung $Q_2 \cdot v_2$** ausübt (vgl. dazu auch den Versuch von Ampère auf dem Arbeitsblatt Nr. **3**)

$$F_1 = B_1 \cdot (Q_2 \cdot v_2) \quad \text{mit} \quad B_1 = \mu_0 \cdot \frac{Q_1 \cdot v_1}{2\,\pi\,r \cdot \ell} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{F_1 = \frac{\mu_0}{2\,\pi} \cdot \frac{(Q_1 \cdot v_1) \cdot (Q_2 \cdot v_2)}{r \cdot \ell}}$$

  ▸ Mit $\mathbf{Q_1 \cdot v_1} = I_1 \cdot \ell$ bzw. $\mathbf{Q_2 \cdot v_2} = I_2 \cdot \ell$ gilt dann :

$$F_1 = \frac{\mu_0}{2\,\pi} \cdot \frac{(I_1 \cdot \ell) \cdot (I_2 \cdot \ell)}{r \cdot \ell} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{F_1 = \frac{\mu_0}{2\,\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot \ell}{r}}$$

2. Anwendung: Internationale **Definition** der **Stromstärke-Maßeinheit »1 Ampere«**

> **1 Ampere** ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stromes, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand **1 m** voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je **1 m** Leiterlänge elektrodynamisch die Kraft **0,2** • 10^{-6} **N** hervorrufen würde.

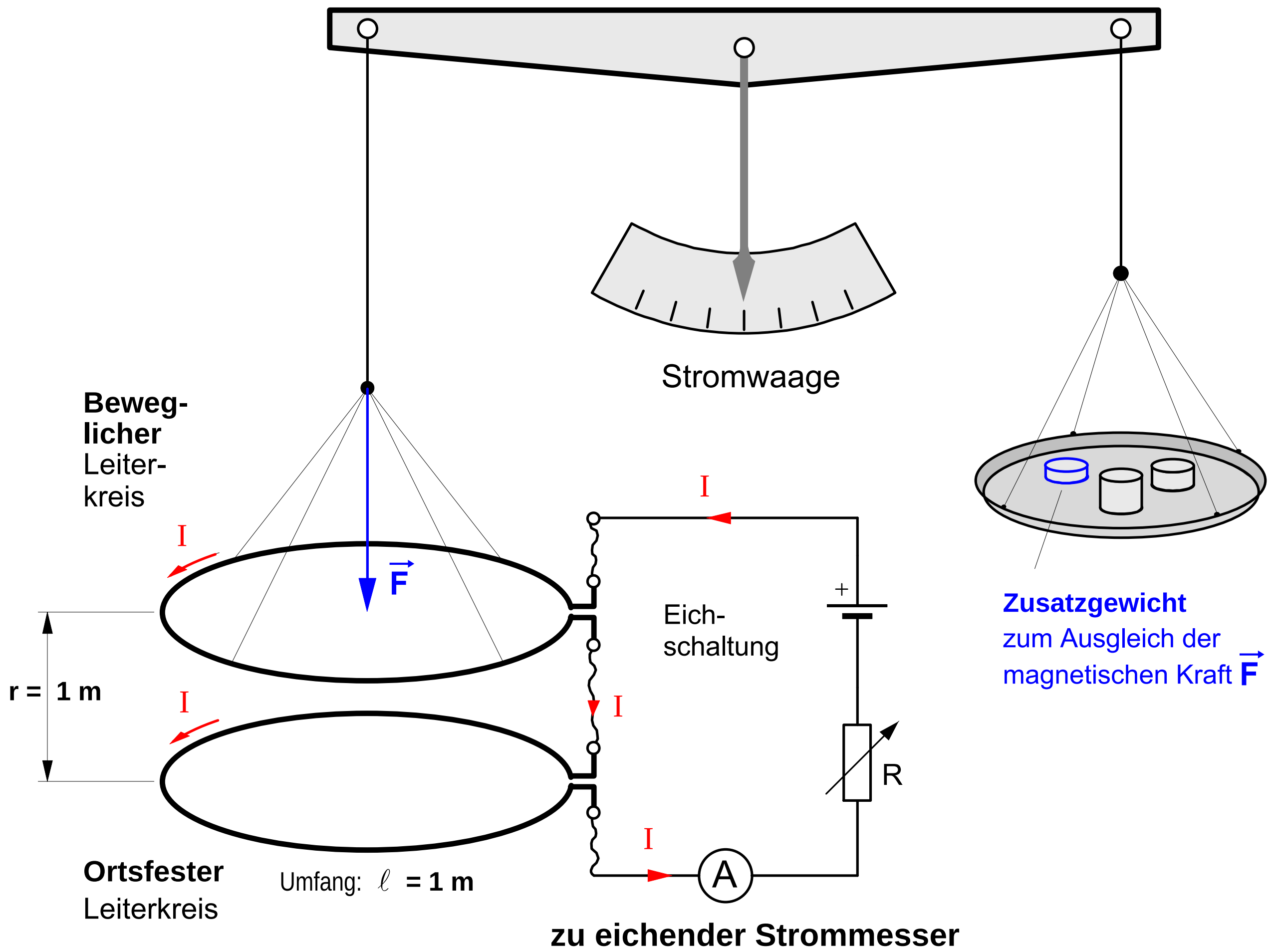
- Bestimmen Sie den durch diese Definition **festgelegten Wert** der **magnetischen Feldkonstanten μ_0 !**

$$\mu_0 = \frac{F \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{I_1 \cdot I_2 \cdot \ell} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1\mathrm{m}}{1\mathrm{A} \cdot 1\mathrm{A} \cdot 1\mathrm{m}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\mu_0 = 0{,}4 \cdot \pi \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{A}} = 1{,}257 \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{A}}}$$

1. **Definition** der Stromstärke-Maßeinheit »**1 Ampere**«

1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stromes, der, durch zwei im Vakuum parallel im **Abstand 1 m** voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je **1 m Leiterlänge** elektrodynamisch die Kraft **0,2** • 10 $^{-6}$ **N** hervorrufen würde.

2. Prinzipieller Aufbau einer Meßanordnung zur **Eichung eines Strommessers**



Verfahren der Eichung (Prinzip)

Der einstellbare Widerstand R wird solange verändert, bis der Betrag der Kraft den Wert **F = 0,2 µN** angenommen hat. Bei dieser Einstellung fließt in Reihenschaltung ein Strom von I **= 1 A** und es kann auf der Skala des Strommessers die Angabe »**1 Ampere**« markiert werden.

Nun wird R solange verändert, bis sich die magnetische Kraft auf **F = 0,4 µN** erhöht hat. Jetzt kann davon ausgegangen werden, daß ein Strom von I = **2** A fließt und auf der Skala kann die Marke »**2 Ampere**« gesetzt werden. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis alle Stromstärke-Marken auf der Skala gesetzt sind. Verfahrenstechnisch wäre es sicher am einfachsten, Zusatzgewichte mit folgender Masse zu verwenden:

$$m = \frac{F}{g} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{m = 0{,}0204\,\mathrm{mg}}$$

Arbeitsblatt Nr. **11** : **Magnetisches Feld** im **Inneren** eines geraden **Stromleiters**

In der folgenden Darstellung geht es um die Berechnung der magnetischen Erregung **H** sowie der Feldstärke **B** im **Inneren** eines geraden Stromleiters mit kreisförmigem Querschnitt. Dazu betrachten wir einen Punkt $\mathbf{P}_i$, der sich innerhalb des Leiters im Abstand $\mathbf{r}_i$ von dessen Mittelpunkt befindet. Zur Erzeugung des Magnetfeldes im Abstand $\mathbf{r}_i$ trägt nur der Teil der bewegten Ladung **Q · v** und damit nur der Teil des Leiterstromes I bei, der in dem von der Feldlinie mit dem Radius $\mathbf{r}_i$ umschlossenen Querschnittsanteil $\mathbf{A}_i$ strömt. Bei der Bestimmung dieser feldverursachenden Anteile der bewegten Ladung bzw. des Stromes gehen wir davon aus, daß sich die bewegte Ladung gleichmäßig auf den gesamten Leiterquerschnitt **A** verteile, d.h. wir nehmen an, daß die Stromdichte **S** = I/**A** in jedem Punkt der Querschnittsfläche **A** gleich groß sei.

- Berechnung der **Stromdichte S** in dem Leiter

$$S = \frac{I}{A} \qquad \text{mit} \qquad A = R^2 \cdot \pi \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{S = \frac{I}{R^2 \cdot \pi}}$$

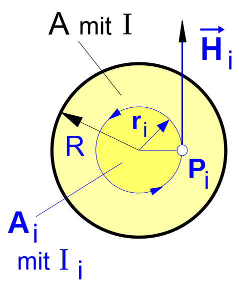


Bild 1 Magnetfeld im Inneren eines Leiters

- Feldverursachender **Strom*anteil*** I_i in dem **Querschnitts*anteil*** $\mathbf{A}_i$

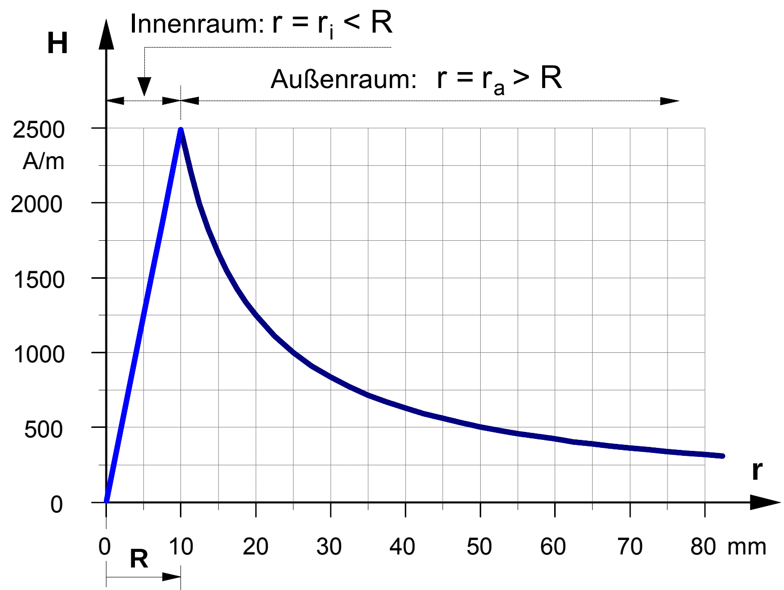
$$I_i = S \cdot A_i \quad \text{mit} \quad S = \frac{I}{R^2 \cdot \pi} \quad \text{und} \quad A_i = r_i^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_i = \frac{I}{R^2} \cdot r_i^2}$$

- Betrachten wir den *inneren* Leiteranteil mit dem Querschnitt $\mathbf{A}_i$ als geraden Rundleiter mit dem Strom I_i, so ergibt sich nach Arbeitsblatt Nr. 26 für $\mathbf{H}_i$ auf dessen Randfeldlinie, also für $\mathbf{H}_i$ im Abstand $\mathbf{r}_i$ vom Leitermittelpunkt, und damit für die in dem Punkt $\mathbf{P}_i$ im **Inneren** des Leiters herrschende **magnetische *Erregung*** $\mathbf{H}_i$:

$$H_i = \frac{I_i}{2 \cdot \pi \cdot r_i} \quad \text{mit} \quad I_i = \frac{I}{R^2} \cdot r_i^2 \quad \Rightarrow \quad H_i = \frac{I}{R^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_i} \cdot r_i^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_i = \frac{I}{R^2 \cdot 2 \cdot \pi} \cdot r_i}$$

- Im **Inneren** eines *Kupfer*- oder *Aluminium*leiters mit μ_r = **1** gilt dann für die **magnetische *Feldstärke*** $\mathbf{B}_i$ im Abstand $\mathbf{r}_i$ vom Leitermittelpunkt :

$$\boxed{B_i = \mu_0 \cdot H_i = \mu_0 \cdot \frac{I}{R^2 \cdot 2 \cdot \pi} \cdot r_i}$$



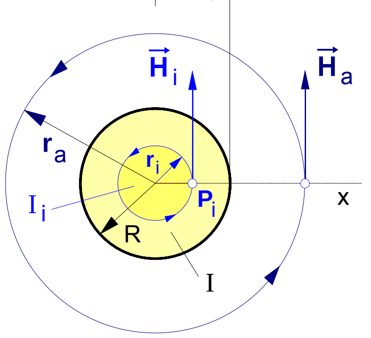


Bild 2 Magnetische Erregung H innerhalb und außerhalb eines geraden runden Leiters

R ... Radius des Leiters

$\mathbf{r}_a$ ... Radius einer Feldlinie a u ß e r h a l b des Leiters

$\mathbf{r}_i$ ... Radius einer Feldlinie i n n e r h a l b des Leiters

- **Aufgabe**

Stellen Sie den Verlauf der magnetischen Erregung **H** innerhalb und außerhalb eines geraden Stromleiters in Abhängigkeit vom Abstand **r** vom Leitermittelpunkt entlang der horizontalen Linie **x** in dem nebenstehenden maßstäblichen **H–r–**Diagramm dar.

Daten des Stromleiters:

I = **157,08** A **R** = **10** mm.

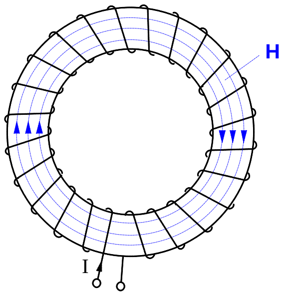
Arbeitsblatt Nr. **12** : **Magnetische Erregung H** in **Spulen** und die elektrische **Durchflutung**

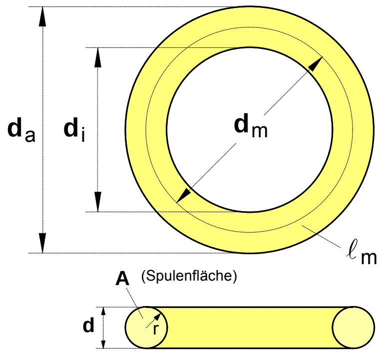
1. Die **magnetische Erregung H** im Inneren verschiedener **Spulen**

a) Die **Ringspule** (auch »Toroid« genannt)

$$\boxed{H = \frac{I \cdot N}{\ell_m}}$$

I ... Erregerstromstärke in A
N ... Windungszahl der Spule
ℓ_m ... mittlere Feldlinienlänge in m
H ... magnetische Erregung in A/m





$$\boxed{d_m = \frac{d_a + d_i}{2}}$$

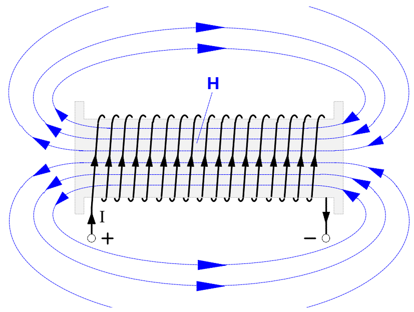
$$\boxed{\begin{aligned} \ell_m &= \pi \cdot d_m \\ d_m &= 2 \cdot r_m \end{aligned}}$$

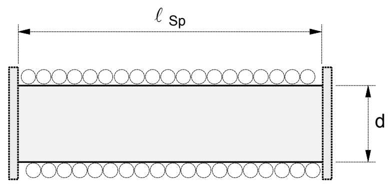
ℓ_m ... mittlere Feldlinienlänge
d_m ... mittlerer Durchmesser
r_m ... mittlerer Radius
d_a ... Außendurchmesser
d_i ... Innendurchmesser
r ... Radius der Spulenfläche

b) Die »**lange**« **Zylinderspule** (Spulen mit ℓ_{Sp} **> 5 · d** – auch »Solenoid« genannt)

$$\boxed{H = \frac{I \cdot N}{\ell_{Sp}}}$$

I ... Erregerstromstärke in A
N ... Windungszahl der Spule
ℓ_{Sp} ... Länge der Spule in m
H ... magnetische Erregung in A/m

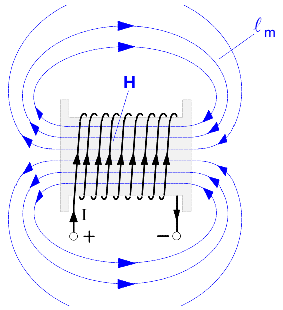


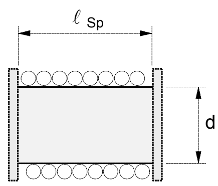


c) Die »**kurze**« **Zylinderspule** (sehr grobe (!!) Näherungsformel für Spulen mit ℓ_{Sp} **< 5 · d**)

$$\boxed{H = \frac{I \cdot N}{\ell_m}}$$

I ... Erregerstromstärke in A
N ... Windungszahl der Spule
ℓ_m ... mittlere Feldlinienlänge in m
H ... magnetische Erregung in A/m





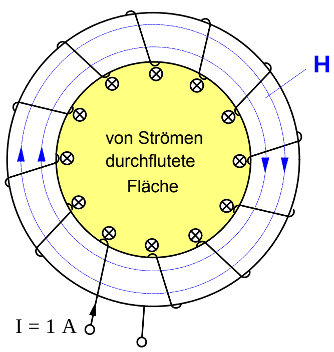
In sehr grober Näherung gilt für die mittlere Feldlinien-länge einer »kurzen« Spule:

$$\boxed{\ell_m \approx 2 \cdot \ell_{Sp}}$$

2. Die sogenannte **elektrische Durchflutung** Θ (Formelzeichen: Theta)

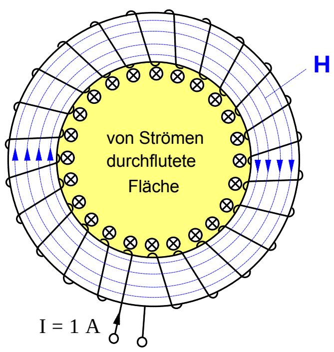
Der Begriff »elektrische Durchflutung« soll hier kurz am Beispiel einer Ringspule erläutert werden. Die Stärke des Magnetfeldes einer Spule steigt mit der Anzahl **N** der elektrischen Ströme (jeweils mit der Stärke I), welche die von den magnetischen Feldlinien umrandete Fläche gleichsam »durchfluten«. Mit anderen Worten: Die Stärke des Magnetfeldes wächst mit der »elektrischen Durchflutung«. Die »elektrische Durchflutung« ist demnach eine magnetische Größe.

N = 12



Θ = 12 · 1 A = 12 A

N = 24



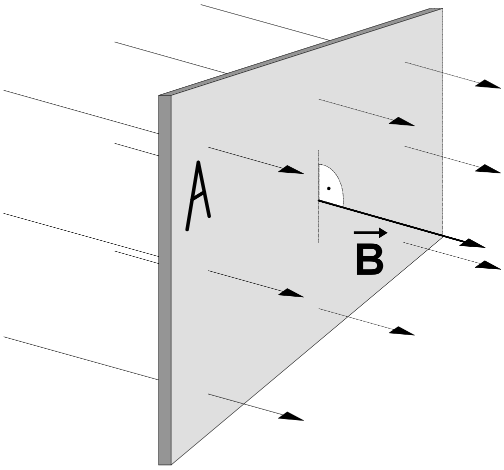
Θ = 24 · 1 A = 24 A

Definiton der **elektrischen Durchflutung**:

$$\boxed{\Theta = I \cdot N}$$

I ... Erregerstromstärke in A
N ... Windungszahl der Spule und damit die Anzahl der Ströme, die die vom Magnetfeld umrandete Fläche durchfluten
Q ... elektrische Durchflutung in A

- Zur Kennzeichnung der **räumlichen Ausdehnung** des **Wirkungsbereiches** eines **Magnetfeldes** mit der magnetischen Feldstärke **B** hat man in der Elektrodynamik eine dem elektrischen Feldfluß F_{el} = **E • A** analoge magnetische Feldgröße eingeführt. Sie wird als **magnetischer Fluß** F bezeichnet. Wird eine bestimmte **Fläche A** vollständig von einem **homogenen** Magnetfeld mit der magnetischen **Feldstärke B senkrecht** durchsetzt, so ist der **magnetische Fluß** F durch diese Fläche wie folgt definiert:



$$\boxed{\Phi = B \cdot A}$$

A ... ebene Fläche **senkrecht** im magnetischen Feld in **m²**

B ... magnetische Feldstärke in jedem Punkt der Fläche in **T**

F ... magnetischer Fluß in **T · m²** = **Wb** (= Weber)

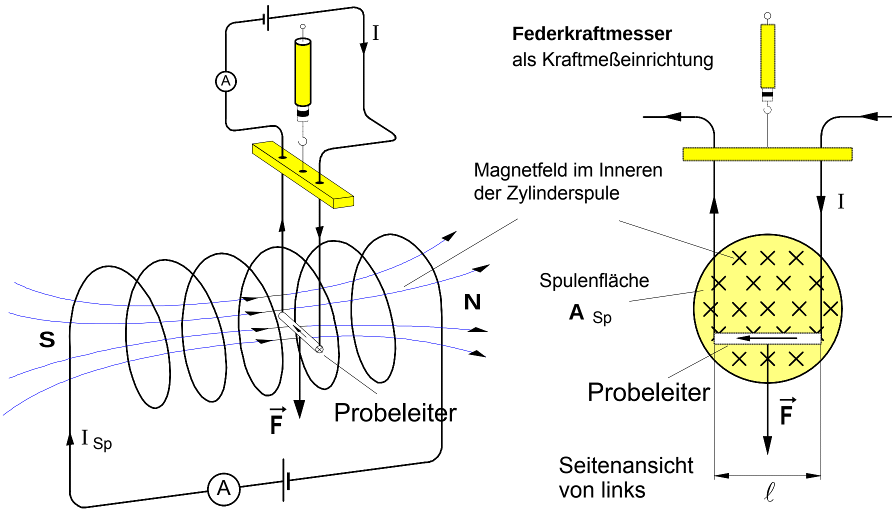
- Da mit der magnetischen Feldstärke **B** die in jedem Punkt auf der Fläche **A** vorhandene Intensität des Magnetfeldes gekennzeichnet wird und da in der Fläche **A** alle nur denkbaren Feldpunkte enthalten sind, ist das Produkt "**B · A**" und damit der magnetische **Fluß** F gleichsam ein Maß dafür, "wieviel Magnetfeld mit der Feldstärke **B**" durch eine bestimmte Fläche **A** "hindurchströmt". Um Fehldeutungen zu vermeiden, sei darauf hingewiesen, daß die magnetische Feldstärke **B** stets gemäß der Definition **B** = **F** / (I · ℓ) etwa mit Hilfe einer "Stromwaage" **gemessen** werden kann (siehe unten). Auf dieser Grundlage ließe sich dann der magnetische **Fluß** F im Feldlinienmodell (bei einer vereinbarten Feldliniendichte als Maß für die Feldstärke **B**) als "Anzahl der Feldlinien" deuten, die eine bestimmte Fläche durchsetzen.

- Stellt man die obige Definitionsgleichung für den magnetischen Fluß F nach **B** um, so wird deutlich, warum die magnetische Feldstärke **B** mit Recht auch als "magnetische Fluß**dichte**" bezeichnet werden kann. Denn umso kleiner die Fläche ist, auf die sich ein gegebener magnetischer Fluß verteilt, desto dichter verlaufen die Feldlinien des Magnetfeldes, d.h. mit steigender Fluß**dichte** wird auch dessen Feld**stärke** größer.

$$\boxed{B = \frac{\Phi}{A}}$$

- **Aufgabenbeispiel**

  In dem homogenen Magnetfeld im Inneren einer "langen" Zylinderspule (ℓ_{Sp} = **30** cm, $\mathbf{d}_{Sp}$ = **5** cm, **N** = **3000**) befindet sich ein Probeleiter mit der Länge ℓ = **3** cm. Er ist gemäß der nebenstehenden Abbildung senkrecht zum Magnetfeld angeordnet und beweglich an einer "Stromwaage" aufgehängt. Bei einem Strom von I = **8** A in dem Probeleiter wird eine magnetische Kraft **F** = **50** mN gemessen.



a) Berechnen Sie den **Strom** I_{Sp} in der **Zylinderspule**. [16,57 A]

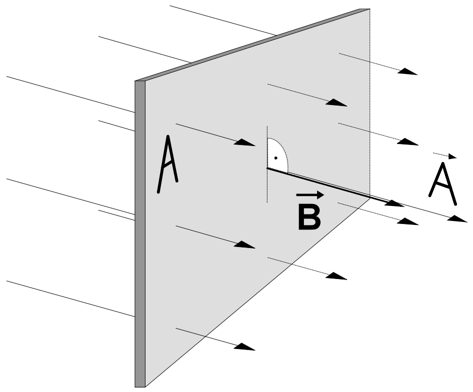
b) Wie groß ist der **magnetische Fluß** im Inneren der Zylinderspule? [408 µWb]

c) Berechnen Sie die elektrische **Durchflutung** der Zylinderspule? [49710 A]

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name: ET2-13AF.DOC - 24.02.04
Arbeitsblatt Nr. **13 a)** : **Der magnetische Feldfluß Φ** (Ergänzender Nachtrag)	

► **Sonderfall 1** : Ein **homogenes** magnetisches Feld verläuft **senkrecht** durch eine ebene Fläche **A**

Zur Kennzeichnung der **räumlichen Ausdehnung** des Wirkungsbereichs eines Magnetfeldes hat man in der Elektrodynamik eine dem elektrischen Feldfluß $F_{el} = \vec{E} \cdot \vec{A}$ analoge magnetische Feldgröße eingeführt. Sie wird als **magnetischer Fluß** F bezeichnet. Wird eine bestimmte **Fläche A** vollständig von einem **homogenen** Magnetfeld mit der magnetischen **Feldstärke B senkrecht** durchsetzt, so ist der **magnetische Fluß** F durch diese Fläche wie folgt definiert:



$$\boxed{\Phi = B \cdot A}$$

A ... ebene Fläche senkrecht im magnetischen Feld in **m²**

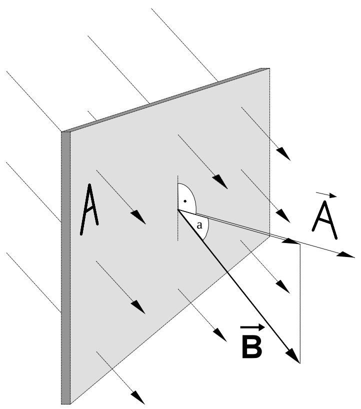
B ... magnetische Feldstärke in jedem Punkt der Fläche in **T**

F ... magnetischer Fluß in T · m² = **Wb** (=Weber)

Das Produkt "**B · A**" ist gleichsam ein Maß dafür, "wieviel Magnetfeld mit der Feldstärke B" durch eine bestimmte Fläche "hindurchströmt". Im Feldlinienmodell ließe sich der magnetische Fluß F (bei einer vereinbarten Feldliniendichte als Maß für die Feldstärke B) als "Anzahl der Feldlinien" deuten, die eine bestimmte Fläche A durchsetzen.

► **Sonderfall 2** : Ein **homogenes** magnetisches Feld verläuft **schräg** durch eine ebene Fläche **A**

Häufig wird eine ebene Fläche **A** nicht senkrecht, sondern **schräg** von einem **homogenen** magnetischen Feld mit der Feldstärke **B** durchsetzt, d.h. der **Vektor** der magnetischen Feldstärke $\vec{B}$ und der Flächenvektor $\vec{A}$ haben nicht mehr die gleiche Raumrichtung, sondern schließen einen von Null verschiedenen **Winkel** a ein. In diesen Fällen ist der magnetische Fluß F zu bestimmen als das **Skalarprodukt** der **Vektoren** $\vec{B}$ und $\vec{A}$.



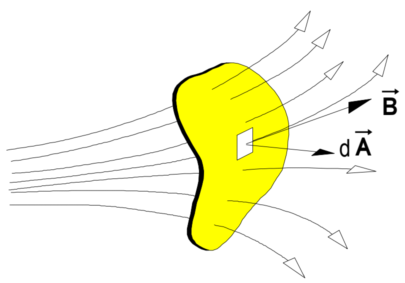
$$\boxed{\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}}$$

Mit den ***Beträgen*** $|\vec{B}| = B$ und $|\vec{A}| = A$ läßt sich der magnetische Fluß in diesem Fall wie folgt berechnen:

$$\boxed{\Phi = B \cdot A \cdot \cos\alpha}$$

Wobei a der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{B}$ und $\vec{A}$ ist.

► **Allgemeiner Fall** : Ein **inhomogenes** magnetisches Feld durchsetzt eine **beliebige Fläche A**



In den meisten Fällen ist das eine Fläche A durchsetzende magnetische Feld **inhomogen**, d.h. in jedem Punkt der Fläche herrscht dem Betrage **und** der Richtung nach eine andere magnetische Feldstärke $\vec{B}$. In diesem Fall denken wir uns die Gesamtfläche A in mehrere Flächenstücke $\Delta \vec{A}_i$ mit jeweils einer durchschnittlichen Feldstärke $\vec{B}_i$ zerlegt. Für den magnetischen Fluß gilt dann *näherungsweise* die Summe:

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta \Phi_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$$

Für die *exakte* Bestimmung des magnetischen Flusses ist der **Grenzwert dieser Summe** zu bilden:

$$\Phi = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$$

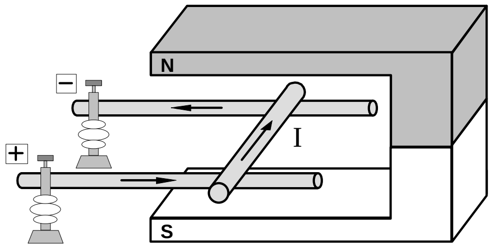
Dieser Grenzwert ist das Flächenintegral :

$$\boxed{\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}}$$

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name:	ET2-13B.DOC - 07.04.07

Arbeitsblatt Nr. **13 b)** : **Berechnung magnetischer Felder in Luft** (Erste Übungen)

1. Im Magnetfeld eines Hufeisenmagneten befindet sich gemäß der nebenstehenden Abbildung ein beweglicher Leiterstab mit einer im Magnetfeld **wirksamen Länge** von **5 cm**. Sobald durch den Leiter ein Strom von **20 A** fließt, wirkt auf ihn eine magnetische Kraft von **1,4 N**.



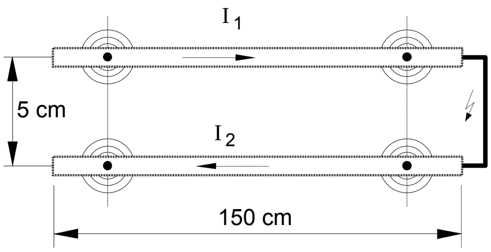
a) In welcher Richtung wird der Leiter abgelenkt? Begründen Sie Ihre Antwort anhand einer Feldlinienskizze!

b) Wie groß ist die **magnetische Feldstärke B** (Flußdichte) des Hufeisenmagneten? [1,4 T]

c) Auf welchen Wert steigt die Ablenkkraft, wenn der Strom auf **25 A** erhöht wird? [1,75 N]

---

2. Aufgrund eines Kurzschlusses fließen durch die rechts abgebildeten Sammelschienen einer Trafo-Station kurzzeitig die Ströme $I_1 = I_2 =$ **4 400 A**. Der Abstand der Sammelschienen beträgt **5 cm**, ihre gemeinsame parallele Länge **1,5 m**.



a) Welche magnetische Feldstärke $\mathbf{B_1}$ (Flußdichte) entsteht im Augenblick des Kurzschlusses entlang der Mittellinie der Sammelschiene mit dem Strom I_2 ? [17,6 mT]

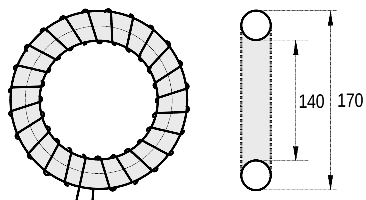
b) Berechnen Sie die auf die untere Sammelschiene wirkende magnetische Kraft $\mathbf{F_1}$. [116,2 N]

c) Wie groß ist die auf die obere Sammelschiene ausgeübte Kraft $\mathbf{F_2}$? [116,2 N]

d) In welche Richtungen wirken die Kräfte $\mathbf{F_1}$ und $\mathbf{F_2}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

---

3. Im Inneren der rechts abgebildeten Ringspule mit **1500** Windungen soll eine magnetische Erregung **H** von **8000 A/m** erzeugt werden.



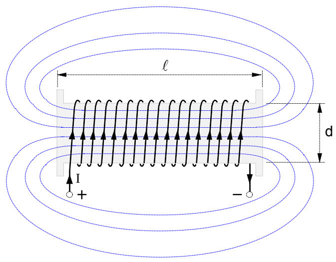
Seitenansicht im Schnitt

a) Auf welchen Wert muß die Erregerstromstärke I eingestellt werden? [2,6 A]

b) Wie groß ist wird dann der magnetische Fluß Φ im Inneren der Spule? [1,78 µWb]

---

4. Im Inneren der nebenstehenden Zylinderspule mit der Länge ℓ **= 20 cm** und dem Durchmesser **d = 3 cm** soll mit einer Erregerstromstärke von 2,5 A ein magnetischer Fluß von F **= 0,03 mWb** erzielt werden.

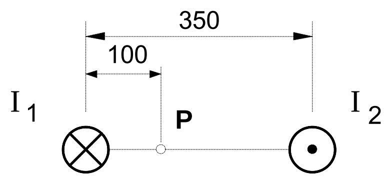


a) Berechnen Sie die erforderliche **Windungszahl** der Spule! [2701]

b) Kennzeichnen Sie in der Abbildung den Richtungssinn des Magnetfeldes, und bestimmen Sie die magnetische Polarität der Spule!

---

5. Zwei im Abstand von **35 cm** parallel verlaufende Leiter führen gemäß der nebenstehenden Abbildung die entgegengesetzt gerichteten Ströme $I_1 = I_2 = 25$ A.



Berechnen Sie die **magnetische Feldstärke B** im Feldpunkt **P**!
[70 µT]

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name:	ET2-14-F.DOC - 26.02.03
Arbeitsblatt Nr. **14** : Die **magnetische Feldlinie** als **Umlaufweg** eines **Magnetpols**		

1. **Versuche** zur **Kreisbewegung** eines **Nordpols** im **Magnetfeld** eines **geraden Stromleiters**

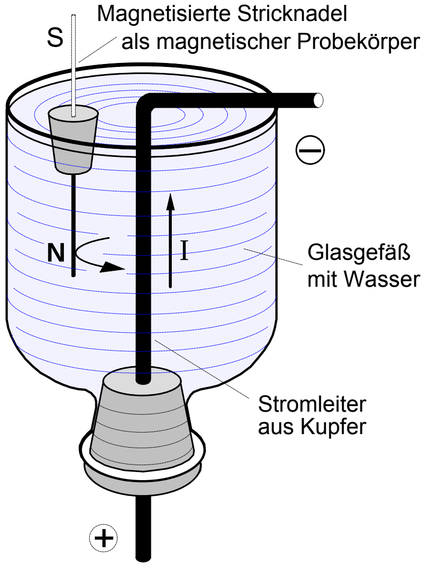


Bild **1** Bewegung eines magnetischen Nordpols im Magnetfeld eines geraden Stromleiters

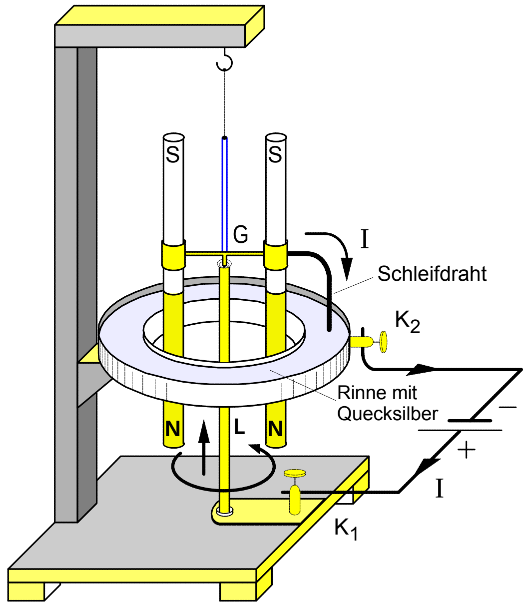


Bild **2** Apparat zum Nachweis der Rotation von Magnetpolen um einen geraden Stromleiter

Mit den oben dargestellten Versuchen ließe sich zeigen, daß sich der Nordpol eines stabförmigen magnetischen Probekörpers entlang einer magnetischen Feldlinie kreisförmig um einen senkrechten Leiter bewegen würde, sobald durch den Leiter ein starker Strom fließt. Durch die rechtwinklige Abknickung des Stromleiters in Bild **1** wird erreicht, daß sich *nur der Nordpol* der magnetisierten Stricknadel in dem Magnetfeld des *vertikalen* Stromleiters befindet. Da die Nadel bei ihrer Kreisbewegung an den horizontal abgeknickten Teil des Leiters stößt, ist eine fortlaufende Rotation um den Leiter in diesem Fall nicht möglich. Dies gelingt jedoch mit dem in Bild **2** skizzierten Apparat. Der dem vertikalen Leiter L über die Klemme K_1 zugeführte Strom **I** fließt über ein am oberen Leiterende befindliches Quecksilbernäpfchen in das Gestänge G, den Schleifdraht, durch das Quecksilber in der Rinne und über die Klemme K_2 zurück zur Batterie. Sobald ein Strom fließt, rotieren die beiden Nordpole in dem kreisförmigen Feld um den vertikalen Stromleiter. Dabei dreht sich der in das Quecksilber eingetauchte Schleifdraht mit und gewährleistet somit in jeder Position die Stromzuführung zu dem Leiter.

2. Die magnetische **Feldlinie** als **Umlaufweg s** des Nordpols eines magnetischen Probekörpers

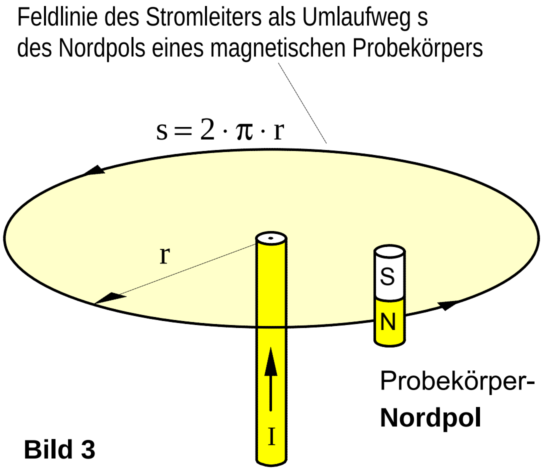


Bild 3

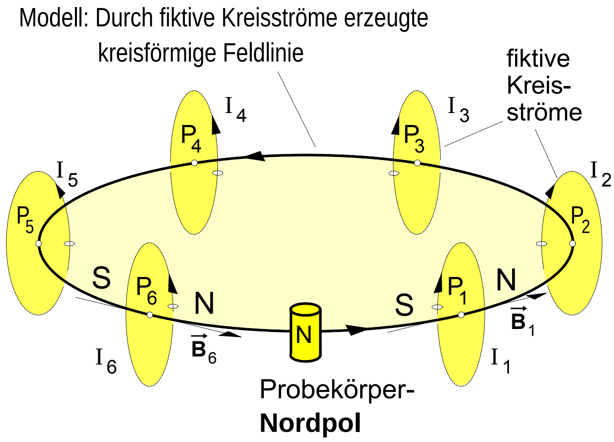


Bild 4

Modellhaft kann man sich das Magnetfeld $\vec{B}$ entlang der kreisförmigen Feldlinie auch erzeugt denken durch eine unendlich große Anzahl von Kreisströmen, die jeden Punkt der Feldlinie umkreisen (siehe Bild **4**). Vergleichbar wäre diese Vorstellung mit dem Modell einer aus unendlich vielen Windungen bestehenden Ringspule. Jeder dieser "fiktiven" Kreisströme würde mit seinen Magnetpolen den Probe-Nordpol jeweils anziehen bzw. abstoßen. So würde z.B. der in der Ausschnittvergrößerung (Bild **5**) dargestellte Kreisstrom $\mathbf{I}_1$ im Punkt P_1 das Magnetfeld $\vec{B}_1$ erzeugen und mit seinem Südpol den Probe-Nordpol anziehen, sofern er sich in der angegebenen Position befände.

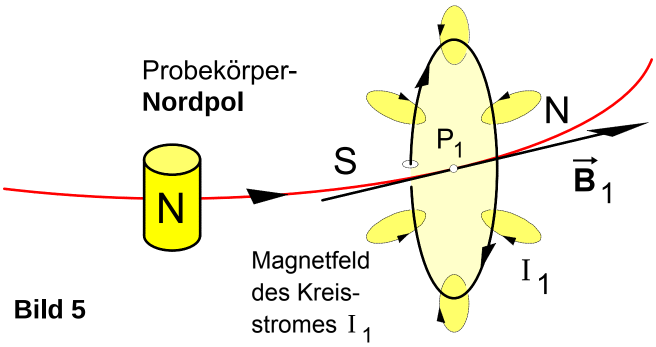
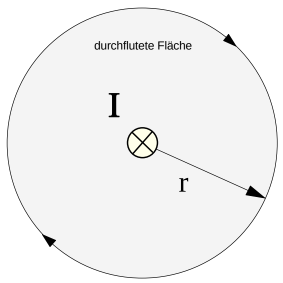


Bild 5

1. Sonderfall: **Gerader Leiter** mit **kreisförmigem Umlaufweg s**

a) Wiederholung: **Magnetfeld eines geraden Stromleiters**



$$\boxed{H = \frac{I}{2\pi r}}$$ mit $\mathbf{2\pi r = s}$ $\Rightarrow$ $H = \frac{\mathbf{I}}{s}$ $\Rightarrow$ $\boxed{H \cdot s = I}$

bzw. mit $H = \frac{B}{\mu_0}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{B \cdot s = \mu_0 \cdot I}$

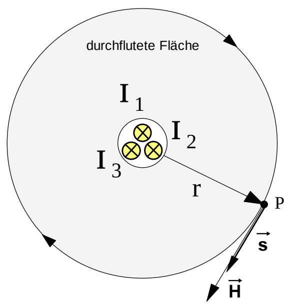
In diesem **Sonderfall** ist der Umlaufweg kreisförmig und es gilt: $\mathbf{s = 2 \cdot \pi \cdot r}$.

Allgemeinere Deutung der »Feldlinienlänge« **s** :

Die Länge **s** ist die Länge des »Umlaufweges«, der jene Fläche umrandet, die von dem feldverursachenden Strom I »**durchflutet**« wird.

- **Fazit:** Das Produkt »**H · s**« ist demnach gleich dem feldverursachenden Strom I, der die von dem Umlauf- weg **s** und damit auch die von dem Magnetfeld »**H · s**« umrandete Fläche »**durchflutet**«.

b) Die **Ströme mehrerer gerader Stromleiter** durchfluten die von dem Umlaufweg **s** umrandete Fläche



In diesem Sonderfall nimmt der **Durchflutungssatz** folgende Form an:

$$\boxed{H \cdot s = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n = \sum_{k=1}^{n} I_k}$$

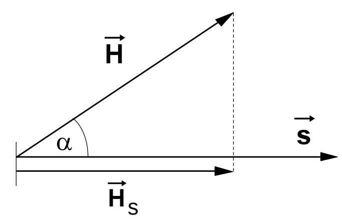
$\vec{\mathbf{H}}$ ... **Vektor** der magnetischen **Erregung** im Punkt **P**

$\vec{\mathbf{s}}$ ... **Vektor** des **Umlaufweges** im Punkt **P**

c) Vektorform des Durchflutungssatzes

Wird der Umlaufweg so gewählt, daß die Richtung des Feldvektors $\vec{\mathbf{H}}$ (bzw. $\vec{\mathbf{B}}$) nicht mit der Richtung des Wegvektors $\vec{\mathbf{s}}$ übereinstimmt, so ist der Anteil von $\vec{\mathbf{H}}$ zu berücksichtigen, der in Richtung von $\vec{\mathbf{s}}$ verläuft.

In diesem Fall gilt das **Skalarprodukt:** $$\boxed{\vec{H} \cdot \vec{s} = \sum_{k=1}^{n} I_k}$$

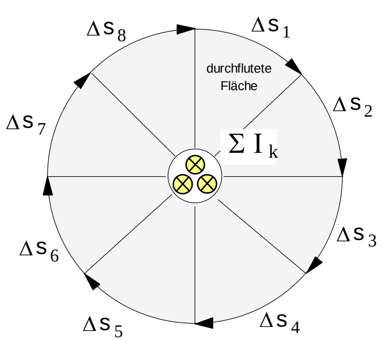


Für die **Beträge** gilt dann:

$$H_s \cdot s = \sum_{k=1}^{n} I_k \quad \text{mit} \quad H_s \cdot \cos\alpha\,, \quad \text{wobei} \quad \alpha = \angle(\vec{\mathbf{H}}, \vec{\mathbf{s}})$$

$$\boxed{H \cdot s \cdot \cos(\vec{H}, \vec{s}) = \sum_{k=1}^{n} I_k}$$

d) Zwischenbetrachtung: **Einteilung des Umlaufweges s in beliebig viele Wegabschnitte Δ s**



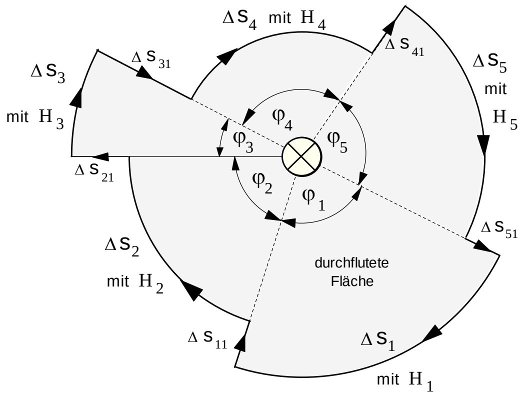
In diesem Fall läßt sich der **Durchflutungssatz** in folgender Form schreiben:

$$H \cdot s = H \cdot (\Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_m) = \sum_{k=1}^{n} I_k \qquad \text{oder :}$$

$$\boxed{H \cdot \Delta s_1 + H \cdot \Delta s_2 + \ldots + H \cdot \Delta s_m = \sum_{i=1}^{m} H \cdot \Delta s_i = \sum_{k=1}^{n} I_k}$$

wobei mit m die Anzahl der Wegabschnitte und mit n die Anzahl der Ströme angegeben wird.

2. Aus verschiedenen Kreisbögen zusammengesetzter Umlaufweg s um einen geraden Stromleiter mit dem Strom I



- Da auf den **radialen** Wegabschnitten (Δs_{11} ,Δs_{21} usw.) die Beträge der Skalarprodukte $H_i \cdot \Delta s_i \cdot \cos \alpha_i$ wegen des dort jeweils gegebenen **90°**-Winkels zwischen $\vec{H}_i$ und $\Delta \vec{s}_i$ gleich **Null** sind, gilt für die Summe aller Produkte $H_i \cdot \Delta s_i$ entlang des aus verschiedenen Kreisbögen zusammengesetzten geschlossenen Umlaufweges um einen geraden Stromleiter:

$$\sum_{i=1}^{m} H_i \cdot \Delta s_i = H_1 \cdot \Delta s_1 + H_2 \cdot \Delta s_2 + \ldots + H_n$$

- Mit $\boxed{H_i = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_i} \quad \text{und} \quad \Delta s_i = r_i \cdot \widehat{\varphi}_i}$ für jeden Kreisbogenabschnitt kann dann geschrieben werden:

$$\sum_{i=1}^{m} H_i \cdot \Delta s_i = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \cdot r_1 \cdot \widehat{\varphi}_1 + \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_2} \cdot r_2 \cdot \widehat{\varphi}_2 + \ldots + \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_m} \cdot r_m \cdot \widehat{\varphi}_m$$

$$= \frac{I}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\widehat{\varphi}_1 + \widehat{\varphi}_2 + \ldots \widehat{\varphi}_m\right) \qquad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{m} \widehat{\varphi}_i = 2 \cdot \pi \quad ,$$

denn die Summe der Winkelelemente über einen vollen Umlauf ergibt einen Bogenmaß-Vollwinkel von **2·π .**

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} H_i \cdot \Delta s_i = \frac{I}{2 \cdot \pi} \cdot 2\,\pi = I}$$

- **Fazit :** Damit konnte auch für diesen relativ beliebig gewählten Umlaufweg gezeigt werden, dass die Summe aller Produkte $H_i \cdot \Delta s_i$ entlang eines geschlossenen Umlaufweges **gleich** dem feldverursachenden **Strom** I ist, der von diesem Umlaufweg eingeschlossen wird und insofern zugleich auch die von dem Umlaufweg umrandete Fläche »durchflutet«. Daher heißt dieser Satz auch »Durchflutungssatz«. Sofern mehrere Ströme $I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n$ die von dem geschlossenen, aus verschiedenen Kreisbögenabschnitten zusammengesetzten Umlaufweg umrandete Fläche »durchfluten«, so können wir den **Durchflutungssatz** in folgender Form schreiben:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} H_i \cdot \Delta s_i = \sum_{k=1}^{n} I_k}$$, wobei $\sum_{k=1}^{n} I_k = \Theta$ (Θ –>"Durchflutung")

- Wenn die Ströme gleich sind, d. h. wenn $I_1 = I_2 = I_3 = \ldots = I_n$ ist , so gilt für den Durchflutungssatz:

$$H_1 \cdot \Delta s_1 + H_2 \cdot \Delta s_2 + \ldots + H_m \cdot \Delta s_m = n \cdot I = \Theta$$

- Unter Berücksichtigung der Beziehung $B_i = \mu_o \cdot H_i$ erhält der Durchflutungssatz die Form :

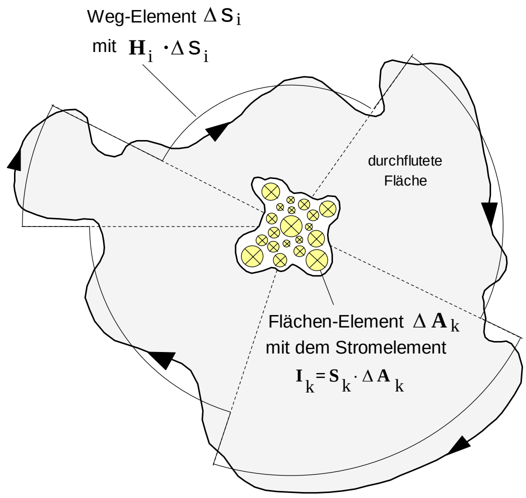
$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} B_i \cdot \Delta s_i = \mu_o \cdot \sum_{k=1}^{n} I_k}$$, wobei $\sum_{k=1}^{n} I_k = \Theta$ (Θ –>"Durchflutung")

3. Übergang zur allgemeinen Form des Durchflutungssatzes: **Beliebiger Umlaufweg um einen Stromleiter mit beliebiger Querschnittsfläche und beliebiger Stromverteilung**

- Ersetzt man in erster Näherung
  - den beliebigen Umlaufweg durch Kreisbogenabschnitte, auf denen jeweils die Magnetfeld-Elemente $\mathbf{H}_i \cdot \Delta\mathbf{s}_i$ wirksam sind (siehe dazu auch Seite 2) ,

    und
  - die beliebige Leiterquerschnittsfläche durch Flächenelemente $\Delta\mathbf{A}_k$, in denen bei jeweils konstanter Stromdichte $\mathbf{S}_k$ die Stromelemente $I_k = \mathbf{S}_k \cdot \Delta\mathbf{A}_k$ fließen,

  so läßt sich der Durchflutungssatz für diesen allgemeinen Fall zunächst **näherungsweise** wie folgt angeben :



$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} H_i \cdot \Delta s_i \approx \sum_{k=1}^{n} I_k \approx \sum_{k=1}^{n} S_k \cdot \Delta A_k}$$

- Grenzwertbetrachtung

  Wählt man
  - die Weg-Elemente $\Delta\mathbf{s}$ hinreichend klein bzw. deren Anzahl **m** hinreichend groß

    und
  - die Flächen-Elemente $\Delta\mathbf{A}$ ebenfalls hinreichend klein bzw. deren Anzahl **n** hinreichend groß, so ergibt sich

▷für $\Delta\mathbf{s} \to 0$ bzw. für $\mathbf{m} \to \infty$ der Grenzwert :
$$\lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ m \to \infty}} \sum_{i=1}^{m} H_i \cdot \Delta s_i = \oint H \cdot ds$$

und

▷für $\Delta\mathbf{A} \to 0$ bzw. für $\mathbf{n} \to \infty$ der Grenzwert :
$$\lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} S_k \cdot \Delta A_k = \int_A S \cdot dA$$

und damit für die **Integralform des Durchflutungssatzes** :

$$\boxed{\oint H \cdot ds = \int_A S \cdot dA} \quad , \quad \text{wobei} \quad \int_A S \cdot dA = \Theta \quad (\Rightarrow \text{Durchflutung } \Theta)$$

- Unter Berücksichtigung der Vektorformen der Feldgrößen $\vec{\mathbf{H}}$ und $\vec{\mathbf{S}}$ sowie der Größen $\vec{\mathbf{s}}$ und $\vec{\mathbf{A}}$ und unter Einbeziehung des Zusammenhangs $\vec{\mathbf{B}} = \mu_o \cdot \vec{\mathbf{H}}$ erhält der **Durchflutungssatz** seine **allgemeine Form** :

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o \cdot \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}} \quad , \quad \text{wobei} \quad \int_A S \cdot dA = \Theta \quad (\Rightarrow \text{Durchflutung } \Theta)$$

Der Durchflutungssatz besagt, dass in einem beliebigen von Strömen durchflossenem Feld das Wegintegral der magnetischen Feldstärke längs eines beliebig wählbaren, geschlossenen Umlaufweges gleich der Summe aller Ströme ist, die die von dem Umlaufweg umrandete Fläche durchfluten.

1. Anwendungsbeispiel zum Durchflutungssatz

Bei einer Leiteranordnung mit zwei koaxial angeordneten langen Hohlleitern ist der *Innenleiter* mit der Leiterquerschnittsfläche $\mathbf{A_i}$ der *Hinleiter*, der Außenleiter mit der Leiterquerschnittsfläche $\mathbf{A_a}$ der Rückleiter für den elektrischen Strom. Der Strom I fließt in dem Innenleiter in die Zeichenebene hinein, im Außenleiter als Strom $I' = -I$ aus der Zeichenebene heraus. Die Stromdichten $\mathbf{S_i}$ im Innenleiter und $\mathbf{S_a}$ im Außenleiter wollen wir jeweils als konstant annehmen.

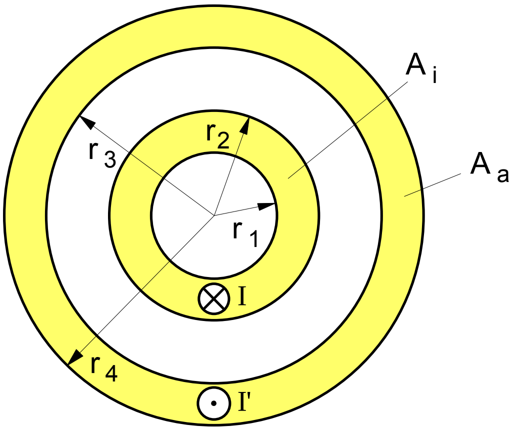


Bild 1: Koaxial angeordnete Hohlleiter

Untersucht werden soll die magnetische Erregung **H** in Abhängigkeit vom Abstand **r** vom Mittelpunkt der Anordnung.

- Querschnittsfläche des Innenleiters: $A_i = r_2^2 \cdot \pi - r_1^2 \cdot \pi$
- Stromdichte im Innenleiter: $S_i = \dfrac{I}{A_i} = \dfrac{I}{r_2^2 \cdot \pi - r_1^2 \cdot \pi}$
- Querschnittsfläche des Außenleiters: $A_a = r_4^2 \cdot \pi - r_3^2 \cdot \pi$
- Stromdichte im Außenleiter: $S_a = \dfrac{I'}{A_a} = \dfrac{-I}{r_4^2 \cdot \pi - r_3^2 \cdot \pi}$

Wir können bei dieser Anordnung von der folgenden Form des Durchflutungssatzes ausgehen:

$$\boxed{\sum H_i \cdot \Delta s_i = \Theta}$$

Für die Durchflutung gilt:

$$\boxed{\Theta = \sum I_k = \sum S_k \cdot A_k}$$

Bei der Anwendung des Durchflutungssatzes auf diese zylindersymmetrische Anordnung unterscheiden wir die im folgenden näher erläuterten fünf Bereiche. Als geschlossene Umlaufwege wählen wir jeweils der Einfachheit halber konzentrische (Feldlinien-)Kreise mit jeweils der Länge $s = 2 \cdot \pi \cdot r$. Da entlang dieser Feldlinienkreise der Betrag der magnetischen Erregung **H** konstant ist, gilt in allen Bereichen unserer Koaxialanordnung für die linke Seite des Durchflutungssatzes:

$$\boxed{\sum H_i \cdot \Delta s_i = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}$$

1. Hohlraumbereich im Innenleiter : $\boxed{0 \le r \le r_1}$

- ▶ Da in diesem Bereich die von den kreisförmigen Umlaufwegen $s = 2 \cdot \pi \cdot r$ umrandeten Flächen von keinem Strom "durchflutet" wird, gilt für die Durchflutung $\Theta = \sum S_k \cdot A_k = 0$.
- ▶ Damit ist auch die **magnetische Erregung** hier in jedem Raumpunkt **H = 0** .

2. Raumbereich innerhalb des Innenleiters: $\boxed{r_1 \le r \le r_2}$

- ▶ Wirksame Stromdichte: $\mathbf{S_2 = S_i}$
- ▶ Wirksamer Leiterquerschnittsanteil: $A_2 = r^2 \cdot \pi - r_1^2 \cdot \pi$
- ▶ Durchflutung:

$$\Theta = \sum S_k \cdot A_k = S_2 \cdot A_2$$

$$\Theta = \frac{I}{r_2^2 \cdot \pi - r_1^2 \cdot \pi} \cdot \left(r^2 \cdot \pi - r_1^2 \cdot \pi\right)$$

$$\Theta = I \cdot \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{mit} \quad \Theta = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

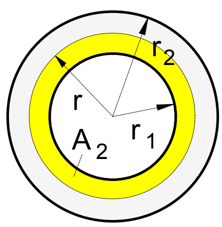


Bild 2: Bereich innerhalb des Innenleiters

▶ **magnetische Erregung:** $\boxed{H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}}$

3. Raumbereich zwischen den Hohlleitern: $\boxed{r_2 \le r \le r_3}$

▶ Wirksame Stromdichte: **$S_3 = S_i$**

▶ Wirksamer Leiterquerschnittsanteil: $A_3 = A_i = r_2^2 \cdot \pi - r_1^2 \cdot \pi$

▶ Durchflutung:

$$\Theta = \sum S_k \cdot A_k = S_3 \cdot A_3 = S_i \cdot A_i$$

$$\Theta = \frac{I}{A_i} \cdot A_i = I \quad \text{mit} \quad \Theta = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

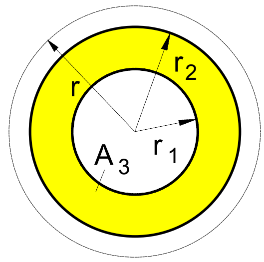


Bild 3: Bereich zwischen den Hohlleitern

▶ **magnetische Erregung**: $\boxed{H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}}$

4. Raumbereich innerhalb des Außenleiters: $\boxed{r_3 \le r \le r_4}$

▶ Wirksame Stromdichte im **Innenleiter**: **S_i**

▶ Wirksamer Leiterquerschnittsanteil im **Innenleiter**: **A_i**

▶ Wirksame Stromdichte im **Außenleiter**: **$S_4 = S_a$**

▶ Wirksamer Leiterquerschnittsanteil im **Außenleiter**:
$A_4 = r^2 \cdot \pi - r_3^2 \cdot \pi$

▶ Durchflutung:

$$\Theta = \sum S_k \cdot A_k = S_i \cdot A_i + S_4 \cdot A_4$$

$$\Theta = I + \frac{-I}{r_4^2 \cdot \pi - r_3^2 \cdot \pi} \cdot \left(r^2 \cdot \pi - r_3^2 \cdot \pi\right)$$

$$\Theta = I \cdot \left[1 - \frac{r^2 - r_3^2}{r_4^2 - r_3^2}\right] = I \cdot \frac{\left(r_4^2 - r_3^2\right) - \left(r^2 - r_3^2\right)}{r_4^2 - r_3^2}$$

$$\Theta = I \cdot \frac{r_4^2 - r^2}{r_4^2 - r_3^2} \quad \text{mit} \quad \Theta = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

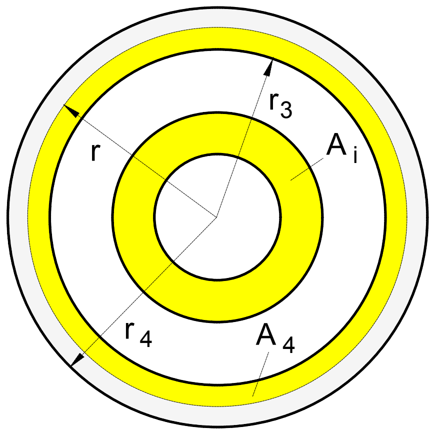


Bild 4: Bereich innerhalb des Außenleiters

▶ **magnetische Erregung**: $\boxed{H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \frac{r_4^2 - r^2}{r_4^2 - r_3^2}}$

5. Raumbereich außerhalb der Anordnung : $\boxed{r_4 \le r \le \infty}$

▶ Durchflutung: $\Theta = \sum S_k \cdot A_k = S_i \cdot A_i + S_a \cdot A_a = I - I = 0$

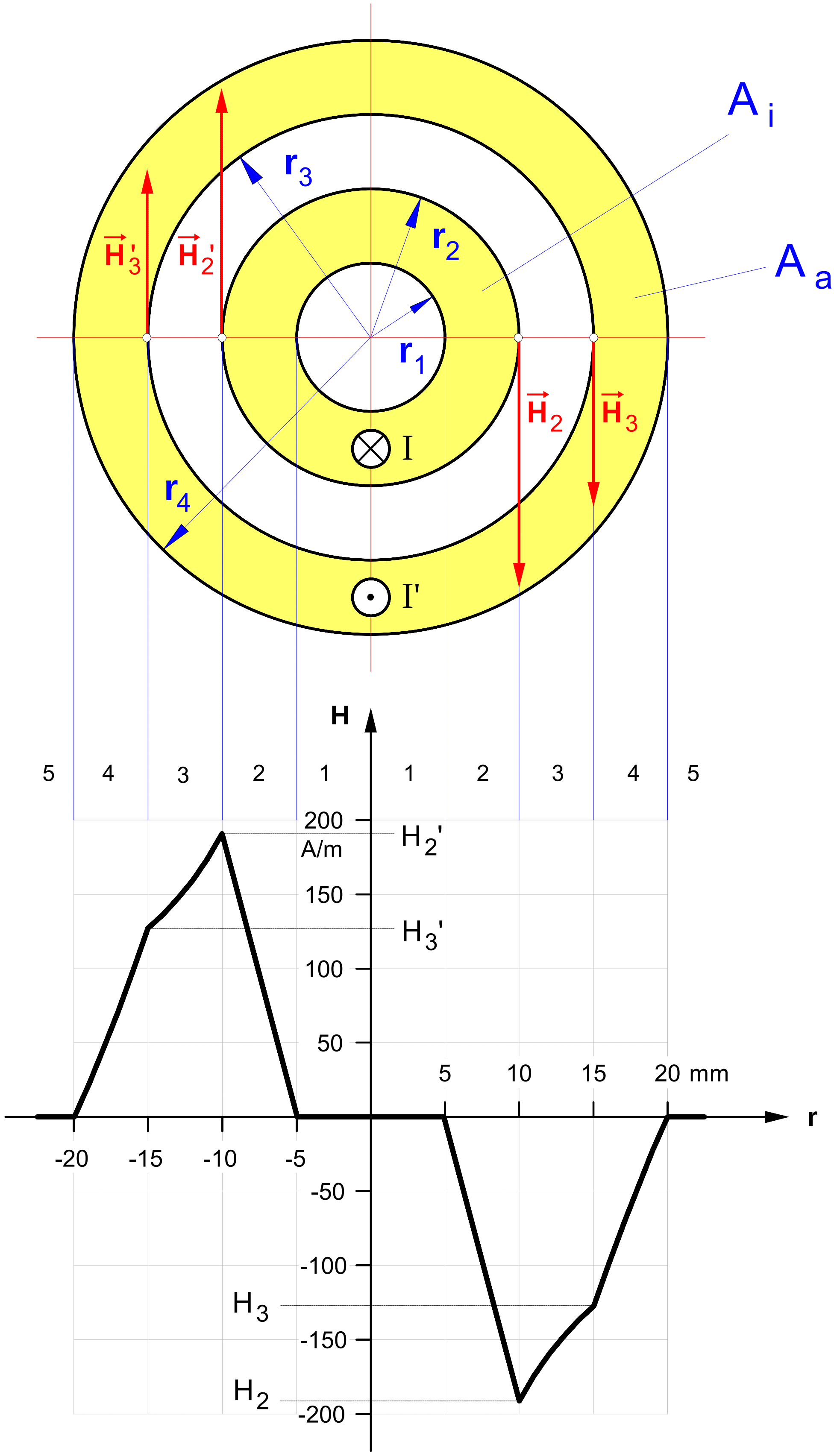
▶ Damit ist auch die magnetische Erregung hier **H = 0** .

Aufgabe:

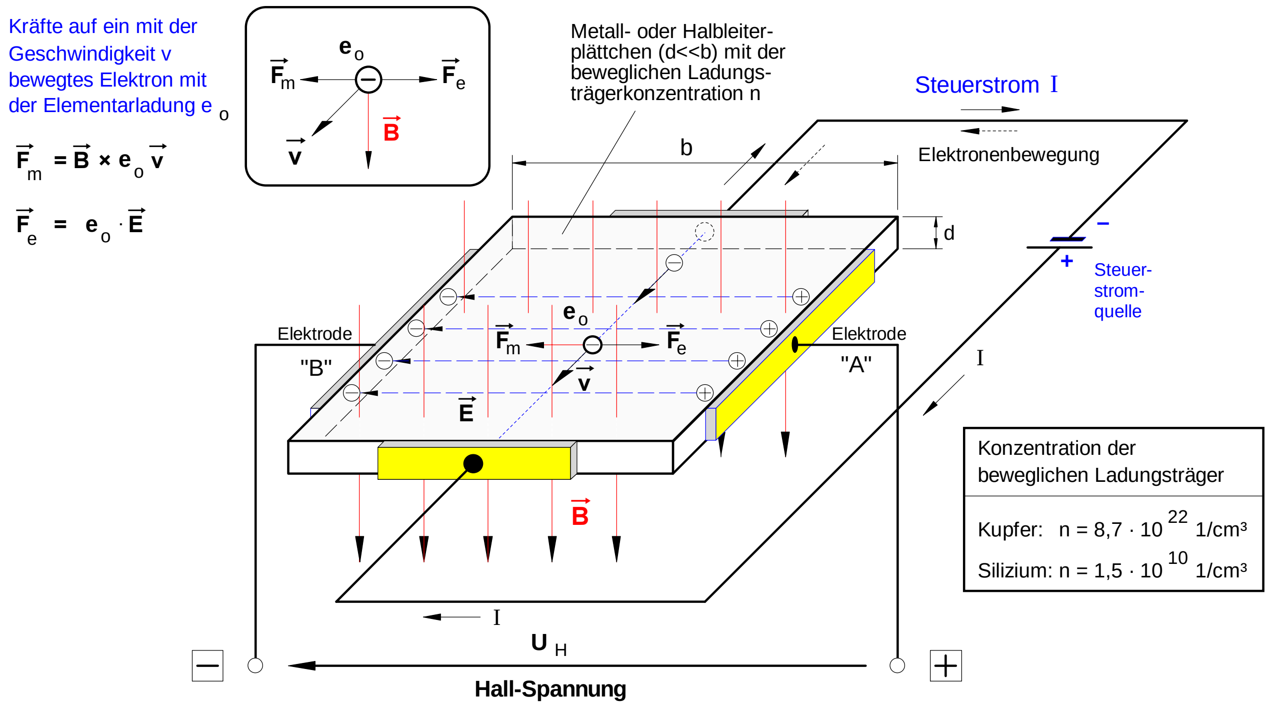
Stellen Sie den Verlauf der magnetischen Erregung H in Abhängigkeit vom Abstand r vom Mittelpunkt graphisch in einem maßstäblichen H-r-Diagramm dar. Gehen Sie dabei von folgenden Daten der koaxialen Hohlleiteranordnung aus:

I = **12** A
r_1 = **5** mm r_2 = **10** mm
r_3 = **15** mm r_4 = **20** mm

- **Verlauf des Betrages der magnetischen Erregung H in Abhängigkeit vom Abstand r vom Mittelpunkt der koaxial angeordneten Hohlleiter** (Leitermaße gemäß Beispiel von S.5)



• **HALL-Effekt:** Läßt man durch ein **dünnes Metall- oder Halbleiterplättchen** (z.B. eine Kupfer- oder Silizium-Folie mit der Breite **b**, der Dicke **d** und der Ladungsträgerkonzentration **n**), das senkrecht von einem **magnetischen Feld** mit der Feldstärke $\vec{B}$ durchsetzt wird, einen **Steuerstrom** I fließen, dann kann man zwischen den Elektroden "**A**" und "**B**" quer zur Stromrichtung eine Spannung – die sogenannte **Hall-Spannung** U_H – messen.



• **Erklärung des HALL-Effekts**: Die mit dem Steuerstrom I durch das Leiterplättchen mit der Driftgeschwindigkeit $\vec{v}$ strömenden freien Elektronen mit der Elementarladung $Q = e_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As werden unter dem Einfluß des magnetischen Feldes mit der Feldstärke $\vec{B}$ von einer magnetischen Kraft $\vec{F}$ (*Lorentz*-Kraft) in Richtung der Elektrode "**B**" abgelenkt. Dadurch wird der linke Rand des Plättchens **negativ** geladen (Elektronenüberschuß), während an dem rechten Rand eine **positive** Ladung zurückbleibt (Elektronenmangel). Durch diese Ladungstrennung wird zwischen den Elektroden "**A**" und "**B**" zugleich auch ein **elektrisches** Feld mit der Feldstärke $\vec{E}$ aufgebaut, das entlang der Feldlinienlänge s = b (Plättchenbreite) eine Spannung (Potentialdifferenz) $U_H = E \cdot b$ hervorruft. Diese **HALL**-Spannung erreicht ihren stationären Endwert U_H, wenn die durch das elektrische Feld $\vec{E}$ bewirkte elektrische Kraft $\vec{F}_e$ auf die freien Elektronen mit der Ladung e_0 dem Betrage nach genauso groß geworden ist wie die durch das magnetische Feld $\vec{B}$ hervorgerufene magnetische Ablenkkraft $\vec{F}_m$ (Gleichgewicht), denn in diesem Fall werden in Richtung Elektrode "**B**" keine weiteren Elektronen mehr verschoben.

▶ Für die **magnetische Kraft** F_m auf die bewegte Ladung e_0 eines freien Elektrons gilt: $F_m = e_0 \cdot v \cdot B$

▶ Für die **elektrische Kraft** F_e auf die Ladung e_0 eines freien Elektrons gilt: $F_e = e_0 \cdot E$

▶ Befinden sich die Kräfte $\vec{F}_m$ und $\vec{F}_e$ im **Gleichgewicht**, dann läßt sich folgende Gleichung aufstellen (und anschließend die Elementarladung e_0 herauskürzen):

$$F_m = F_e$$
$$e_0 \cdot v \cdot B = e_0 \cdot E$$

▶ Aus der Formel $E = U_H/s$ ergibt sich mit der elektrischen Feldlinienlänge **s** = **b** für die **HALL-Spannung** U_H die Beziehung:

$$v \cdot B = \frac{U_H}{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{U_H = b \cdot v \cdot B} \qquad \text{Gl. (1)}$$

▶ Für die **Stromdichte S** in dem Plättchen gilt die Formel:

$$S = \frac{I}{A} \quad \text{mit } S = n \cdot v \cdot e_0 \text{ und } A = b \cdot d$$

▶ Setzen wir die Gleichung (**2**) in Gleichung (**1**) ein, so ist der Betrag der **Hall-Spannung** (in V) wie folgt bestimmt:

$$n \cdot v \cdot e_0 = \frac{I}{b \cdot d} \quad \Rightarrow \quad \underline{b \cdot v = \frac{I}{n \cdot e_0 \cdot d}} \qquad \text{Gl. (2)}$$

$$\boxed{U_H = \frac{I}{n \cdot e_0 \cdot d} \cdot B}$$

I ... Stromstärke in A
n ... Ladungsträgerkonzentration pro m³
e ... Elementarladung in As
d ... Plättchendicke in m
B ... magnet. Feldstärke in T

Zur Stromdichte, Ladungsträgerkonzentration und Driftgeschwindigkeit vgl. auch Lehrgang Elektrotechnik 1, Arbeitsblatt Nr. 14 a).

• Meßtechnische Anwendungen des Hall-Effekts

$$\boxed{U_H = \frac{I_{St}}{n \cdot e_0 \cdot d} \cdot B}$$

Da die Hall-Spannung $\mathbf{U_H}$ dann relativ groß wird, wenn die Ladungsträgerkonzentration **n** niedrig und die Ladungsträgergeschwindigkeit **v** hoch ist, verwendet man zur Herstellung von Hall-Generatoren Halbleiterwerkstoffe, denn diese besitzen bei einer im Vergleich zu den Metallen niedrigen Ladungsträgerkonzentration eine relativ hohe Ladungsträgerbeweglichkeit. Technisch brauchbare Hall-Generatoren erhält man durch Aufdampfen sehr dünner (bis zu 5 µm), schwach dotierter Halbleiterschichten auf ein Trägermaterial. Bei Indium-Antimonid (InSb) erreicht man z.B. bei I_{St} = 0,3 A und B = 1 T im Leerlauf eine Hall-Spannung von $\mathbf{U_H}$ = 0,3 V. Technische Hall-Generatoren werden in der Regel als Sonden mit einer sehr kleinen Fläche des Halbleiterplättchens ausgeführt (bis zu 1 mm²).

1. Messung der magnetischen Feldstärke B

Da bei einer gegebenen Hall-Sonde **n** und **d** sowie $\mathbf{e_0}$ konstant sind, ist die Hall-Spannung $\mathbf{U_H}$ bei konstant gehaltenem Steuerstrom I_{St} proportional der Feldstärke **B** des Magnefeldes, das die Sonde senkrecht durchsetzt. M.a.W.: Die mit einem Spannungsmesser meßbare Hallspannung $\mathbf{U_H}$ ist ein Maß für die magnetische Feldstärke **B**. Wählt man die Fläche des Hall-Plättchens sehr klein (z.B. 1 mm²), so läßt sich die Feldstärke etwa in der Umgebung eines stromdurchflossenen Leiters oder in einer Spule nahezu punktweise ermitteln (siehe **Bild 1**).

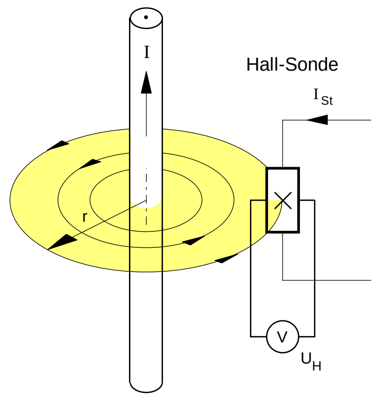


Bild 1: Hall-Sonde im Magnetfeld eines geraden Stromleiters

2. Potentialfreie Strommessung

Da bei konstantem Steuerstrom die Hall-Spannung $\mathbf{U_H}$ proportional der Feldstärke **B** ist und die Feldstärke außerhalb eines geraden Stromleiters ihrerseits dem Strom I in dem Leiter proportional ist, ist die Hall-Spannung zugleich auch ein Maß für die Stromstärke I in dem Leiter. So lassen sich mit der in **Bild 1** dargestellten Anordnung auch beispielsweise relativ hohe Gleichströme mit Hilfe einer fest im Abstand r in der Umgebung eines Stromleiters installierten Hall-Sonde potentialfrei messen.

3. Bestimmung der Konzentration und Beweglichkeit von Ladungsträgern in Werkstoffen

Von den in der obigen Formel für die Hall-Spannung stehenden Größen können die Dicke des Plättchens **d**, der Steuerstrom I_{St} , die magnetische Feldstärke **B** und die Hall-Spannung $\mathbf{U_H}$ relativ problemlos gemessen werden. Aus diesen Werten läßt sich dann die Konzentration **n** der beweglichen Ladungsträger eines Stoffes wie folgt berechnen:

$$\boxed{n = \frac{I_{St} \cdot B}{U_H \cdot e_o \cdot d}}$$

Der Hall-Effekt entsteht nun nicht nur bei der Bewegung von *Elektronen*, sondern auch bei der von *positiven* Ladungen, wobei sich die Richtung der Hall-Spannung umkehrt. So können über den Hall-Effekt das Vorzeichen und die Anzahl der Ladungsträger bestimmt werden.

Nach dem *Ohmschen Elementargesetz* gilt für die Stromdichte **S** = æ **·** **E** . Damit ergibt sich in Verbindung mit **S** = **n** **·** **v** **·** $\mathbf{e_O}$ folgende Beziehung:

$$S = æ \cdot E = n \cdot v \cdot e_o \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{E} = \frac{æ}{n \cdot e_o} \quad \text{mit} \quad \frac{v}{E} = \mu \quad (\Rightarrow \text{"Beweglichkeit"})$$

Das Verhältnis von Ladungsträgergeschwindigkeit **v** pro Feldstärke **E** bezeichnet man auch als Ladungsträger-**Beweglichkeit µ** . Hat man mit Hilfe des oben angegebenen Verfahrens die Ladungsträgerkonzentration **n** eines Werkstoffes bestimmt und dessen Leitfähigkeit æ ermittelt, so läßt sich daraus die **Ladungsträgerbeweglichkeit** gemäß folgender Formel berechnen:

$$\boxed{\mu = \frac{æ}{n \cdot e_o}}$$

• Beispiel:

Durch eine **2** cm breite Silberfolie (Dicke: **50** µm) fließt in Längsrichtung ein konstanter Steuerstrom von **20** A. Der Folienstreifen befindet sich in einem senkrecht zur Stromrichtung verlaufenden Magnetfeld mit der Feldstärke **0,9** T. Zwischen den Längsseiten der Folie wird eine Hallspannung von **30** µV gemessen. Berechnen Sie **a)** die Ladungsträgerkonzentration **n** im Silber und **b)** die Driftgeschwindigkeit **v** der freien Elektronen.

· Nachtrag zum Hall-Effekt

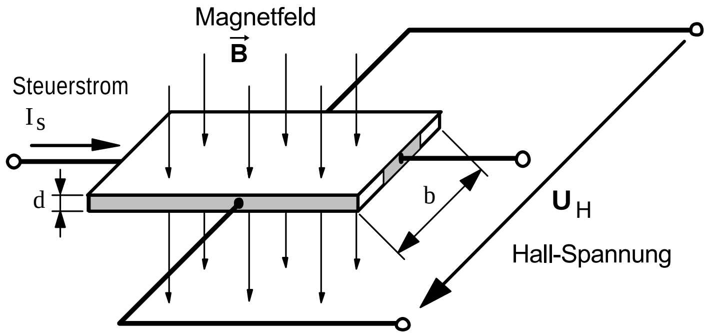
Gemäß der vorangegangenen Darstellung gilt für die Hall-Spannung die Formel:

$$\boxed{U_H = \frac{I_{St}}{n \cdot e_0 \cdot d} \cdot B}$$ Mit der **Hall-Konstanten** $$\boxed{\frac{1}{n \cdot e_0} = R_H}$$ gilt dann auch: $$\boxed{U_H = \frac{R_H}{d} \cdot I_{St} \cdot B}$$

Das Produkt $n \cdot e_0$ ist die elektrische Ladungsdichte ρ des Halbleitermaterials. Der Kehrwert dieser elektrischen Ladungsdichte wird auch als Hall-Konstante $\mathbf{R_H}$ bezeichnet. Damit lässt sich die Hall-Spannung auch mit der oben rechts angegebenen Formel berechnen.

· Übungsaufgaben zum Hall-Effekt

1. Ein metallischer Streifen aus Kupfer ($n = 10^{23}$ cm^{-3}) der Dicke d = 18 µm werde von einem Strom von I = 20 A durchflossen. Die Breite b des Kupfermaterials betrage b = 25 mm. Senkrecht zur Bewegungsrichtung der Ladungen des Stroms I_s im Leiter werde die Hallspannung abgenommen, die entsteht, wenn die Kupferplatte senkrecht dazu vom einem Magnetfeld B durchsetzt wird (Hall-Effekt).



a) Wie groß sind **Stromdichte** und die **Driftgeschwindigkeit** der Elektronen des Steuerstromes**?** [2,78 mm/s]

b) Wie groß ist die **magnetische Kraft auf ein Elektron**, wenn die Metallfläche senkrecht zur Bewegungsrichtung von einem magnetischen Feld der Stärke **0,1 T** durchsetzt wird ? [$4{,}45 \cdot 10^{-23}$ N]

c) Wie groß ist die **elektrische Feldstärke**, welche durch die Ladungstrennung des Hall-Effekts entsteht? [0,278 mV/m]

d) Wie groß ist das **Verhältnis $\mathbf{R_H/d}$** (R_H ist die Hall-Konstante) für diese Anordnung ? [$R_H = 62{,}5 \cdot 10^{-12}$ m^3/As; $R_H/d = 3{,}47 \cdot 10^{-6}$ $m^{2/As}$]

e) Wie groß ist die **Hall-Spannung**, wenn die Metallfläche senkrecht von einem magnetischen Feld der Stärke **0,1 T** durchsetzt wird ? [6,94 µV]

---

2. Ein Hallgenerator der Dicke 0,2 mm und mit der Hallkonstanten $R_H = 0{,}12 \cdot 10^{-6}\,m^3/As$ wird von einem Strom von I = 50 mA durchflossen; ein Magnetfeld der Stärke **B = 0,35 T** durchsetzt dabei das Hallplättchen. Wie groß ist die **Hall-Spannung**, welche dabei am Hall-Generator anliegt ? [10,5 µV]

---

3. Ein Hallgenerator mit der Hallkonstanten $R_H = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\,m^3/As$, der Plättchendicke d = 0,15 mm und einem Hallstrom von I = 0,1A wird in den Luftspalt eines Lautsprechers gehalten. Dabei wird eine Hallspannung von U_H = 0,5 mV gemessen. Wie groß ist die **magnetische Feldstärke B** im Luftspalt des Lautsprechers ? [1,5 T]

---

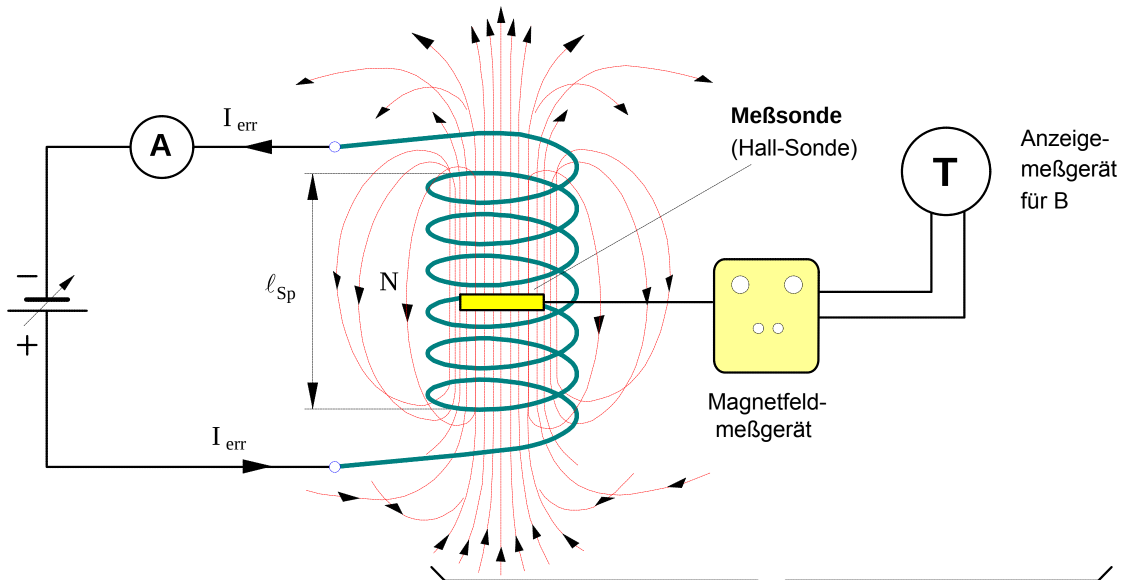
4. Ein IndiumArsen-Hall-Generator hat die Hallkonstante $\mathbf{R_H}$ = 100 cm^3/As. ? [0,67 T]

a) Wie groß ist das Verhältnis R_H/d für diesen Generator, wenn die Dicke des Hallplättchens 0,1 mm beträgt **?** [1 m^2/As]

b) Wie groß ist die Hallspannung bei einer magnetischen Feldstärke von **1 T**, wenn der Hallgenerator von einem Strom von 150 mA durchflossen wird? [150 mV]

1. **Luft** im **Magnetfeld** einer **langen Zylinderspule**

a) Versuchsaufbau zur Messung von **H** und **B** im Inneren der Spule (Prinzipskizze)



Messung der magnetischen **Erregung H** (Ursachengröße)

$$H = \frac{I_{err} \cdot N}{\ell_{Sp}}$$

Messung der magnetischen **Feldstärke B** (Wirkungsgröße)

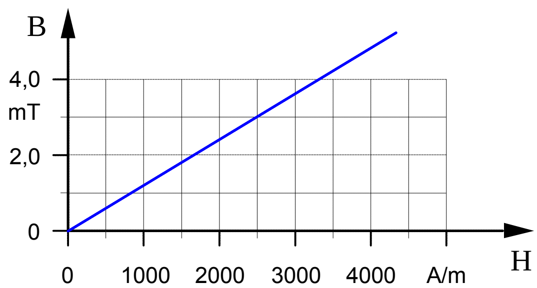
$$B = \frac{F}{I \cdot \ell}$$

Als **Ersatz für eine Stromwaage** zur Messung der magnetischen **Feldstärke B** verwenden wir ein **Magnetfeldmeßgerät** mit einer **Hall-Sonde**. [siehe dazu Arbeitsblatt Nr. **16)**]

b) Meßergebnisse und Bestimmung der magnetischen **Permeabilität** $\mu = \mu_o \cdot \mu_r$ aus den Meßwerten

Spulendaten: **N = 363,75** ℓ_{Sp} = **75** cm **d = 7,0** cm (große Phywe-Spule)

I_{err} in **A**	N/ℓ_{Sp} in **1/m**	**H** in **A/m**	**B** in **mT**	**μ = B/H** in **Tm/A**
3,0	**485**	**1455**	**1,83**	**1,26** · 10^{-6}
6,0	**485**	**2910**	**3,66**	**1,26** · 10^{-6}



c) Der Zusammenhang zwischen **H** und **B** in einer **Luftspule**

Befindet sich **Luft** im Magnetfeld einer Spule, so ist offenbar $\mu = \mu_o$ und damit $\mu_r = 1$. Demnach läßt sich die von der magnetischen *Erregung* **H** im Inneren einer sog. **Luftspule** hervorgerufene magnetische *Feldstärke* **B** (auch *Flußdichte* genannt) nach folgender Formel berechnen:

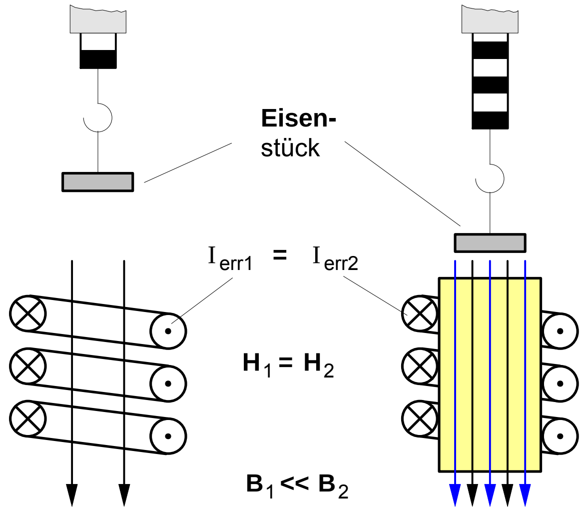
$$B = \mu_o \cdot H$$

H ... magnetische Erregung in A/m
μ_o ... magnetische Feld*konstante* in Tm/A
B ... magnetische Feldstärke (auch: Flußdichte) in T

wobei : μ_o = **4** · π · 10^{-7} Tm/A = **1,257** · 10^{-6} Tm/A

Wichtiger Hinweis: Die magnetische **Erregung H** wird in vielen technischen Lehrbüchern in unsachgemäßer Weise als magnetische "Feldstärke" bezeichnet.

2. **Eisen** im **Magnetfeld** einer Spule



a) **Beobachtungen** im **Versuch**

Obwohl in beiden Fällen die Erregerstromstärke I_{err} und damit auch die von der Spule verursachte magnetische **Erregung H** **konstant** gehalten wurde, war die magnetischen Kraftwirkung auf das Eisenstück bei der Spule mit Eisenkern deutlich **stärker** als bei der Luftspule.

Schlußfolgerung: Durch den **Eisenkern** wird die magnetische **Feldstärke (= Flußdichte) B** in der Spule erhöht.

- **Luftspule**

$$\boxed{B = \mu_o \cdot H}$$

- Spule mit **Eisen**kern

$$\boxed{B = \mu_o \cdot \mu_r \cdot H}$$

H ... magnetische Erregung in A/m
μ_r ... Permeabilitätszahl (ohne Maßeinheit)
μ_o = 1,257 · 10 $^{-6}$ T·m/A (magnet. Feldkonstante)
B ... magnetische Feldstärke (auch: Flußdichte) in T

b) **Definition**: Die **Permeabilitätszahl μ_r** (auch: relative Permeabilität)

> Die **Permeabilitätszahl μ_r** ferromagnetischer Stoffe gibt an, auf das Wievielfache die magnetische **Feldstärke B** ansteigt, wenn in eine Luftspule bei konstanter magnetischer **Erregung H** ein Eisenkern oder ein anderer ferromagnetischer Stoff gebracht wird.

Demnach wird angenommen, daß die Permeabilitätszahl von Luft **μ_r = 1** und mithin konstant sei. Bei ferromagnetischen Stoffen ist die Permeabilitätszahl **μ_r** indessen **keine Konstante**, sondern ändert sich mit der magnetischen Erregung **H** (siehe Bild 3).

c) **Erklärung** der magnetischen Wirkung des Eisens mit dem **Modell** der **Elementarmagnete**

Man kann sich den Eisenkörper aus einer Vielzahl kleiner Magnete zusammengesetzt denken. Diese sog. "Elementarmagnete" sind in dem noch nicht magnetisierten Eisen relativ ungeordnet, so daß sich ihre Magnetfelder gegenseitig aufheben. Unter dem Einfluß des **Magnetfeldes** der Spule richten sich die Elementarmagnete aus und verstärken mit ihren Magnetfeldern die magnetische **Feldstärke B** in der Spule.

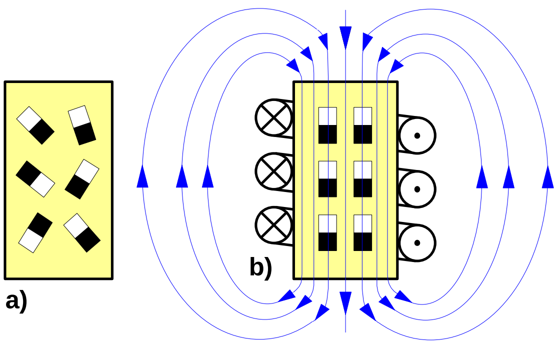


Bild 1 : Anordnung der Elementarmagnete **a) vor** dem und **b) nach** dem Magnetisieren durch das Magnetfeld der Spule

d) **Magnetisierungskurve** eines Eisenwerkstoffes

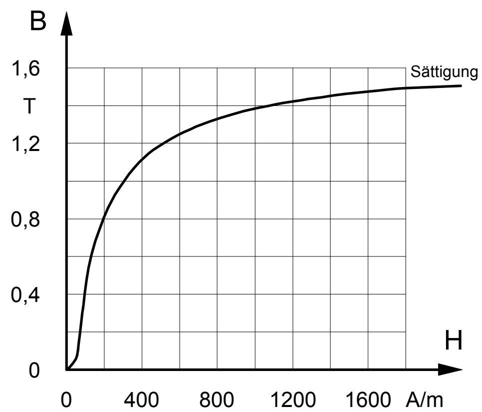


Bild 2 : Magnetisierungskurve von Dynamoblech

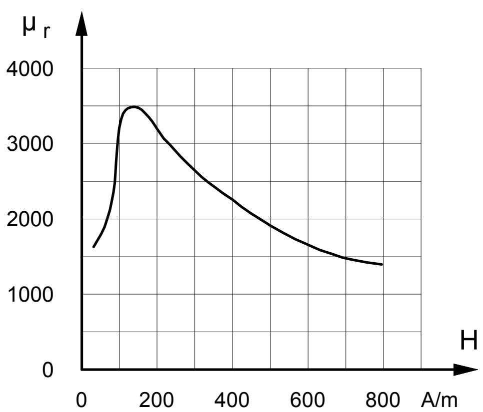


Bild 3 : Permeabilitätszahl **μ_r** in Abhängigkeit von **H** (Dynamoblech)

Beispiel : In einer **Ringspule** (N = 2000 ; d_m = 30 cm) fließt ein Strom von **0,5** A . Wie groß ist die magnetische Feldstärke (Flußdichte) in der Spule, wenn die Ringspule **a)** als Luftspule und **b)** mit einem ringförmigem Eisenkern aus Dynamoblech betrieben wird **?**

3. Der Zusammenhang zwischen **B** und **H** bei **Eisenwerkstoffen**

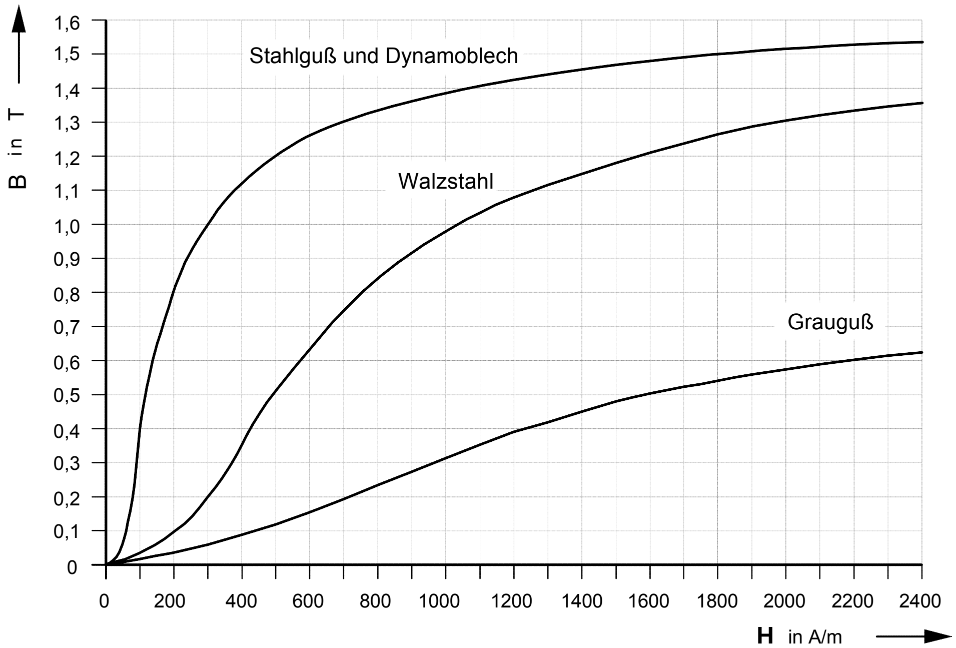
Da die Permeabilitätszahl μ_r bei den Eisenwerkstoffen (und anderen ferromagnetischen Stoffen wie z.B. Nickel) nicht konstant ist, sondern sich mit der Erregung **H** ändert, kann die magnetische Flußdichte **B** für eine gegebene magnetische Erregung **H** auch nicht mit der nebenstehenden Formel berechnet werden. Vielmehr muß die Bestimmung von **B** bei gegebenem **H** (oder umgekehrt) für den jeweiligen ferromagnetischen Werkstoff mit Hilfe der experimentell gewonnenen Magnetisierungskennlinien erfolgen.

$$\boxed{B = \mu_o \cdot \mu_r \cdot H}$$

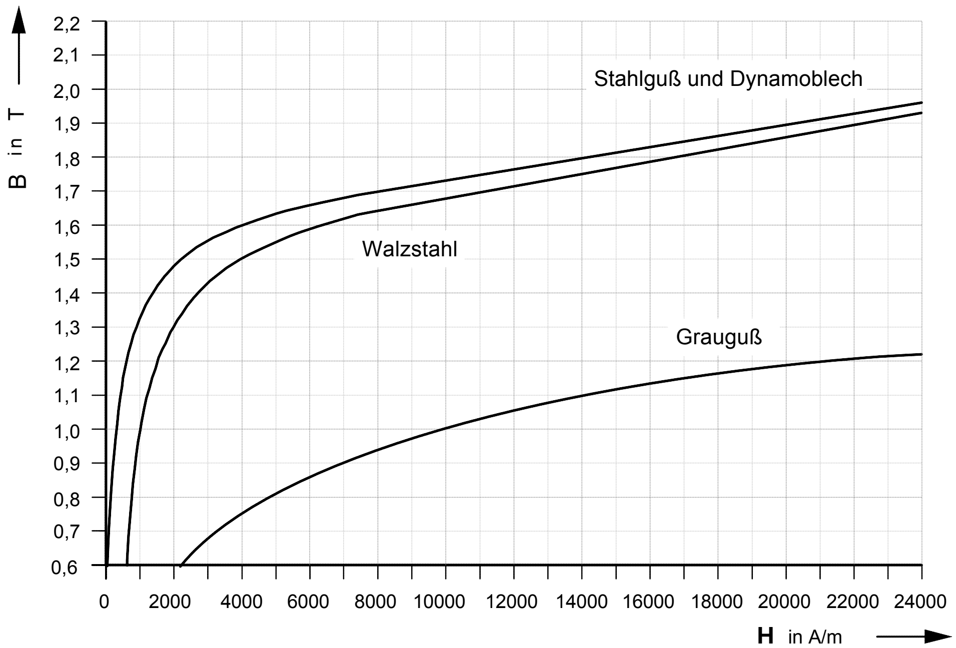
H ... magnetische Erregung in A/m
μ_r ... Permeabilitätszahl (ohne Maßeinheit)
μ_o = 1,257 · 10 $^{-6}$ T·m/A (magnet. Feldkonstante)
B ... magnet. Feldstärke (auch: Flußdichte) in T

- Die **Magnetisierungskennlinien** wichtiger Eisenwerkstoffe

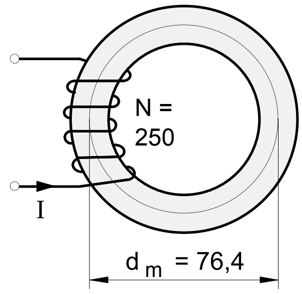
▶ Kennlinienbereich für magnetische Erregungen von **H = 0** bis **H = 2 400** A/m



▶ Kennlinienbereich für magnetische Erregungen von **H = 0** bis **H = 24 000** A/m



- **Aufgabe**



In dem oben abgebildeten Ringeisenkern aus Stahlguß sollen die in der Tabelle unten angegebenen magnetische Flußdichten **B** erzielt werden.

Bestimmen Sie die jeweils erforderlichen magnetischen Erregungen **H** und Erregerströme I in der Spule.

B	0,8 T	1,45 T	1,5 T	1,8 T	1,9 T	Material:
H	200 A/m	1 400 A/m	1 800 A/m	14 000 A/m	20 200 A/m	**Stahlguß**
I	0,19 A	1,3 A	1,7 A	13,4 A	19,4 A	

Quellen:
H. Lindner, Elektroaufgaben, Band I, Leipzig 1993, S. 50
Moeller/Frohne u.a., Grundlagen der Elektrotechnik, Stuttgart 1996, S. 221

1. Modelle zum inneren **magnetischen Aufbau** der **ferromagnetischer Stoffe**

a) Magnetfelder bewegter **Elektronen** (= bewegte negative Ladungen)

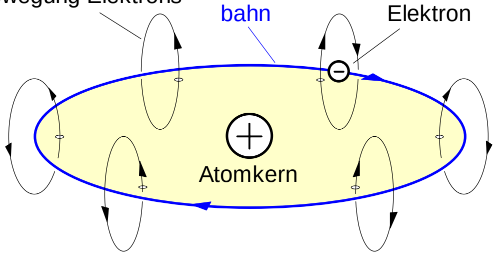


Bild **1** : Magnetfeld, verursacht durch die **Bahnbewegung** des Elektrons

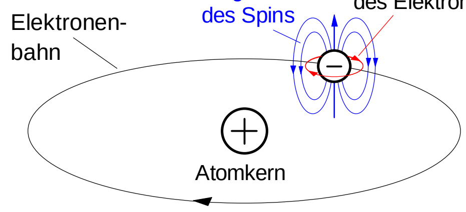


Bild **2** : Magnetfeld, verursacht durch die **Eigenrotation** des Elektrons (**Spin**)

b) Magnetfelder von **Atomen** (= Atommagnete)

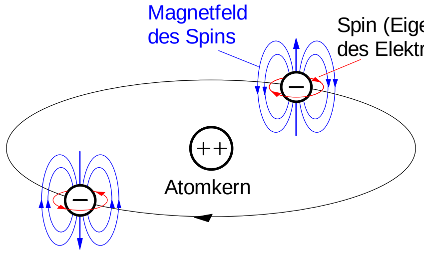


Bild **3** : Die Magnetfelder der Spins heben sich auf

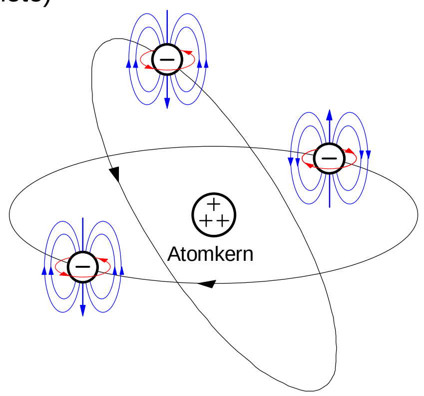
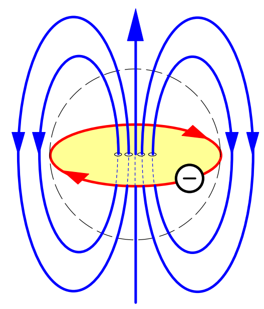


Bild **4** : Die Magnetfelder der Spins heben sich nicht ganz auf



Kreistrom-Modell: Die Spin-bewegung des Elektrons ist hier dargestellt als Bewegung einer negativen Ladung auf einer äquatorialen Kreisbahn

c) Magnetfeld des **Kristallgitters** eines ferromagnetischen Stoffes

An jedem Gitterplatz des Kristallgitters befindet sich ein Atom. Bei den ferro-magnetischen Stoffen (Eisen, Nickel und Kobalt) stellt jedes dieser Atome einen kleinen Magneten (Atommagnet) dar. Durch Wechselwirkungen sind diese Atommagnete miteinander magnetisch gekoppelt, d.h. Kopplungskräfte richten die Atommagnete auf den Gitterplätzen in gleicher Richtung aus. Die magnetischen Momente der einzelnen Magnete addieren sich und es ergibt sich innerhalb des Kristallgitters ein relativ starkes resultierendes Magnetfeld.

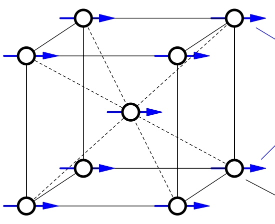


Bild **5** : Durch Kopplungskräfte parallel ausgerichtete Atommagnete

d) Magnetfeld eines ferromagnetischen **Körpers**

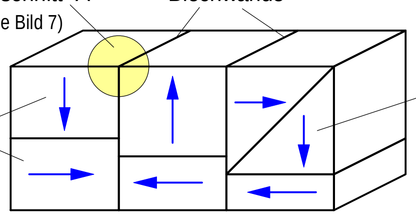


Bild **6** : **Weisssche Bezirke** in einem ferromagnetischen Körper

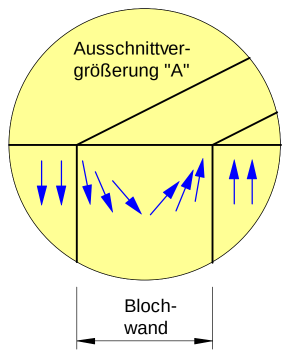


Bild **7** : Drehung der Atommagnete in einer **Blochwand** (nach F.Bloch)

Nach der von dem französischen Physiker Pierre Weiss 1907 entwickelten Theorie enthält ein ferromagnetischer Körper eine Vielzahl magnetischer Elementarbereiche mit jeweils gleicher Feldrichtung. Diese sog. Weissschen Bezirke sind so angeordnet, daß sich deren Magnetfelder gegenseitig aufheben, so daß der Körper nach außen unmagnetisch erscheint.

Die Übergangszonen zwischen den Weissschen Bezirken nennt man nach ihrem Entdecker Felix Bloch (US-Physiker schweizerischer Herkunft, 1905-1983) "Blochwände". In diesen Blochwänden drehen sich die Atommagnete schraubenförmig in die Richtung des benachbarten Weissschen Bezirks (Bild **7**).

2. Die **Magnetisierung** ferromagnetischer Stoffe

a) Erklärung des Verlaufs der **Magnetisierungskurve**

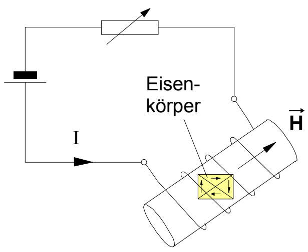


Bild 1 : Magnetisierung eines Eisenkörpers in einer Spule

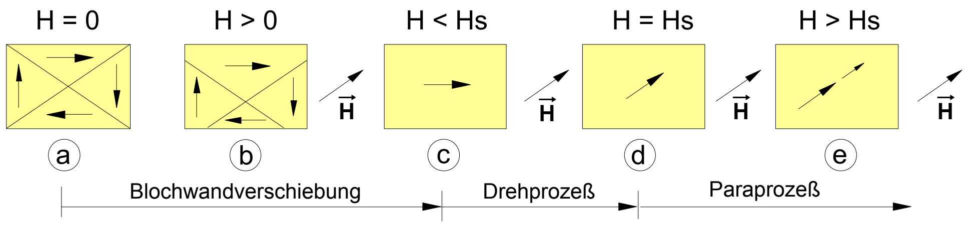


Bild 2 : Phasen der Magnetisierung eines ferromagnetischen Körpers durch ein äußeres Magnetfeld $\vec{H}$ ($H_S \Rightarrow$ Sättigungserregung)

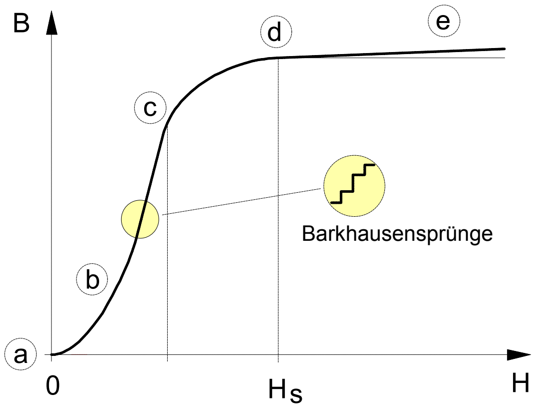


Bild 3 : Magnetisierungskurve

Die Phasen der Magnetisierung in der Magnetisierungskurve

a bis c : Verschiebung der **Blochwände**

c bis d : **Drehung** des inneren Magnetfeldes des Eisens in Richtung des äußeren Magnetfeldes $\vec{H}$

d bis e : **Paraprozeß**

Beim Paraprozeß wird durch sehr hohe magnetische Erregungen H erreicht, daß die Magnetfelder weiterer Spins ausgerichtet werden.

b) Die **Hystereseschleife**

0 bis S_1 : **Neukurve**

S : **Sättigung**

B_r : **Remanenz**

H_K : **Koerzitiv-Erregung**

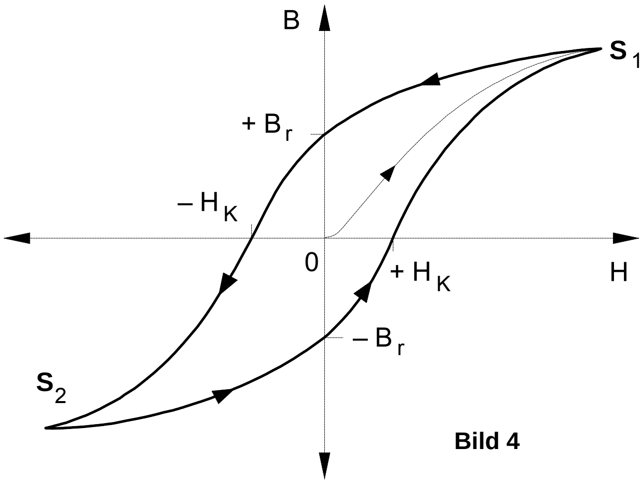


Bild 4

Die **Koerzitiv-Erregung** H_K (auch: Koerzitivkraft) ist die magnetische Erregung, die erforderlich ist, um die bei der Erregung **H = 0** im Eisen noch vorhandene

remanente Feldstärke (Remanenz) Br

zu beseitigen.

- *Hart*magnetischer Werkstoff

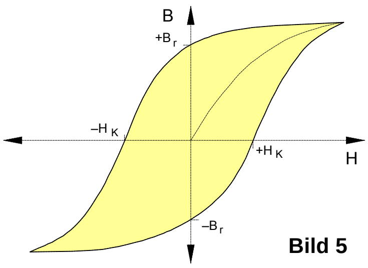


Bild 5

Anwendung: **Dauermagnete**

- *Weich*magnetischer Werkstoff

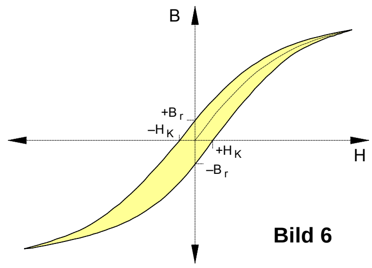


Bild 6

Anwendung: **Lasthebemagnete, Schütze, elektrische Maschinen**

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name:	ET2-19-F.DOC - 12.03.03
Arbeitsblatt Nr. **19** :	**Para- und diamagnetische Stoffe** im **Magnetfeld**	

1. Paramagnetische Stoffe

Als **para**magnetische Stoffe bezeichnet man jene Stoffe, die im Vergleich zum Vakuum ein Magnetfeld geringfügig **verstärken**. Für ihre Permeabilitätszahl gilt:

$$\boxed{\mu_r > 1}$$

Bei den paramagnetischen Stoffen ist μ_r eine Material-**konstante** und damit unabhängig von H.

Aluminium	Magnesium	Luft
Natrium	Platin	Uran
Palladium	Wolfram	Mangan
Calcium	Chrom	Salzsäure

Die **ferromagnetischen Stoffe** (Eisen, Nickel,Kobalt) wirken zwar auch feldverstärkend, allerdings ist bei ihnen die feldverstärkende Wirkung **wesentlich** größer ($\mu_r >> 1$). Außerdem ist μ_r auch **keine** Konstante, sondern abhängig von H, d.h. es ist $\mu_r = f(H)$.

2. Diamagnetische Stoffe

Als **dia**magnetische Stoffe bezeichnet man jene Stoffe, die im Vergleich zum Vakuum ein Magnetfeld geringfügig **schwächen**. Für ihre Permeabilitätszahl gilt:

$$\boxed{\mu_r < 1}$$

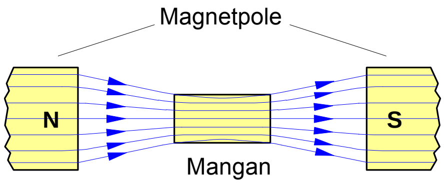
Auch bei den diamagnetischen Stoffen ist μ_r eine Material-**konstante** und damit unabhängig von H.

Kupfer	Graphit	Quecksilber
Gold	Silber	Diamant
Wasser	Germanium	Wismut
Blei	Zink	Silizium

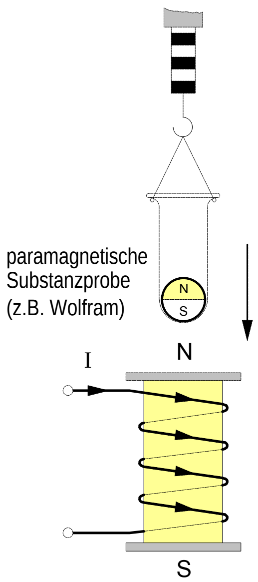
Eine der Sonderstellung der ferromagnetischen Stoffe entsprechende besondere Stoffgruppe gibt es unter den diamagnetischen Stoffen nicht. So gibt es z.B. keinen Stoff, der ein Magnetfeld besonders stark schwächen würde.

• **Feldverstärkende** Wirkungen **para**magnetischer Stoffe

a) Paramagnetischer Stoff in einem Magnetfeld



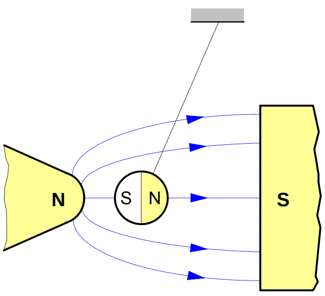
b) Paramagnetischer Stoff im Magnetfeld einer Spule



Die paramagnetische Kugel wird in die Spule **hineingezogen.**

Schlußfolgerung:
Beim Magnetisieren entsteht in der unteren Kugelhälfte ein Südpol, in der oberen ein Nordpol.

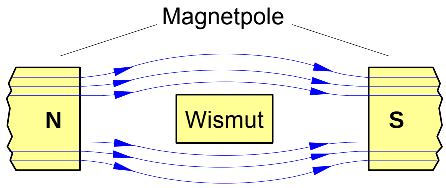
c) Paramagnetische Kugel im inhomogenen Magnetfeld



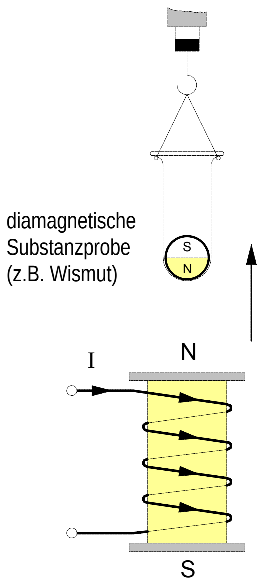
Die paramagnetische Kugel wird in den starken Feldbereich **hineingezogen.**

• **Feldschwächende** Wirkungen **dia**magnetischer Stoffe

a) Diamagnetischer Stoff in einem Magnetfeld



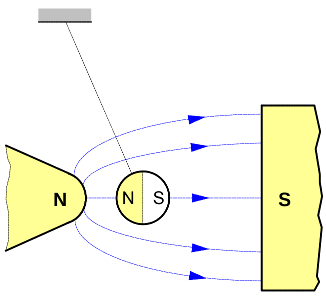
b) Diamagnetischer Stoff im Magnetfeld einer Spule



Die diamagnetische Kugel wird aus der Spule **herausgedrängt.**

Schlußfolgerung:
Beim Magnetisieren entsteht in der unteren Kugelhälfte ein Nordpol, in der oberen ein Südpol.

c) Diamagnetische Kugel im inhomogenen Magnetfeld



Die diamagnetische Kugel wird aus dem starken Feldbereich **herausgedrängt.**

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name:	ET2-20-1.DOC - 13.03.03
Arbeitsblatt Nr. **20** :	**Der magnetische Kreis**	Seite **1**

• **Formale Analogien** zwischen dem ***elektrischen Stromkreis*** und dem ***magnetischen Kreis***

Unverzweigter **elektrischer Stromkreis**

Für einen geschlossenen Umlauf gilt :

$$U = \sum_{i=1}^{n} E_i \cdot \Delta s_i$$

$$\text{mit } \Delta s_i = \ell_i$$

$$U = E_1 \cdot \ell_1 + E_2 \cdot \ell_2 + \ \dots\ E_n \cdot \ell_n$$

$E_i \cdot \ell_i = U_i$ ... elektrische Teilspannung

Unverzweigter **magnetischer Kreis**

Für einen geschlossenen Umlauf gilt :

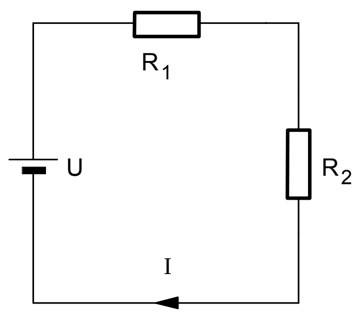
$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} H_i \cdot \Delta s_i \qquad \text{wobei } \Theta = I \cdot N$$

$$\text{mit } \Delta s_i = \ell_i$$

$$\Theta = H_1 \cdot \ell_1 + H_2 \cdot \ell_2 + \ \dots H_n \cdot \ell_n$$

$H_i \cdot \ell_i = \Theta_i$ ... magnetische Teilspannung

• Elektrische Reihenschaltung



$$\boxed{S_i = æ_i \cdot E_i}$$

$$U = \frac{S_1}{æ_1} \cdot \ell_1 + \frac{S_2}{æ_2} \cdot \ell_2$$

$$S_i = \frac{I_i}{A_i}$$

Mit $I_1 = I_2 = I$ (elektr. Reihenschaltung) gilt dann :

$$U = I \cdot \frac{\ell_1}{æ_1 \cdot A_1} + I \cdot \frac{\ell_2}{æ_2 \cdot A_2}$$

Die Bruchterme beinhalten den
***elektrischen* Widerstand** :

$$\boxed{R_i = \frac{\ell_i}{æ_i \cdot A_i}}$$

$$U = I \cdot R_1 + I \cdot R_2$$

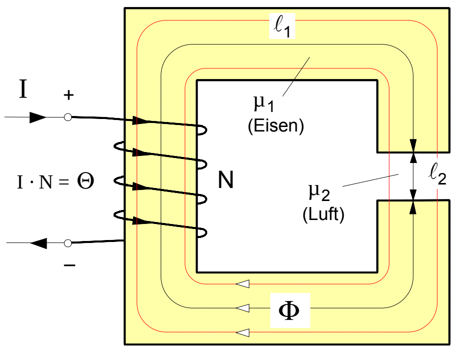
$$U = I \cdot (R_1 + R_2)$$

$$U = I \cdot R_{ges}$$

Damit gilt in der *elektrischen* Reihenschaltung für den ***elektrischen* Gesamtwiderstand** :

$$\boxed{R_{ges} = R_1 + R_2}$$

• Magnetische Reihenschaltung



$$\boxed{B_i = \mu_i \cdot H_i}$$

$$\Theta = \frac{B_1}{\mu_1} \cdot \ell_1 + \frac{B_2}{\mu_2} \cdot \ell_2$$

$$B_i = \frac{\Phi_i}{A_i}$$

Mit $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ (magnet. Reihenschaltung) gilt dann:

$$\Theta = \Phi \cdot \frac{\ell_1}{\mu_1 \cdot A_1} + \Phi \cdot \frac{\ell_2}{\mu_2 \cdot A_2}$$

Die Bruchterme beinhalten den
***magnetischen* Widerstand** :

$$\boxed{R_{mi} = \frac{\ell_i}{\mu_i \cdot A_i}}$$

$$\Theta = \Phi \cdot R_{m1} + \Phi \cdot R_{m2}$$

$$\Theta = \Phi \cdot (R_{m1} + R_{m2})$$

$$\Theta = \Phi \cdot R_{m\,ges}$$

Damit gilt in der *magnetischen* Reihenschaltung für den ***magnetischen* Gesamtwiderstand** :

$$\boxed{R_{m\,ges} = R_{m1} + R_{m2}}$$

● Der **unverzweigte magnetische Kreis** (auch: »Magnetische Reihenschaltung«)

Wir gehen bei den folgenden Überlegungen zum magnetischen Kreis von folgenden vereinfachenden **Annahmen** aus:

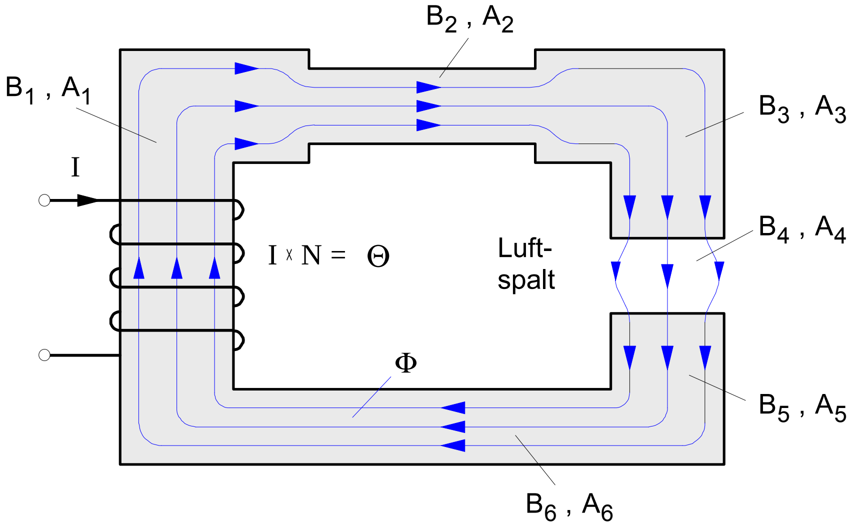
a) Der von der stromdurchflossenen Erregerspule erzeugte magnetische Fluß Φ verlaufe wegen der hohen Permeabilität des Eisens so gut wie ausschließlich im Eisenkern und im Luftspalt, d.h. der magnetische Streufluß Φ_{Str} sei gegenüber dem magnetischen Nutzfluß Φ_N vernachlässigbar klein.

b) Aus der Annahme a) folgt für den **unverzweigten** magnetischen Kreis: Der **magnetische Fluß** F ist in **allen Abschnitten** des magnetischen Kreises (Eisenabschnitte und Luftspalt) **gleich groß** (daher auch: "Magnetische Reihenschaltung").

c) Das **magnetische Feld** sei **innerhalb** der einzelnen **Abschnitte** (Eisenabschnitte und Luftspalt) annähernd **homogen,** d.h.: die magnetischen Flußdichten **B** und die magnetischen Erregungen **H** seien **innerhalb** des jeweiligen Abschnitts in jedem Raumpunkt **konstant**.

d) Im Hinblick auf die Anwendung des **Durchflutungssatzes** wird die **"mittlere Feldlinie"** als Umlaufweg gewählt. Außerdem wird angenommen, daß die magnetischen Feldvektoren $\vec{B}$ und $\vec{H}$ stets senkrecht auf den einzelnen Querschnittsflächen stehen.

● **Abschnitte** des **magnetischen Kreises**



● **Magnetischer Fluß**

$$\Phi = B_1 \cdot A_1 = B_2 \cdot A_2 = \ldots$$

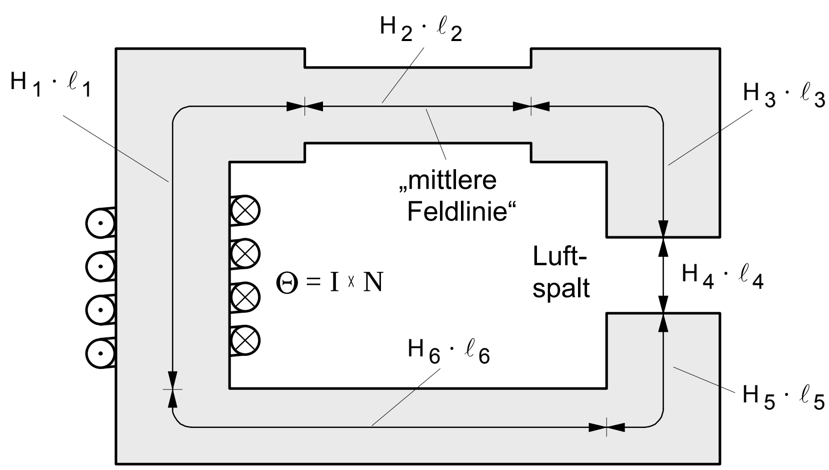
$$\boxed{\Phi = B_i \cdot A_i}$$

● **Magnetische Flußdichten B_i** in den einzelnen Abschnitten

$$B_1 = \frac{\Phi}{A_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{A_2}; \quad B_3 = \ldots$$

$$\boxed{B_i = \frac{\Phi}{A_i}}$$

● **Magnetische „Teilspannungen" $H_i \cdot \ell_i$** längs der „mittleren Feldlinie" als Umlaufweg



● **Magnetische Erregungen H_i** in den einzelnen Abschnitten

▶ **Luftspalt**:

$$\boxed{H_4 = \frac{B_4}{\mu_0}}$$

▶ **Eisen**abschnitte:

Da μ_r selbst bei gleichen Kernmaterialien in den einzelnen Abschnitten wegen $\mu_r = f(H)$ verschieden sein kann, muß H_i für den jeweiligen Abschnitt mit dem jeweiligen B_i – Wert aus der **Magnetisierungskennlinie** bestimmt werden.

$B_1 \Rightarrow H_1$ (lt. Kennlinie)

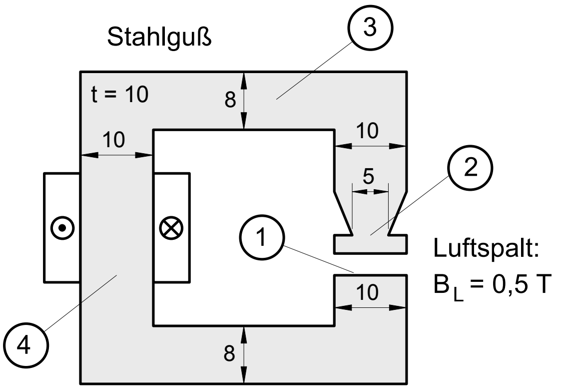
$B_2 \Rightarrow H_2$ (lt. Kennlinie) ...

● Anwendung des **Durchflutungssatzes** auf die mittlere **Feldlinie** als Umlaufweg

$$\sum_{i=1}^{m} H_i \cdot \ell_i = \sum_{k=1}^{n} I_k = I \cdot N = \Theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_1 \cdot \ell_1 + H_2 \cdot \ell_2 + H_3 \cdot \ell_3 + H_4 \cdot \ell_4 + \ldots = I \cdot N = \Theta}$$

• Erste einfachere Übungsaufgaben zum unverzweigten magnetischen Kreis

1. In dem Luftspalt des rechts abgebildeten magnetischen Kreises wird mit einem Magnetfeldmeßgerät mit Hall-Sonde eine magnetische Flußdichte von $\mathbf{B_L}$ = **0,5** T gemessen. Durch die Streuung der Feldlinien im Luftspalt vergrößert sich hier die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche $\mathbf{A_L}$ um **10**% gegenüber dem Eisenquerschnitt an der mit ① gekennzeichneten Polfläche.

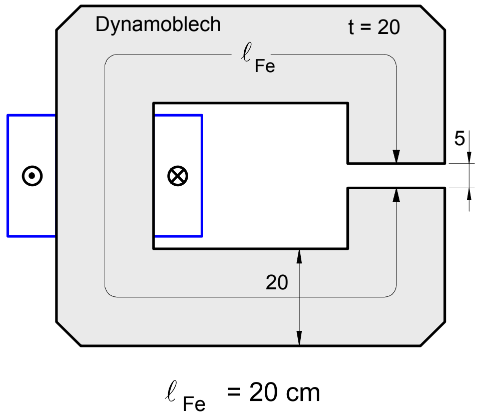


Wie groß sind die magnetischen Flußdichten $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$ und $\mathbf{B_4}$ an den mit ② , ③ und ④ gekennzeichneten Stellen?

[1,1 T ; 0,6875 T ; 0,55 T]

---

2. Durch den Erregerstrom in der Spule mit **1000** Windungen soll in dem Luftspalt des nebenstehenden magnetischen Kreises eine magnetische Feldstärke von **1,0** Tesla erzielt werden. Der Eisenkern besteht aus Dynamoblech. Die Streuung der Feldlinien kann vernachlässigt werden.



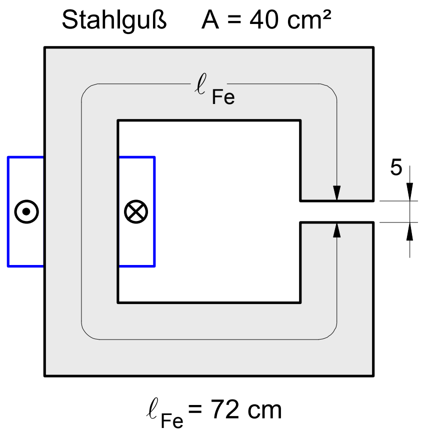
a) Berechnen Sie den magnetischen Fluß. [0,4 mWb]

b) Wie groß muß die von der Spule erzeugte elektrische Durchflutung sein, um die geforderte Feldstärke im Luftspalt zu bewirken? [4037,5 A]

c) Auf welchen Wert muß die Spannung an der Spule eingestellt werden, wenn der Widerstand des Wicklungsdrahtes **2** Ω beträgt? [8,08 V]

---

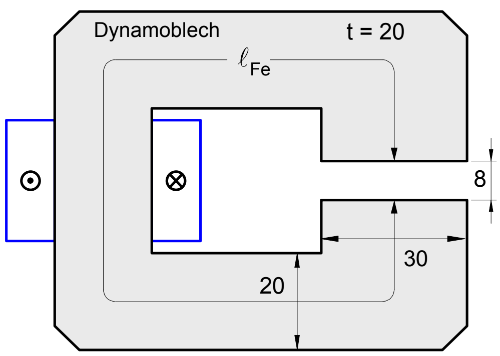
3. Im Luftspalt des rechts dargestellten magnetischen Kreises soll ein magnetischer Fluß von **4** mWb hervorgerufen werden. Der Eisenkern aus Stahlguß hat eine Querschnittsfläche von **40** cm² und eine mittlere Länge von **72** cm. Die Länge des Luftspaltes beträgt **5** mm.



Welche elektrische Durchflutung muß die Spule erzeugen? [4194 A]

---

4. Durch die Spule mit **800** Windungen des rechts abgebildeten magnetischen Kreises fließt ein Erregerstrom von **1,2** A.



a) Wie groß ist die magnetische Feldstärke im Luftspalt?

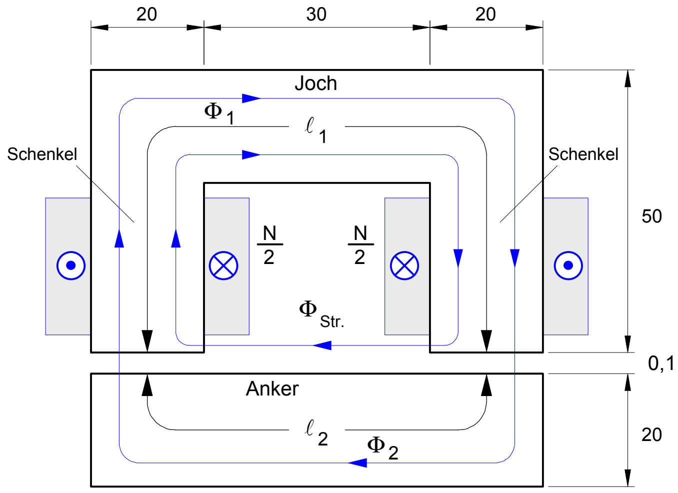
Gehen Sie bei dieser Aufgabe von der Annahme aus, daß der ***magnetische Widerstand des Eisenkerns*** und die Streuung ***vernachlässigbar*** klein sei.

b) Berechnen Sie den magnetischen Fluß. [0,09 mWb]

1. **Berechnungsbeispiel** zum **unverzweigten magnetischen Kreis**

Das in der nebenstehenden Abbildung dargestellte Kernmagnetschütz hat einen **Stahlgußkern** und einen **Stahlgußanker** mit quadratischem Querschnitt. Auf den Schenkeln befinden sich zwei in Reihe geschaltete Spulen mit **jeweils 400** Windungen.

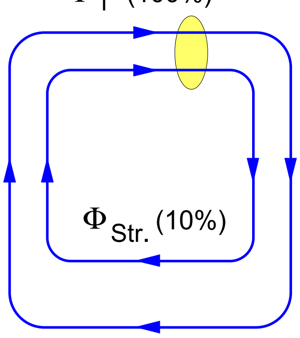
Wie groß muß der **Erregerstrom** I in den Spulen sein, damit in den Luftspalten eine magnetische Flußdichte von $\mathbf{B_L}$ **= 0,4** T erzeugt wird ?



Hinweis zur **magnetischen Streuung**:

Zur Berücksichtigung der magnetischen Streuung soll angenommen werden, daß der im Luftspalt und im Anker wirksame magnetische Fluß ($F_L = F_2$) wegen des Streuflusses F_{Str} um **10** % kleiner ist als in den Eisenschenkeln und sich im Luftspalt auf eine gegenüber dem Schenkelquerschnitt um **10** % größere Fläche verteilt.

Φ_1 (100%)



$\Phi_2 = \Phi_L$ (90%)

$F_1 = F_{Str} + F_L$

Verteilung des Magnetflusses

Luftspaltfläche: $A_L = 1{,}1 \cdot A_1 = 1{,}1 \cdot (20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot 20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}) = 4{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$

▶ Magnetischer Fluß

a) im **Luftspalt**: $\Phi_L = B_L \cdot A_L = 0{,}4\,\mathrm{T} \cdot 4{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \Rightarrow \underline{\Phi_L = 1{,}76 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Wb}}$

b) in **Joch** und **Schenkel**: $\Phi_L = 0{,}9 \cdot \Phi_1 \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_L / 0{,}9 = 1{,}96 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Wb}$

c) im **Anker**: $\Phi_2 = \Phi_L = 1{,}76 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Wb}$

▶ Magnetische Flußdichte (= Feldstärke)

a) im **Luftspalt**: $\mathbf{B_L}$ **= 0,4** T (gemäß Aufgabenstellung)

b) in **Joch** und **Schenkel**: $B_1 = \frac{\Phi_1}{A_1} = \frac{1{,}96 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Wb}}{4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} \Rightarrow \underline{B_1 = 0{,}49\,\mathrm{T}}$

c) im **Anker**: $B_2 = \frac{\Phi_2}{A_2} = \frac{1{,}76 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Wb}}{4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} \Rightarrow \underline{B_2 = 0{,}44\,\mathrm{T}}$

▶ Magnetische Erregungen

a) im **Luftspalt**: $H_L = \frac{B_L}{\mu_0} = \frac{0{,}4\,\mathrm{T}}{1{,}257 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}} \Rightarrow \underline{H_L = 318\,218\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}$

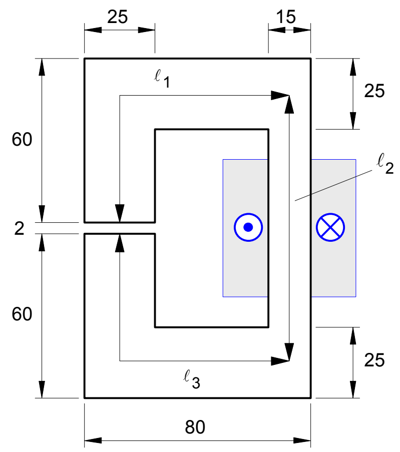
b) in **Joch** und **Schenkel**: $B_1 = 0{,}49\,\mathrm{T} \Rightarrow \underline{H_1 = 115\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}$ **c)** im **Anker**: $B_2 = 0{,}44\,\mathrm{T} \Rightarrow \underline{H_2 = 105\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}$

▶ Durchflutungssatz:

$$\Theta = H_L \cdot \ell_L + H_1 \cdot \ell_1 + H_2 \cdot \ell_2 = 318\,218\,\mathrm{A/m} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} + 115\,\mathrm{A/m} \cdot 125{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} + 105\,\mathrm{A/m} \cdot 65{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$= 63{,}64\,\mathrm{A} + 14{,}46\,\mathrm{A} + 6{,}9\,\mathrm{A} \Rightarrow \underline{\Theta = 84{,}76\,\mathrm{A}}$$ $\Rightarrow$ Erregerstrom: $I = \Theta / N = 84{,}76\,\mathrm{A} / 800 = 0{,}106\,\mathrm{A}$

2. Übungsaufgabe



In dem **2** mm langen Luftspalt der nebenstehenden Drosselspule mit einem **2** cm dicken Eisenkern aus **Dynamobleche**n soll eine magnetische Flußdichte von $\mathbf{B_L}$ **= 0,8** T erzeugt werden.

Infolge der Isolierung der einzelnen Bleche ist mit einem Eisenfüllfaktor von 95 % zu rechnen. Die Spule hat **1200** Windungen.

Berechnen Sie den erforderlichen **Erregerstrom** I in der Spule. [1,2 A]

Hinweis: Die magnetische Streuung und die Feldausdehnung im Luftspalt sind zu vernachlässigen!

Arbeitsblatt Nr. **21** : **Kraftwirkung zwischen Magnetpolen**

1. Die magnetische **Kraft** zwischen zwei **Magnetpolen**

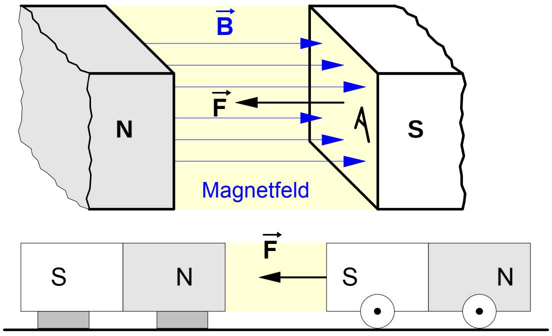
Die Kraft, mit der sich zwei Magnetpole gegenseitig anziehen, kann –sofern das Magnetfeld durch die Polränder scharf begrenzt wird und homogen ist– nach folgender Formel berechnet werden :

$$\boxed{F = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot B^2 \cdot A}$$

Die Begründung der Formel folgt später.

$$\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}\ \frac{T \cdot m}{A}$$

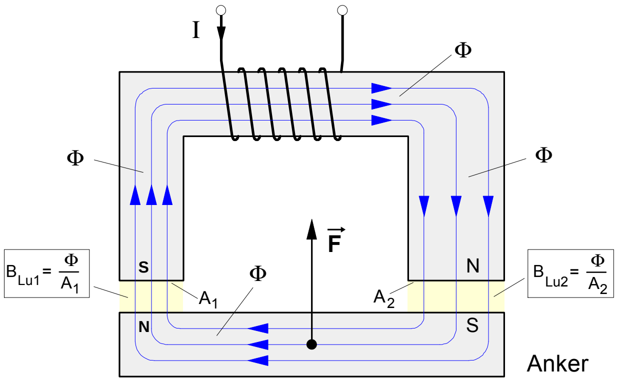
B ... magnetische Feldstärke (Flußdichte) zwischen den Polen in **T**
A ... wirksame Polfläche in **m²**
F ... Anziehungskraft in **N**



2. **Kraft**wirkungen eines Elektromagneten auf einen **Anker**

Die obige Formel enthält keinen Hinweis auf die Ursache des Magnetfeldes und gilt deshalb sowohl für Dauermagneten als auch für Elektromagneten. Im folgenden soll diese Formel auf zwei verschiedene Betriebszustände eines Elektromagneten angewendet werden. In beiden Fällen wird angenommen, daß der Magnetfluß Φ in allen Abschnitten des magnetischen Kreises gleich groß sei (magnetische Reihenschaltung).

a) Der Anker wird **angezogen**.



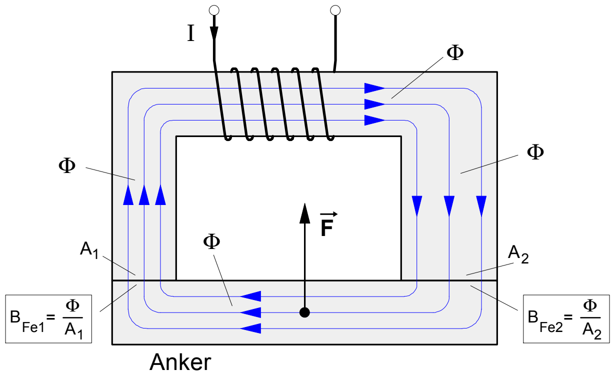
- Für die auf den Anker wirkende **Anzugskraft** gilt:

$$F = F_1 + F_2$$
$$= \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot B_{Lu1}^2 \cdot A_1 + \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot B_{Lu2}^2 \cdot A_2$$

$$\boxed{F = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot \left(B_{Lu1}^2 \cdot A_1 + B_{Lu2}^2 \cdot A_2\right)}$$

F ... Anzugskraft auf den Anker in **N**
B_{Lu} ... Flußdichte im jeweiligen Luftspalt in **T**
A ... Fläche des jeweiligen Pols in **m²** (Schenkelfläche)

b) Der Anker wird **festgehalten**.



- Für die auf den Anker wirkende **Haltekraft** gilt:

$$F = F_1 + F_2$$
$$= \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot B_{Fe1}^2 \cdot A_1 + \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot B_{Fe2}^2 \cdot A_2$$

$$\boxed{F = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot \left(B_{Fe1}^2 \cdot A_1 + B_{Fe2}^2 \cdot A_2\right)}$$

F ... Haltekraft auf den Anker in **N**
B_{Fe} ... Flußdichte im jeweiligen Luftspalt in **T**
A ... Fläche des jeweiligen Pols in **m²** (Schenkelfläche)

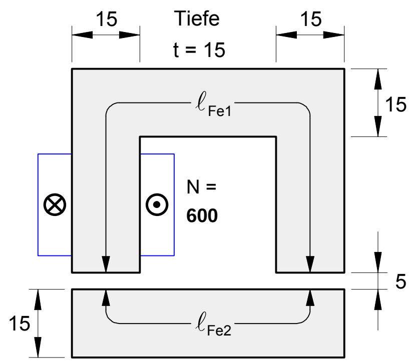
3. Aufgabenbeispiel

Der Anker des rechts abgebildeten Elektromagneten (ℓ_{Fe1} = 200 mm, ℓ_{Fe2} = 80 mm) soll mit einer Kraft von **115** N angezogen werden.
Die restliche Daten sind der (nicht maßstäblichen) Abbildung zu entnehmen.

a) Bestimmen Sie den erforderlichen Erregerstrom in der Spule. [10,70 A]

b) Wie groß müßte der Erregerstrom sein, um bei einem Viertel des Ankerabstandes die gleiche Anzugskraft zu erzielen? [2,75 A]

c) Mit welcher Haltekraft wird der Anker festgehalten, wenn der Erregerstrom nach dem Anziehen des Ankers auf **0,9** A verringert wird? [408 N]



U-Kern und Anker aus Dynamoblech

Lehrgang : **ELEKTROTECHNIK 2**	Name: ET2-22-1.DOC - 04.04.06

Arbeitsblatt Nr. **22** : **Berechnung magnetischer Kreise** (Übungen)

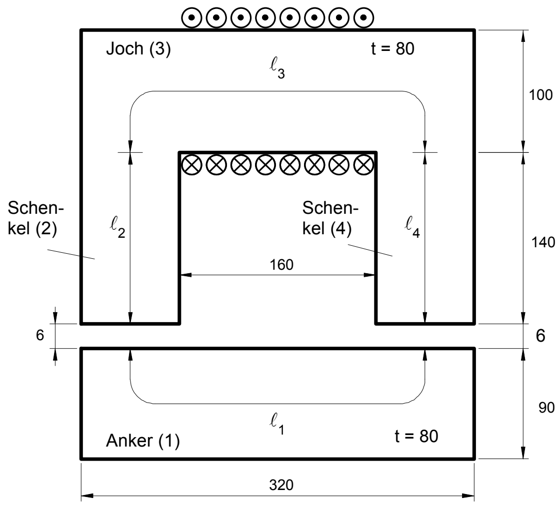
1. Auf dem Joch des nebenstehenden Elektromagneten ist eine Spule mit **900** Windungen aufgebracht. Die Eisenteile sind aus **Stahlguß**. Im Luftspalt soll eine magnetische Flußdichte von **0,8 T** bewirkt werden.

Berechnen Sie den dazu erforderlichen Spulenstrom I.

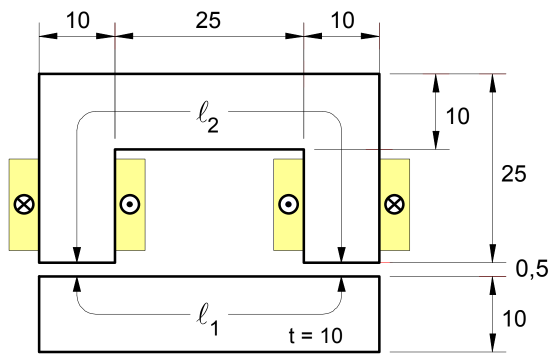
Gehen Sie bezüglich der **Streuung** davon aus, daß der magnetische Fluß im Luftspalt und im Anker um **15% kleiner** ist als der im übrigen Eisen, und daß er sich im Luftspalt auf eine Fläche verteilt, die um **10% größer** ist als der Querschnitt eines Schenkels.

Sämtliche Maßangaben in **mm** ! (auch bei den anderen Zeichnungen)

[I = 8,7 A]



2. Der Anker des nebenstehenden Elektromagneten (Eisenteile aus **Stahlguß**) soll mit einer Kraft von **100 N** angezogen werden. Die Wicklung ist je zur Hälfte auf beide Schenkel verteilt und besteht aus insgesamt **600** Windungen. Die magnetische Streuung ist bei den Aufgaben **a)** bis **c)** zu vernachlässigen.



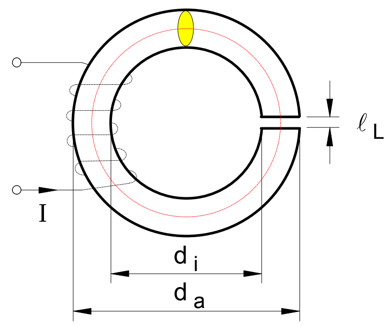
a) Berechnen Sie den erforderlichen **Spulenstrom**.

b) Welche magnetische **Feldenergie** muß im Einschaltmoment im **Luftspalt** gespeichert sein?

c) Auf welchen Wert kann der **Spulenstrom verringert werden**, wenn die Haltekraft bei **angezogenem Anker** ebenfalls 100 N betragen soll? [**a)** I = 1,56 A – **b)** W = 50 mWs – **c)** I' = 74,7 mA – **d)** I = 1,58 A]

d) Berechnen Sie den Spulenstrom unter Berücksichtigung der **Streuung** wie bei Aufgabe **1**.

3. Der nebenstehende Elektromagnet mit einem Ringkern aus **Stahlguß** hat einen äußeren Durchmesser $\mathbf{d_a}$ = **91,4** mm und einen inneren Durchmesser von $\mathbf{d_i}$ = **61,4** mm. Die Luftspaltlänge beträgt ℓ_L = **0,5** mm. In der Erregerwicklung mit **N = 500** fließt ein Strom von I = **1,0** A.



a) Wie groß ist der **magnetische Fluß** im Eisenkern? [Φ = 0,185 mWb]

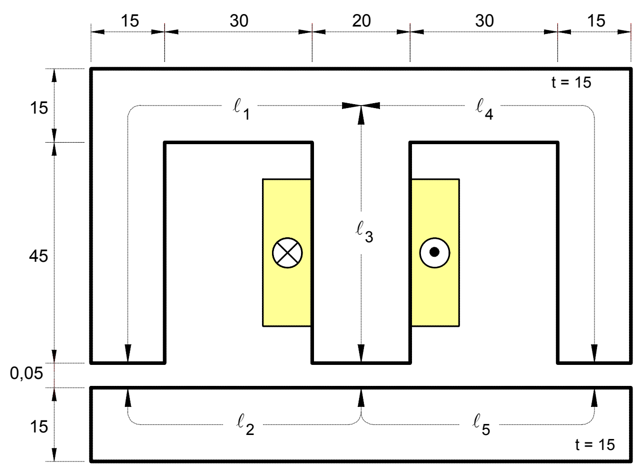
b) Wie groß sind die auf den Eisenweg und den Luftspalt entfallenden Teildurchflutungen? [$H_{Fe} \cdot \ell_{Fe}$ = 84 A ; $H_L \cdot \ell_L$ = 418 A]

Die magnetische Streuung ist zu vernachlässigen.

4. Bei dem nebenstehenden Schaltschütz aus **Dynamoblech** ist auf dem Mittelschenkel eine Spule mit **N** = **1000** Windungen aufgebracht.

Welcher **Erregerstrom** muß in der Spule fließen, damit im Luftspalt des Mittelschenkels eine magnetische Feldstärke von $\mathbf{B_{L3}}$ = **0,8** T erzielt wird? [I = 84 mA]

Die magnetische Streuung ist zu vernachlässigen.



zu Aufgabe **3.** (Arbeitsblatt Nr. **22**): Lösung mit Hilfe der **Luftspaltgeraden**

- **gegeben**: Erregerstrom I und Windungszahl **N** und damit die Gesamtdurchflutung $\Theta = I \cdot N$
- **gesucht**: **a)** B_{Fe} = **?** (magnetische Feldstärke im Eisen) bzw. Φ_{Fe} = **?**
  b) $H_{Fe} \cdot \ell_{Fe}$ = **?** und $H_L \cdot \ell_L$ = **?**

- **Problem**: Um die magnetische Feldstärke B_{Fe} im Eisen zu bestimmen, müßte die magnetische Erregung H_{Fe} bekannt sein. Da aber lediglich die **Gesamtdurchflutung** Θ gegeben ist, **nicht jedoch deren Verteilung** auf den Eisenkern und den Luftspalt gemäß dem Durchflutungssatz $\Theta = H_{Fe} \cdot \ell_{Fe} + H_L \cdot \ell_L$ und insofern in dieser Formel zwei Unbekannte (nämlich H_{Fe} und H_L) enthalten sind, muß H_{Fe} und B_{Fe} nach folgendem Verfahren **graphisch** ermittelt werden.
- **Lösung** mit Hilfe der sogenannten "**Luftspaltgeraden**" :

Hinweis: Dieses Lösungsverfahren kann nur angewendet werden, wenn die Streuung vernachlässigbar ist und die Feldstärken im Eisen und im Luftspalt als gleich groß angenommen werden können, d.h. wenn $B_{Fe} = B_L = B$ ist. Unter dieser Voraussetzung läßt sich der Durchflutungssatz wie folgt umformen:

$$\Theta = I \cdot N = H_{Fe} \cdot \ell_{Fe} + H_L \cdot \ell_L \quad \text{mit} \quad H_L = \frac{B_L}{\mu_o} \quad \text{und} \quad B_L = B_{Fe} = B$$

$$\Theta = H_{Fe} \cdot \ell_{Fe} + \frac{B}{\mu_o} \cdot \ell_L$$

Teildurchflutungen

$$H_{Fe} \cdot \ell_{Fe} = \Theta_{Fe}$$

$$H_L \cdot \ell_L = \Theta_L$$

- Die **Koordinaten** B_o und H_o der **Luftspaltgeraden** werden über die Annahmen $H_{Fe} = 0$ bzw. $B = 0$ gewonnen:
  - ► mit $B = B_o$ bei $H_{Fe} = 0$ ergibt sich für die Berechnung der Koordinate B_o auf der **B**-Achse:

$$\Theta = \frac{B_o}{\mu_o} \cdot \ell_L \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_o = \frac{\Theta \cdot \mu_o}{\ell_L} \quad \text{wobei} \quad \Theta = I \cdot N}$$

$$B_o = \frac{500\,\text{A} \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}}{0{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}$$

$$\underline{B_o = 1{,}257\,\text{T}}$$

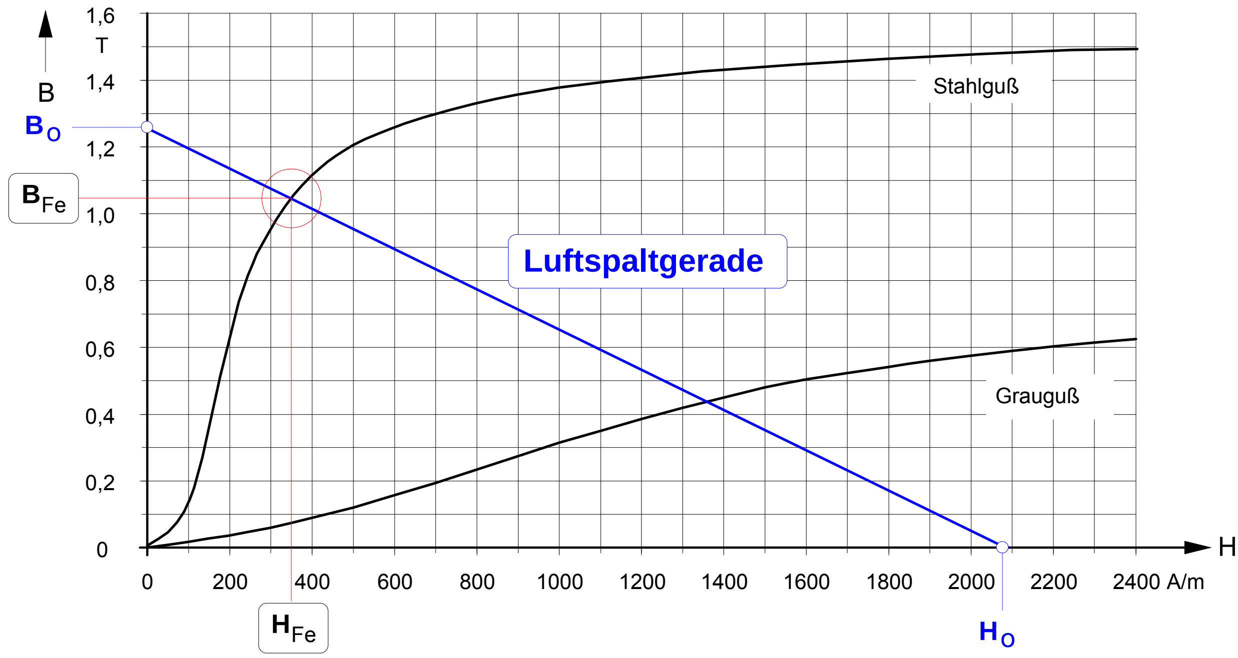
  - ► mit $H_{Fe} = H_o$ bei $B = 0$ ergibt sich für die Berechnung der Koordinate H_o auf der **H**-Achse:

$$\Theta = H_o \cdot \ell_{Fe} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_o = \frac{\Theta}{\ell_{Fe}} \quad \text{wobei} \quad \Theta = I \cdot N}$$

$$H_o = \frac{500\,\text{A}}{0{,}2395\,\text{m}}$$

$$\underline{H_o = 2\,088\,\text{A/m}}$$

- Mit den Koordinaten B_o und H_o läßt sich die "Luftspaltgerade" in das **H**–**B**–Diagramm einzeichnen:



- Aus dem **Schnittpunkt** der **Magnetisierungskennlinie mit der Luftspaltgeraden** ergibt sich für die magnetische Feldstärke (Flußdichte) B_{Fe} im Eisen:

$$\underline{B_{Fe} = 1{,}05\,\text{T}} \;(= B_L \text{ gemäß Voraussetzung})$$

$$\underline{H_{Fe} = 350\,\text{A/m}}$$

Schwerpunktfach
Elektrotechnik in der Fachoberschule

Klasse 12 – Organisationsform **B**

Technik kommt ohne Physik aus, wie der Filmstar ohne Lehrzeit und der faschistische Staatsmann ohne Bildung.

(Max Horkheimer)

Coulomb Oersted Ampére Ohm Kirchhoff Gauß Faraday Maxwell

Themenfeld ET **1** : **Elektrisches Feld und GS-Netzwerke**

A. Mechanik
B. Elektrische Ladung
C. Elektrisches Feld
D. Potential und Spannung
E. Kapazität und Kondensator
F. Laden und Entladen
G. Strömungsfeld
H. Gleichstrom-Netzwerke

Themenfeld ET **2** : **Magnetisches Feld**

A. Magnetische Kraft
B. Grundgrößen des Magnetfeldes
C. Stoffe im Magnetfeld
D. Magnetischer Kreis

Themenfeld ET **3** : **Induktion und Wechselstrom**

A. Induktionsvorgänge und deren Gesetze
B. Selbstinduktion und RL-Schaltvorgänge
C. Sinusförmige Wechselgrößen
D. Mathematischer Exkurs: Komplexe Zahlen
E. Komplexe Wechselstromkreise

Themenfeld ET **4** : **Elektrische Messtechnik**

A. Oszilloskop
B. Strom- und Spannungsmesser
C. Leistungsmesser

E-Mail: sicars@hems.de – © **Jochen Sicars**

Heinrich-Emanuel-Merck-Schule Darmstadt

Fachoberschule – Schwerpunkt Elektrotechnik

Themenfelder des Schwerpunktfaches »Elektrotechnik« für die Organisationsform **A**

Themenfeld »Elektrotechnik **3**«: **Induktion und Wechselstrom**

A. Induktionsvorgänge und ihre Gesetze

1. Zum Gegenstand: **Versuche zur Induktion der Bewegung** (Arbeitsblatt Nr. **1**)
2. **Induktionsspannung in einem Leiterstab** als erster Sonderfall
   - Erste spezifische Form des Induktionsgesetzes (Arbeitsblatt Nr. **2**)
   - Zur Relativität der Induktion (Arbeitsblatt Nr. **2a**)
3. Die **Faradaysche Form** des **Induktionsgesetzes**
   - Herleitung des Induktionsgesetzes (Arbeitsblatt Nr. **3** / S.1)
   - Unterscheidung in Induktion der Bewegung und der Ruhe (Arbeitsblatt Nr. **3** / S.2)
   - Darstellung von Induktionsvorgängen in Zeitdiagrammen (Arbeitsblatt Nr. **3** / S.3)
   - Übungen zum Induktionsgesetz (Arbeitsblatt Nr. **3 a**)
4. Induktionsspannung und **Induktionsstrom**
   - Richtung von Induktionsvorgängen (Arbeitsblatt Nr. **4** / S.1)
   - Energieumwandlung und Lenzsches Gesetz (Arbeitsblatt Nr. **4** / S.2)
5. Anwendungsbeispiel: **Thomsonscher Ringversuch** (zu 4. - (Arbeitsblatt Nr. **5**))
6. Verallgemeinerung: Zum Inhalt der Maxwellschen Gleichungen (Arbeitsblatt Nr. **6**)

B. Selbstinduktion und Schaltvorgänge in Spulenstromkreisen

7. **Selbstinduktion** in Spulen
   - Formen der Selbstinduktion (Arbeitsblatt Nr. **7** / S.1)
   - Berechnung der Selbstinduktionsspannung (Arbeitsblatt Nr. **7** / S.2)
   - Allgemeine Definition der Induktivität (Arbeitsblatt Nr. **7** / S.3)
   - Feldenergie in Spulen mit konstanter Induktivität (Arbeitsblatt Nr. **7** / S.4)
   - Übungen zur Selbstinduktion (Arbeitsblatt Nr. **7** / S.5 und S.6)
8. **Schaltvorgänge in RL-Schaltungen** (reale Spule)
   - Zeitdiagramme und Funktionsgleichungen (Arbeitsblatt Nr. **8** / S.1)
   - Übungen zu RL-Schaltvorgängen (Arbeitsblatt Nr. **8** / S.2)
   - Nachtrag: Begründung und Herleitung der Zeitfunktionsgleichungen (Arbeitsblatt Nr. **8 a**)

C. Sinusförmige elektrische Wechselgrößen und einfache Wechselstromkreise

9. Rotierende Schleife (Drehspule) im Magnetfeld: **Erzeugung sinusförmiger Wechselspannungen**
   - Zeitverlauf des magnetischen Flusses in der rotierenden Schleife (Arbeitsblatt Nr. **9** / S.1)
   - Zeitverlauf der Induktionsspannung in der rotierenden Schleife (Arbeitsblatt Nr. **9** / S.2)
10. **Zeigerdarstellung** von sinusförmigen Wechselgrößen (Arbeitsblatt Nr. **10**)
    - Funktionsgleichung, Zeitdiagramm und Zeigerdarstellung
    - Konstruktion des Zeitdiagramms aus dem Zeigerdiagramm
11. **Mittelwerte** von elektrischen Wechselgrößen (Arbeitsblatt Nr. **11**)
    - Arithmetischer Mittelwert
    - Gleichrichtwert
    - Quadratischer Mittelwert (auch:Effektivwert)

12. Addition von sinusförmigen Wechselgrößen gleicher Frequenz (Arbeitsblatt Nr. **12**)

13. Begründung der sog. **»idealen« Wechselstromwiderstände** (Arbeitsblatt Nr. **13**)

14. Grundschaltungen mit Wechselstromwiderständen und **Wechselstromleistung**

- Reihenschaltungen mit Wechselstromwiderständen (Arbeitsblatt Nr. **14 a**)
- Parallelschaltungen mit Wechselstromwiderständen (Arbeitsblatt Nr. **14 b**)
- Wechselstromleistung (Arbeitsblatt Nr. **14 c**)
- Übungsaufgaben (in nichtkomplexer Darstellungsform - (Arbeitsblatt Nr. **14 d**))

D. Mathematischer Exkurs: Komplexe Zahlen und symbolische Rechnung

15. Definition, Darstellung und Rechnen mit **komplexen Zahlen** (Arbeitsblatt Nr. 15)

- Definition der imaginären Zahl j (Arbeitsblatt Nr. **15** / S.1)
- Begründung und Darstellung einer komplexen Zahl (Arbeitsblatt Nr. **15** / S.2)
- Darstellungsformen von komplexen Zahlen (Arbeitsblatt Nr. **15** / S.3)
- Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen (Arbeitsblatt Nr. **15** / S.4)
- Multiplikation und Division von komplexen Zahlen (Arbeitsblatt Nr. **15** / S.5)

16. Anwendung: **Komplexe Form der Darstellung elektrischer Wechselgrößen**

- Zeigerdarstellung von Strom und Spannung in komplexer Form (Arbeitsblatt Nr. **16 a**)
- Operator-Darstellung von Wechselstromwiderständen in komplexer Form (Arbeitsblatt Nr. **16 b**)

E. Berechnung komplexer Wechselstromkreise

17. Berechnung von Wechselstromkreisen **in komplexer Form** (Arbeitsblatt Nr. **17**)

18. Phasendrehung in Wechselstromschaltungen (Arbeitsblatt Nr. **18**)

- Wechselstrom-Brückenschaltungen
- Phasendrehung auf 90° als Beispiel
- Kapazitätsbrückenschaltung

19. Wechselstrom-Meßbrücken (Arbeitsblatt Nr. **19**)

- Kapazitätsmeßbrücke nach Max Wien
- Wien-Meßbrücke mit Parallelersatzwiderständen
- Frequenz-Meßbrücke nach Wien und Robinsohn

20. Phasenschieberbrücke (Arbeitsblatt Nr. **20**)

- Prinzip der Phasenschieberbrücke
- Erste Einführung in die Ortskurvendarstellung

21. Komplexe Scheinwiderstände - Zusammenfassende **Übersicht** (Arbeitsblatt Nr. **21**)

22. Ersatzspannungsquelle – Anwendung auf Wechselstromkreise (Arbeitsblatt Nr. **22**)

23. Blindleistungsmessung mit 90°-Schaltung nach Hummel (Arbeitsblatt Nr. **22**)

24. Einführung in die **Ortskurven-Darstellung** (Arbeitsblatt Nr. **24**)

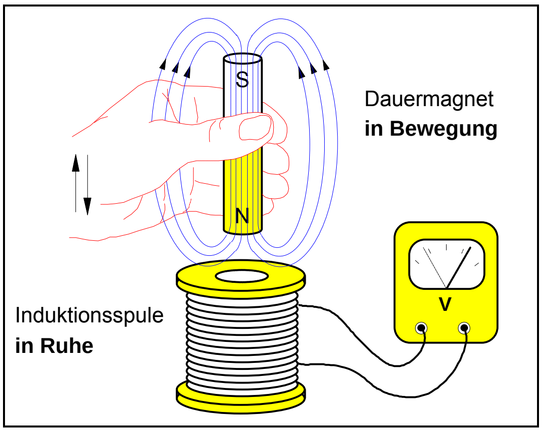
25. RC- und RL-Schaltungen als **Frequenzfilter** (Arbeitsblatt Nr. **25**)

Die Arbeitsblätter Nr. **22** bis Nr. **25** sind noch nicht digitalisiert und werden demnächst nachgereicht.

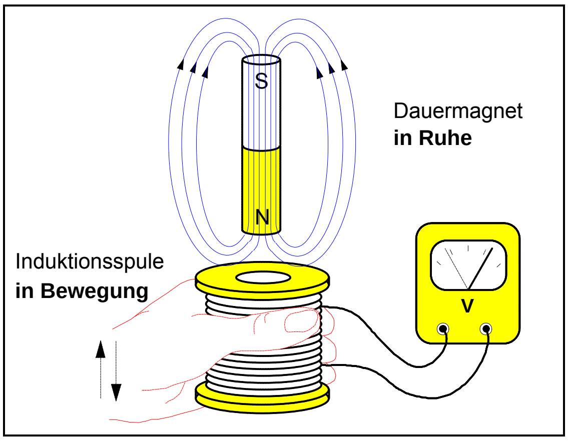
Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK** | Name: | WT-1-F.DOC - 24.02.02

Arbeitsblatt Nr. **1** : **Versuche** zur **Induktion** der **Bewegung**

1. **Induktion** durch **Bewegung** eines **Dauermagneten** in der Umgebung einer **Spule**



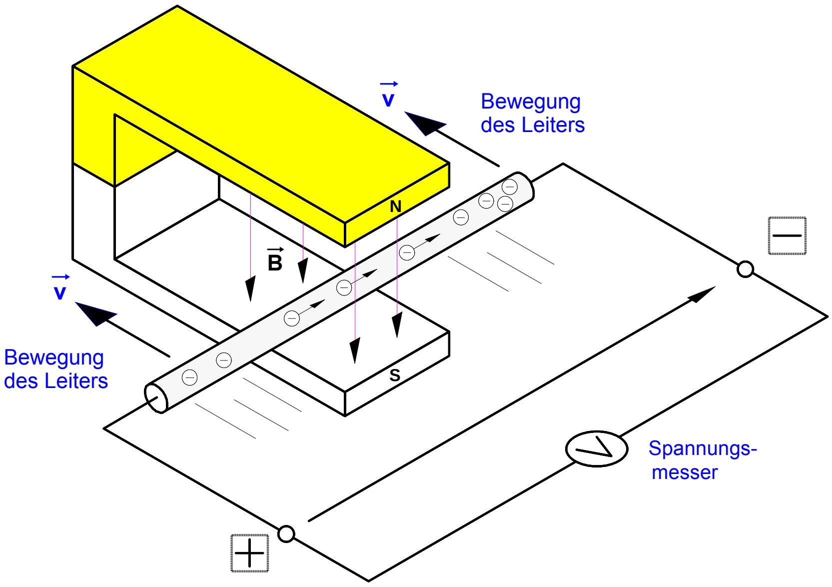
a) Bewegung des **Dauermagneten**



b) Bewegung der **Induktionsspule**

Solange der **Dauermagnet** in der Umgebung der ruhenden Spule **oder** die **Spule** in der Umgebung des ruhenden Magneten **bewegt** wird, entsteht an den Klemmen der Spule eine **Spannung** .
Wird die Bewegungsrichtung geändert, so ändert sich die Richtung der **Spannung** .

2. **Induktion** durch **Bewegung** eines **Leiterstabes** im **Magnetfeld** eines Dauermagneten



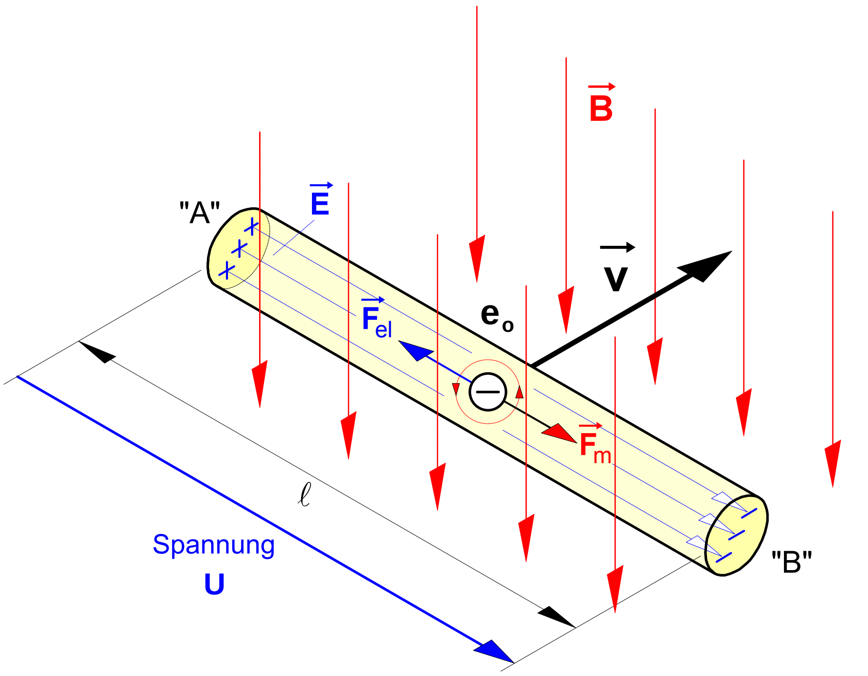
Wird der gerade Metall-Leiter (z.B. aus Kupfer oder Alumininium) senkrecht zum Magnetfeld bewegt, so "schneidet" er die **Feldlinien** des Dauermagneten. Solange diese Bewegung andauert, entsteht zwischen den Enden des Leiters eine **Induktionsspannung U** .

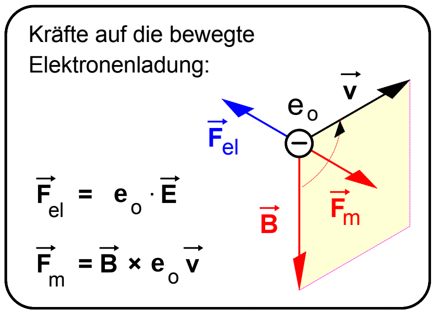
Wie läßt sich der Vorgang elektronentheoretisch deuten?

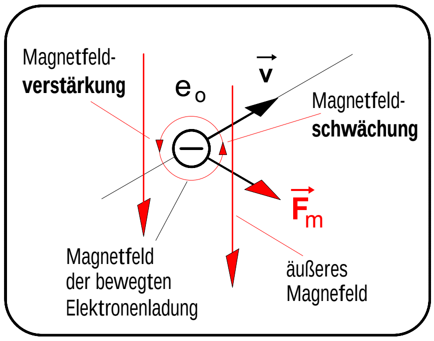
Der metallische Leiter enthält leicht bewegliche **freie Elektronen** . Auf sie wird während der Bewegung des Leiters im Magnetfeld eine **magnetische Kraft** (Lorentzkraft) ausgeübt. Unter dem Einfluß dieser Kraft werden die **freie Elektronen** in dem Leiter in die angegebene Richtung beschleunigt. Dadurch entsteht an dem einen Ende des Leiters ein **Elektronenüberschuß** , an dem anderen Ende bleibt ein **Elektronenmangel** zurück. **Zwischen** den beiden **Leiterenden** wird dadurch zugleich eine **Spannung U** hervorgerufen.

Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name:	WT-2-F.DOC - 01.03.04
Arbeitsblatt Nr. **2** :	**Induktionsspannung** in einem **Leiterstab**	

● **Beobachtung** im Versuch: Wird ein gerader Leiterstab aus Aluminium mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ ***senkrecht*** zu einem konstanten Magnetfeld mit der magnetischen Feldstärke $\vec{B}$ bewegt, so entsteht zwischen den Enden des Stabes eine **Induktionsspannung U** (siehe Arbeitsblatt Nr. **1**).







● **Erklärung des Induktionsvorganges in dem Leiterstab**: Wird der Leiterstab in der angegebenen Richtung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ gleichförmig quer durch das Magnetfeld $\vec{B}$ bewegt, so werden auch die in dem Stab vorhandenen freien Elektronen mit der Elementarladung ($Q = e_o = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As) in Bewegungsrichtung des Stabes mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ **mitbewegt**. Um diese bewegten negativen Elektronenladungen entsteht nun ebenfalls ein magnetisches Feld. Das äußere Feld und das Feld der bewegten Elektronenladungen überlagern sich. Dabei entsteht rechts von der Ladung eine Feldschwächung und links eine Feldverstärkung und auf das Elektron wirkt eine magnetische Kraft $\vec{F}_m$ (*Lorentz*-Kraft), die das Elektron in Richtung des Stabendes "**B**" ablenkt. Dadurch wird das rechte Ende des Leiterstabes **negativ** geladen (Elektronenüberschuß), während an dem linken Stabende "**A**" eine **positive** Ladung zurückbleibt (Elektronenmangel). Durch diese Ladungstrennung wird zwischen den Stabenden "**A**" und "**B**" zugleich auch ein **elektrisches** Feld mit der Feldstärke $\vec{E}$ aufgebaut, das entlang der Feldlinienlänge $s = \ell$ (Stablänge im Magnetfeld) eine Spannung (Potentialdifferenz) $U = E \cdot \ell$ hervorruft. Diese **Induktionsspannung** erreicht ihren stationären Endwert **U**, wenn die durch das elektrische Feld $\vec{E}$ bewirkte elektrische Kraft $\vec{F}_{el}$ auf die freien Elektronen mit der Ladung e_o dem Betrage nach genauso groß geworden ist wie die durch das magnetische Feld $\vec{B}$ hervorgerufene magnetische Ablenkkraft $\vec{F}_m$. Denn in diesem Gleichgewichtszustand werden in Richtung Stabende "**B**" keine weiteren Elektronen mehr verschoben.

► Für den Betrag der **magnetischen Kraft** $\vec{F}_m$, die das magnetische Feld $\vec{B}$ auf die mit dem Leiterstab mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ mitbewegte Elektronenladung e_o ausübt, gilt:

$$\boxed{F_m = B \cdot e_0 \cdot v}$$

► Für den Betrag der **elektrischen Kraft** $\vec{F}_{el}$, die das elektrische Feld $\vec{E}$ auf die relativ zum Stab zunächst ruhende Elektronenladung e_o ausübt, gilt:

$$\boxed{F_{el} = E \cdot e_0}$$

► Befinden sich die Kräfte $\vec{F}_{el}$ und $\vec{F}_m$ im **Gleichgewicht**, dann läßt sich folgende Gleichung aufstellen.
Die Elementarladung e_o läßt sich jetzt herauskürzen.

$$F_{el} = F_m$$
$$E \cdot e_0 = B \cdot e_0 \cdot v$$

► Gemäß der Formel **E = U/s** gilt mit der elektrischen Feldlinienlänge $s = \ell$ die Beziehung:

$$\frac{U}{\ell} = B \cdot v$$

► Daraus ergibt sich für die **Induktionsspannung** zwischen den Enden des Leiterstabes:

$$\boxed{U = B \cdot \ell \cdot v}$$

B ... magnet. Feldstärke (auch "Flußdichte" oder "Induktion") in T
ℓ ... die im Magnetfeld wirksame Stablänge in m
v ... Geschwindigkeit des Leiterstabes in m/s
U ... Spannung in V

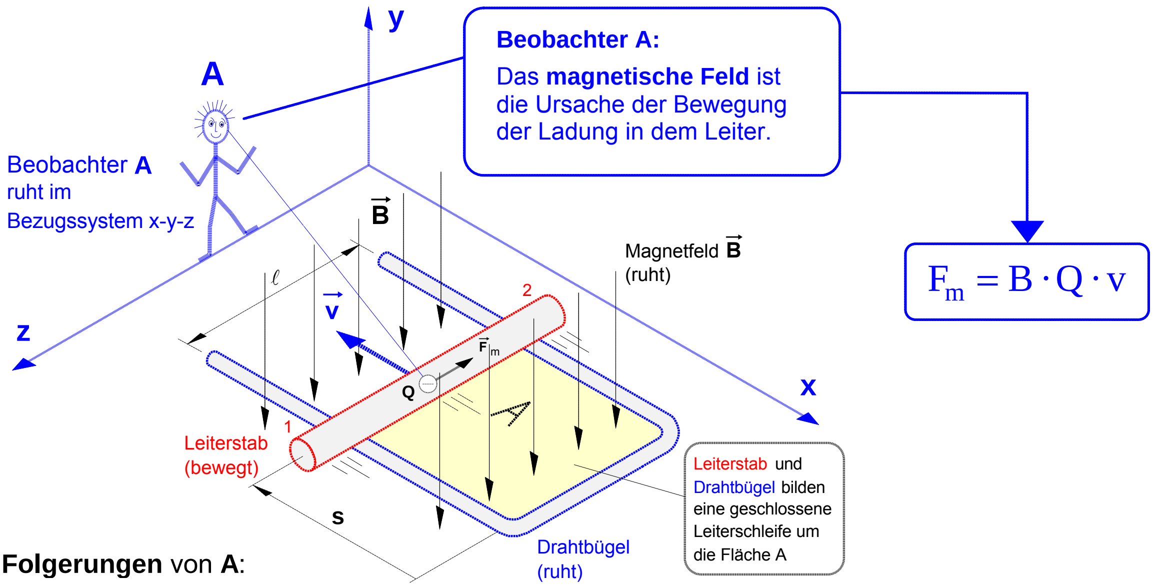
Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name:	Wt-2a.Doc - 16.04.04
Arbeitsblatt Nr. **2 a)** : **Relativität** der **Induktion** in einer Leiterschleife		Seite **1**

1. Gedankenexperiment zur **Induktion in einer Leiterschleife** aus der Sicht von **Beobachter A**

Annahme: In dem für ihn ruhenden **Bezugssystem x-y-z** mache Beobachter **A** folgende **Wahrnehmungen**:

a) Aus der Sicht von **A** ruht der Drahtbügel und der **Leiterstab** bewegt sich gleichförmig in dem ebenfalls ruhenden Magnetfeld $\vec{B}$. Dabei »schneidet« er die magnetischen Feldlinien.

b) Die **Ladung Q** bewegt sich innerhalb eines im Magnetfeld **bewegten Leiterstabes** (von 1 nach 2).



Folgerungen von **A**:

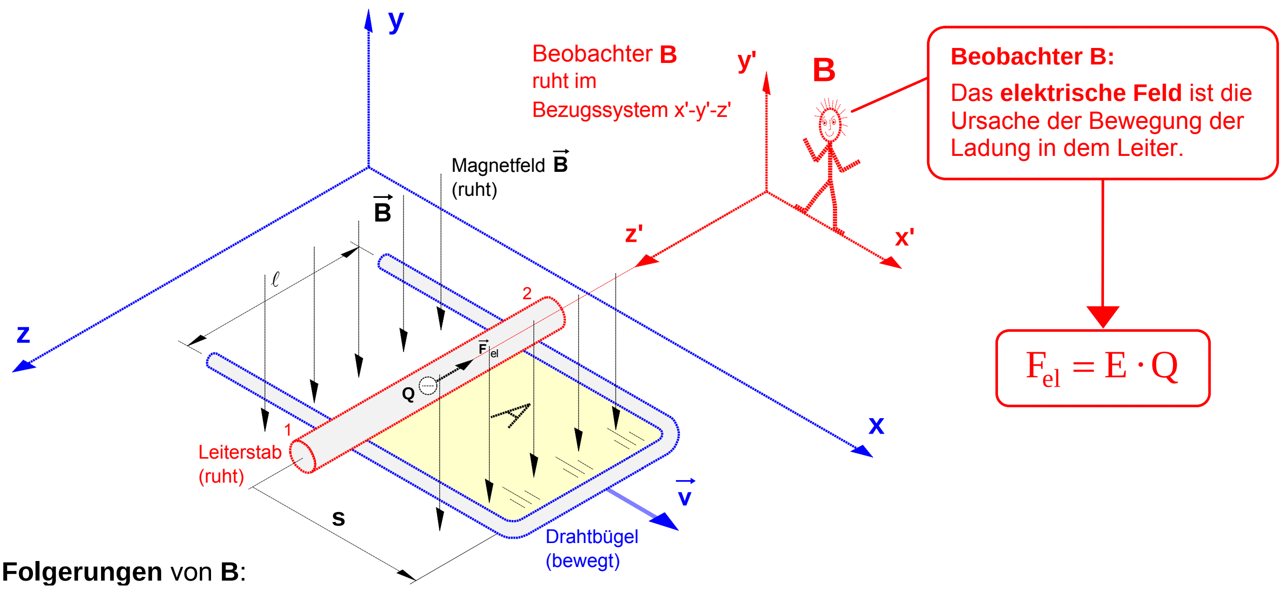
- Das (von dem bewegten Leiterstab »geschnittene«) **magnetische Feld** ist die **Ursache** der Ladungsbewegung in dem Leiterstab.
- Demnach ist die bewegende Kraft eine **magnetische Kraft F_m** (Lorentz-Kraft), die auf die mit dem Leiterstab mitbewegte Ladung $\vec{Q} \cdot \vec{v}$ wirkt.

2. Gedankenexperiment zur **Induktion in einer Leiterschleife** aus der Sicht von **Beobachter B**

Annahme: In dem für ihn ruhenden **Bezugssystem x'-y'-z'** mache Beobachter **B** folgende **Wahrnehmungen**:

a) Aus der Sicht von **B** bewegt sich der **Drahtbügel** gleichförmig in dem ruhenden Magnetfeld $\vec{B}$, während der Leiterstab **ruht** und damit auch keine magnetischen Feldlinien »schneidet«.

b) Die **Ladung Q** bewegt sich innerhalb eines **ruhenden Leiterstabes** (von 1 nach 2).



Folgerungen von **B**:

- Wenn in einem ruhenden Leiter eine zunächst ebenfalls ruhende Ladung **Q** in Bewegung gesetzt wird, muß in dem Leiterstab ein **elektrisches Feld** als **Ursache** dieser Ladungsbewegung vorhanden sein.
- Demnach ist die bewegende Kraft aus dieser Sicht eine **elektrische Kraft F_{el}**, die auf die in dem ruhenden Leiterstab zunächst ebenfalls ruhende Ladung **Q** wirkt.

3. Zusammenfassung: **Relativität der Ursachen der Ladungsbewegung in dem Leiter**

a) Problem

- Die Beobachter **A** und **B** geben für **ein** und **dieselbe Wahrnehmung,** nämlich für die Bewegung der Ladung **Q** in dem Leiterstab, **völlig unterschiedliche Ursachen** an. Für Beobachter **A** ist ein **magnetisches Feld** die Ursache der Ladungsbewegung, für Beobachter **B** hingegen ist ein **elektrisches Feld** in dem Stab die Ursache.
- Damit werden zugleich **ein** und **demselben Raum,** nämlich dem in der Umgebung der bewegten Ladung **Q**, in Abhängigkeit vom Beobachtungsstandpunkt **völlig verschiedene physikalischen Eigenschaften** zugesprochen. Für Beobachter **A** ist der Raum um die Ladung **Q** von einem **magnetischen Feld** erfüllt, für Beobachter **B** hingegen von einem **elektrischen Feld.**
- Das Problem, daß die jeweils wahrnehmbare Eigenschaft eines Raumes vom **Beobachtungsstandpunkt** abhängt, also nur stets **relativ** zum Bezugssystem des jeweiligen Beobachters bestimmt werden kann, war für Albert Einstein um 1900 einer der Ansatzpunkte zur Entwicklung der »Speziellen Relativitätstheorie«. (Vgl. dazu die beiden untenstehenden Texte.)

b) Frage: Was können **beide** Beobachter hinsichtlich der **Ursache** der Bewegung der Ladung **Q** in dem Leiterstab **gleichermaßen** feststellen ?

- Die Ladung **Q** bewegt sich in dem Leiter und damit entsteht eine meßbare **elektrische Spannung U** zwischen den Stabenden.
- Für **beide** Beobachter **ändert sich** die Fläche **A** und damit der von der Leiterschleife eingeschlossene **magnetische Fluß** F , denn gemäß $F = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ wird der Fluß auch von der Fläche mitbestimmt.
- Insofern können beide Beobachter gleichermaßen auch die **magnetische Flußänderung** $DF = F_2 - F_1$ **als Ursache** der Bewegung von Q und somit auch der **Induktionsspannung U** annehmen.

Damit ist freilich das oben beschriebene Problem keineswegs gelöst. Diese Annahme soll uns hier lediglich als Ansatzpunkt zur Entwicklung der feldtheoretischen Darstellung der Induktion im Sinne von FARADAY und MAXWELL dienen. Dazu mehr auf dem nächsten Arbeitsblatt.

„Der faszinierendste Gegenstand zur Zeit meines Studiums war die *Maxwellsche Theorie*", berichtete auch Albert EINSTEIN. Er blieb aber nicht bei der emotionalen Zustimmung, sondern blickte tiefer. So befaßte er sich mit physikalischen Vorgängen, bei denen die Gesetze der Elektrodynamik und zugleich die der Mechanik eine Rolle spielen. In der *Newtonschen Mechanik* hat man es mit Teilchen zu tun, in der *Maxwellschen Theorie* mit Feldern, weswegen man von einer Feldtheorie spricht: Den Bereich, in dem eine elektrische oder magnetische Kraft wirkt, nennt man ein elektrisches oder magnetisches Feld. Dabei ist, anders als in der *Newtonschen Physik*, die Energie kontinuierlich über alle Punkte des Feldes verteilt. Das wesentliche Neue in der *Maxwellschen Theorie* ist nun, daß sich ein Feld, etwa ein magnetisches beim Einschalten eines Stromes, nicht instantan aufbaut, sondern mit einer bestimmten Geschwindigkeit, kleiner oder höchstens gleich der Lichtgeschwindigkeit.
Da die *Newtonsche Theorie* der Mechanik auf die Vorstellung einer Fernwirkung, die *Maxwellsche Theorie* der Elektrodynamik auf die Vorstellung der Feld- oder Nahewirkung gegründet war, standen beide in einem prinzipiellen Widerspruch zueinander, der sich um die Wende zum 20. Jahrhundert auch physikalisch bemerkbar machte. „Es ist bekannt", so leitete Einstein seine berühmte Abhandlung von 1905 über die „Elektrodynamik bewegter Körper" ein, „daß die *Elektrodynamik* Maxwells ... in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen." Durch einfache Gedankenexperimente zeigte Einstein, daß es nicht die neue *Elektrodynamik* ist, die reformiert werden muß, sondern die auf Newton zurückgehende klassische Mechanik. So begründete er 1905 seine *Spezielle Relativitätstheorie*.

aus: A.Hermann, Die neue Physik, München 1979, S.8

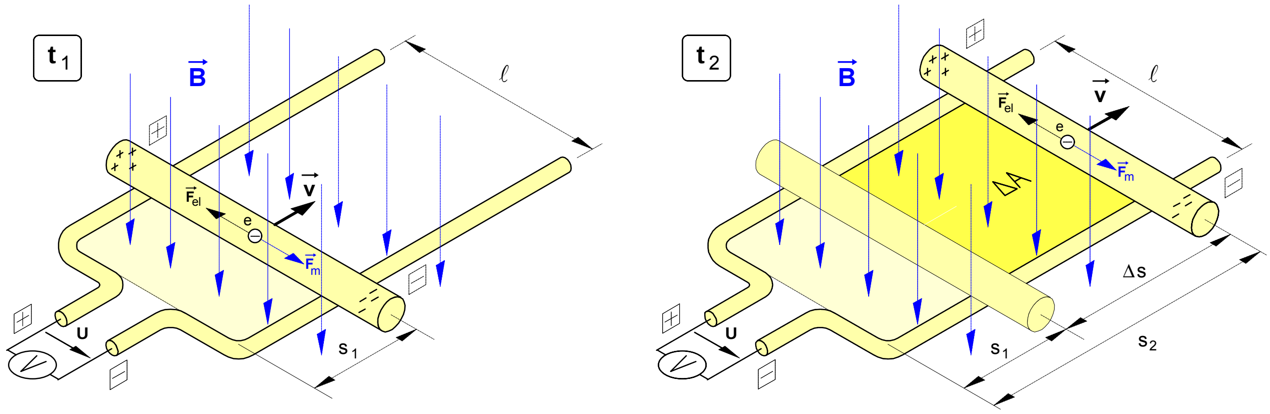
3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;*
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells – wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt – in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber – Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt – zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium" zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität" genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche ...

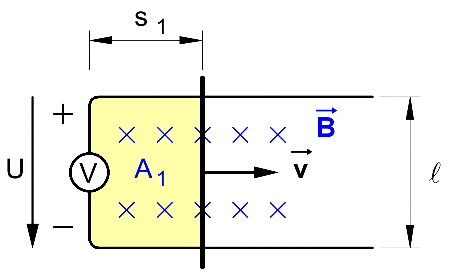
Erste Seite der berühmten Abhandlung Einsteins, mit der er die spezielle Relativitätstheorie begründete. aus: Annalen der Physik 17, IV. Folge, S. 891, Leipzig 1905, Nachdruck in: Lorentz/Einstein/Minkowski, Das Relativitätsprinzip, Darmstadt 1982, S.26 - 50

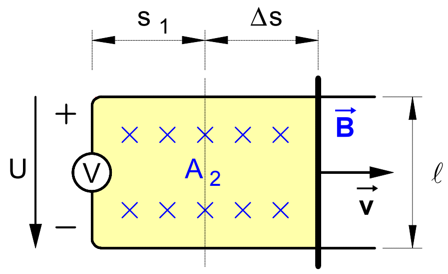
1. **Deutung** der **Induktionsspannung** als **Folge** einer magnetischen **Flußänderung**



Zeitpunkt t_1	$\Delta t = t_2 - t_1$	Zeitpunkt t_2

Zeitdauer





Flußänderung

$\Phi_1 = B \cdot A_1$	$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$	$\Phi_2 = B \cdot A_2$

Wird der Leiterstab mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ gemäß obiger Abbildung in einem Magnetfeld $\vec{B}$ bewegt, so wird in dem Stab eine Spannung **U** erzeugt. Da sich während der Bewegung die von dem Drahtbügel und dem Leiterstab eingeschlossene **Fläche A** und damit auch der von Bügel und Stab eingeschlossene **magnetische Fluß** Φ ändert, läßt sich die Entstehung der Induktionsspannung **U** nach **FARADAY** auch wie folgt deuten: Die **Änderung** des **magnetischen Flusses** in der aus Drahtbügel und Leiterstab gebildeten **Leiterschleife** ist die **Ursache** der in dem Leiterstab hervorgerufenen elektrischen **Spannung U**. Mit anderen Worten: Durch eine magnetische **Flußänderung** $\Delta\Phi$ in einer Leiterschleife wird in der Leiterschleife eine elektrische **Spannung U** "induziert".

2. **Herleitung** des **FARADAY**schen **Induktionsgesetzes** (MICHAEL FARADAY , 1831)

Deutet man die Entstehung der Induktionsspannung nach **FARADAY** als Folge der magnetischen Fluß**änderung** in der Leiterschleife und betrachtet man die aus Leiterstab und Drahtbügel gebildete Leiterschleife als eine Induktionsspule mit der Windungszahl N = 1 , dann läßt sich das Gesetz **U = B · ℓ · v** für den ***Sonderfall***, daß die Bewegung des Leiterstabes *gleichförmig* verläuft (v = const.), das Magnetfeld *homogen* ist (B = const.) und die Feldlinien *senkrecht* auf der Fläche A auftreffen, auf folgende Weise weiter verallgemeinern:

$U = N \cdot B \cdot \ell \cdot v$ mit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ wobei $\Delta s = s_2 - s_1$ und $\Delta t = t_2 - t_1$

$U = N \cdot B \cdot \ell \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$ mit $\ell \cdot \Delta s = \Delta A$ wobei $\Delta A = A_2 - A_1$

$U = N \cdot \frac{B \cdot \Delta A}{\Delta t}$ mit $B \cdot \Delta A = \Delta(B \cdot A) = \Delta\Phi$ wobei $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$

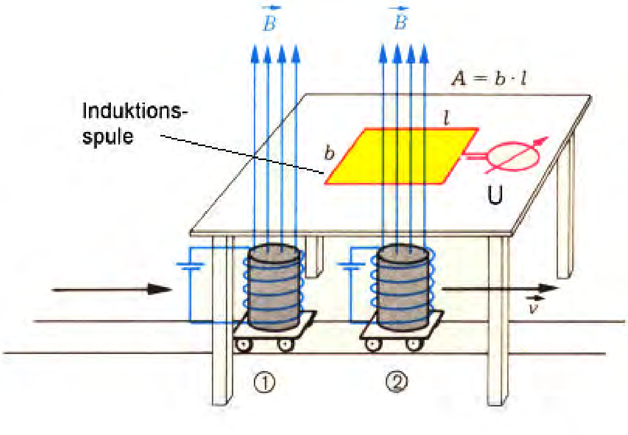
$$\boxed{U = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}$$

$\Delta\Phi$ ... magnetische Flußänderung in einer Spule oder Leiterschleife in Wb = Vs
Δt ... Zeitdauer, in der die Flußänderung erfolgt, in s
N ... Windungszahl der Spule (bei einer Leiterschleife ist N = 1)
U ... induzierte Spannung in V

3. **Induktion** der **»Bewegung«** und der **»Ruhe«**

Induktion der **Bewegung**

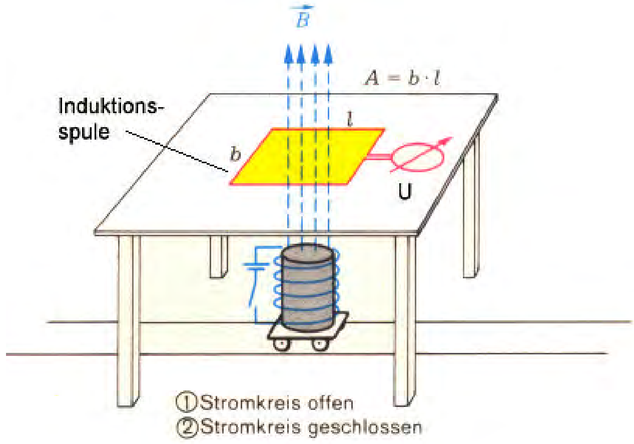
Fall 1: Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in der ruhenden Induktionsspule (N=1) wird durch die **Bewegung des Magnetfeldes B** des **fahrbaren** Elektromagneten bewirkt.



Zeitpunkt	Magnetfluß in der Induktionsspule	
① t_1	$\Phi_1 = 0$	Flußänderung: $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$
② t_2	$\Phi_2 = B \cdot A$	

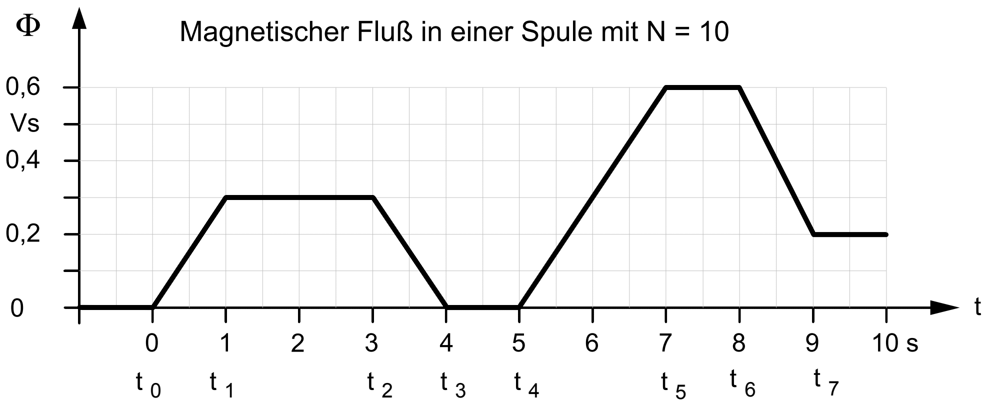
Induktion der **Ruhe**

Fall 2: Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in der ruhenden Induktionsspule (N=1) wird durch das **Einschalten des Magnetfeldes** B des **ruhenden** Elektromagneten bewirkt.



Zeitpunkt	Magnetfluß in der Induktionsspule	
① t_1	$\Phi_1 = 0$	Flußänderung: $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$
② t_2	$\Phi_2 = B \cdot A$	

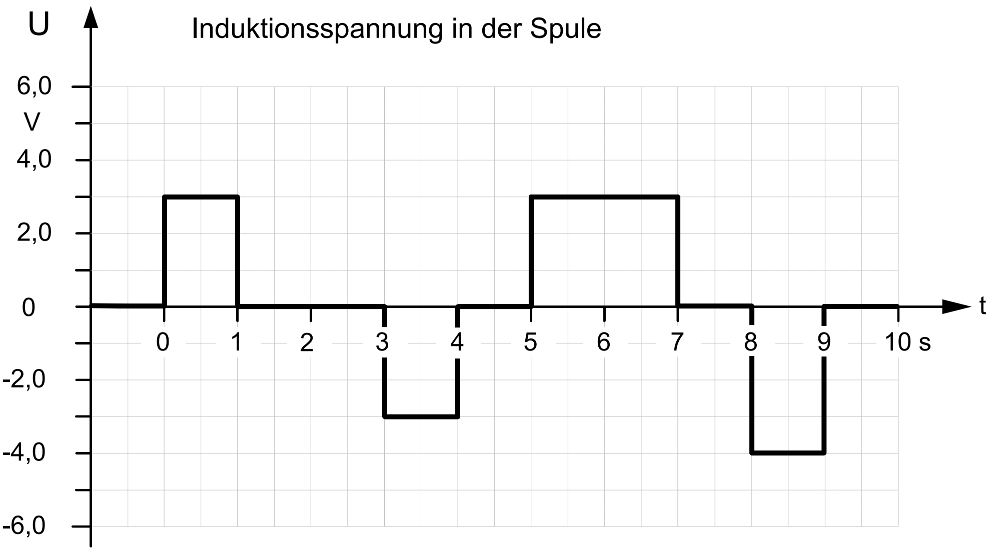
4. **Darstellung** von **Induktionsvorgängen** in **Zeitdiagrammen** (Beispiel)



Beispiel:

In einer Spule mit der Windungszahl N = 10 ändert sich der Magnetfluß gemäß nebenstehendem Zeitdiagramm.

Stellen Sie den Zeitverlauf der Induktionspannung in dem darunterstehenden Zeitdiagramm dar.



Induktionsgesetz :

$$\boxed{U = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}$$

wobei

$$\Delta\Phi = \Phi_n - \Phi_{n-1}$$

$$\Delta t = t_n - t_{n-1}$$

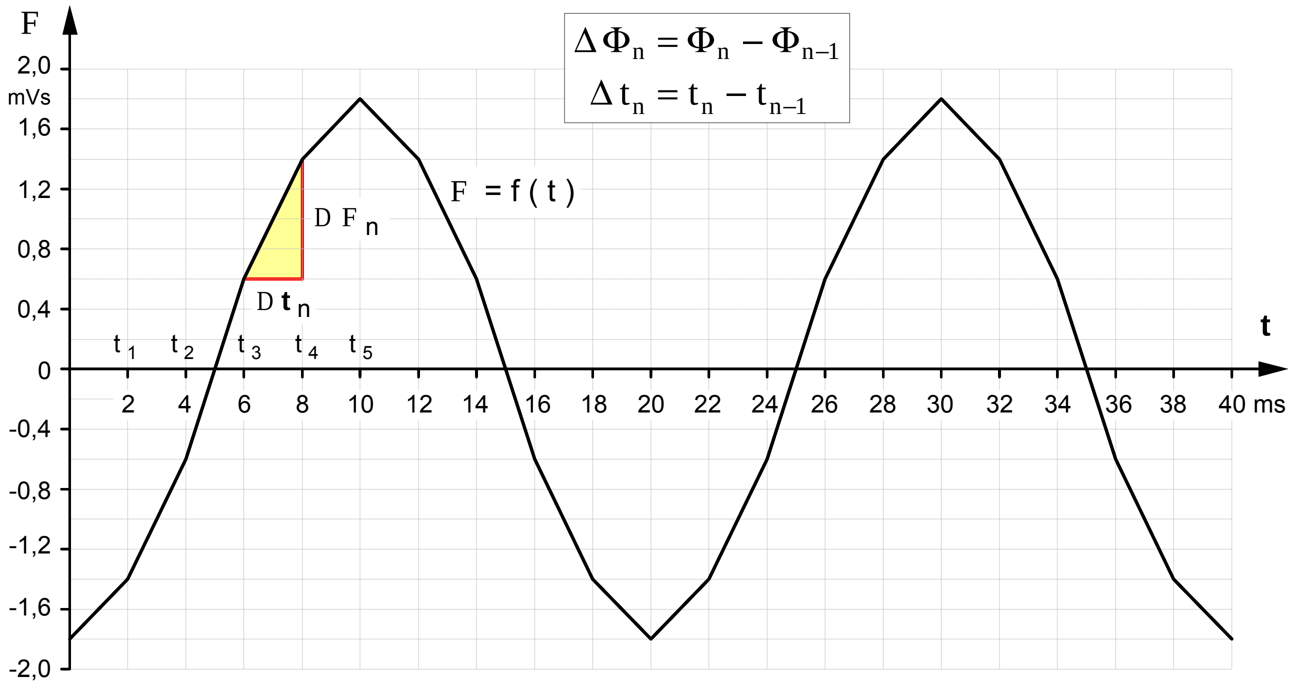
$$(\text{mit } n = 1, 2, 3 \ldots)$$

- **Übungsaufgabe** zur Darstellung von Induktionsvorgängen in Zeitdiagrammen

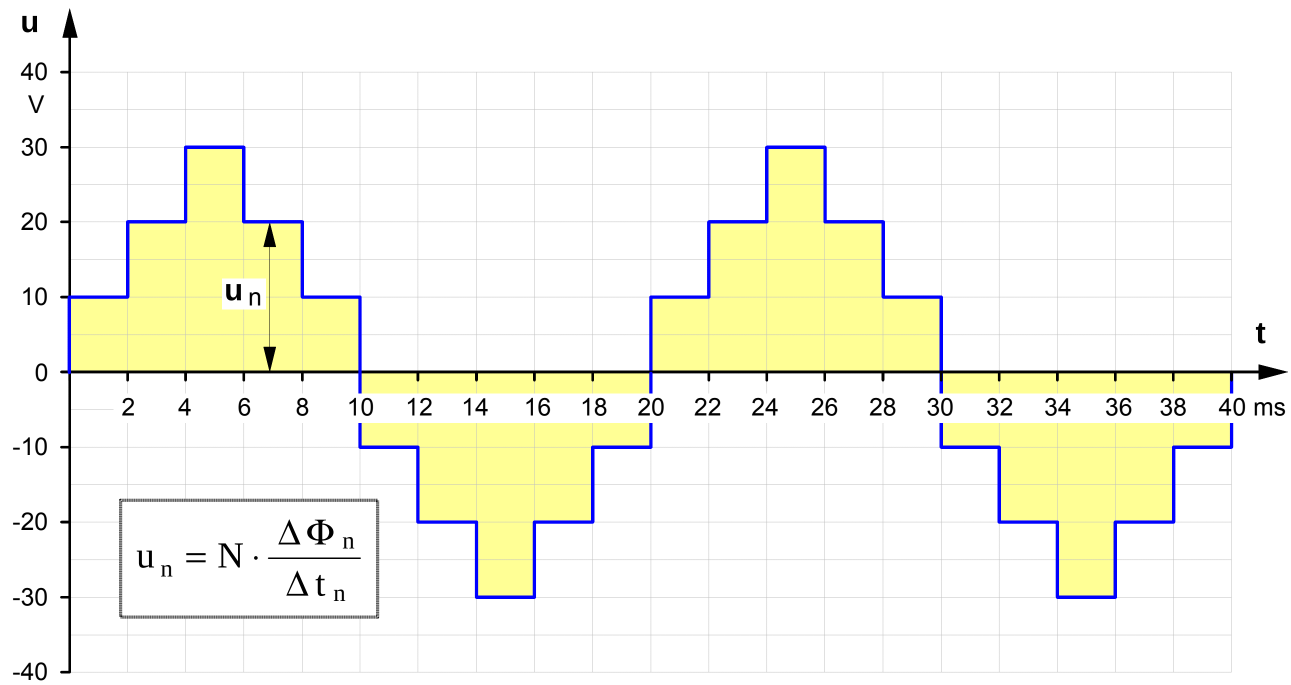
In einer Spule mit der Windungszahl **N = 50** ändert sich der **magnetische Fluß** F gemäß dem unter **a)** angegebenen Zeitdiagramm.

Stellen Sie im Zeitdiagramm **b)** den zeitlichen Verlauf der in der Spule **induzierten Spannung u** dar.

a) Zeitdiagramm des **magnetischen Flusses** in einer **Spule** mit N = 50



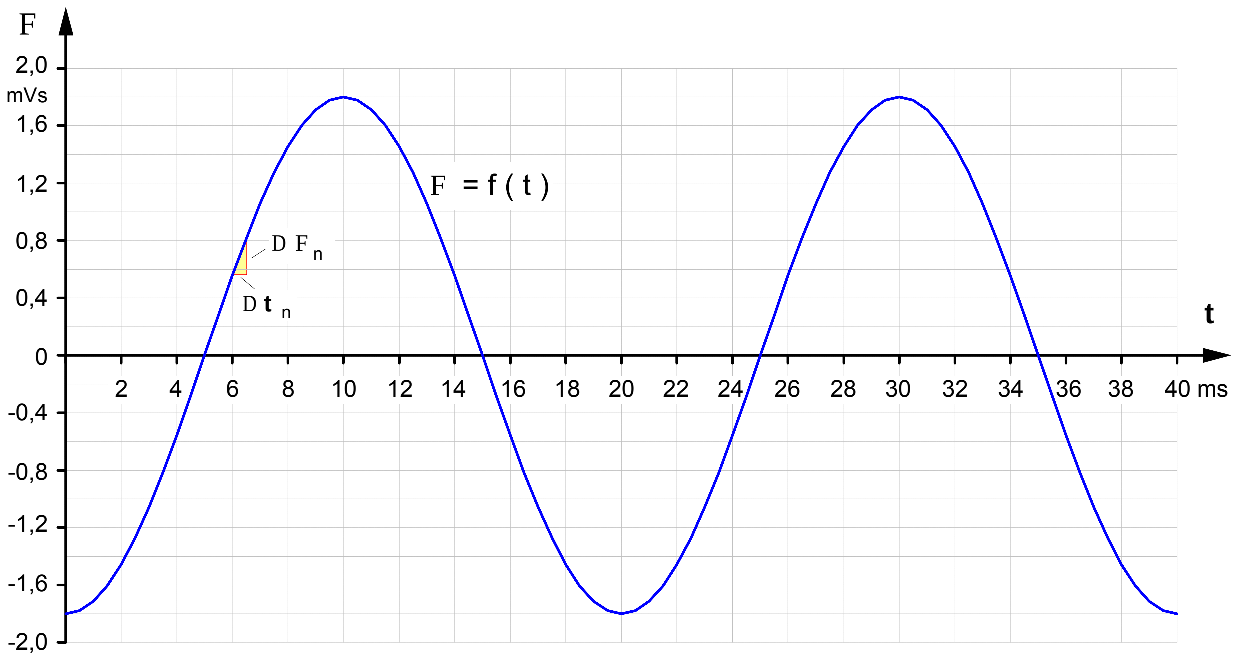
b) Zeitdiagramm der **Induktionsspannung** in der **Spule**



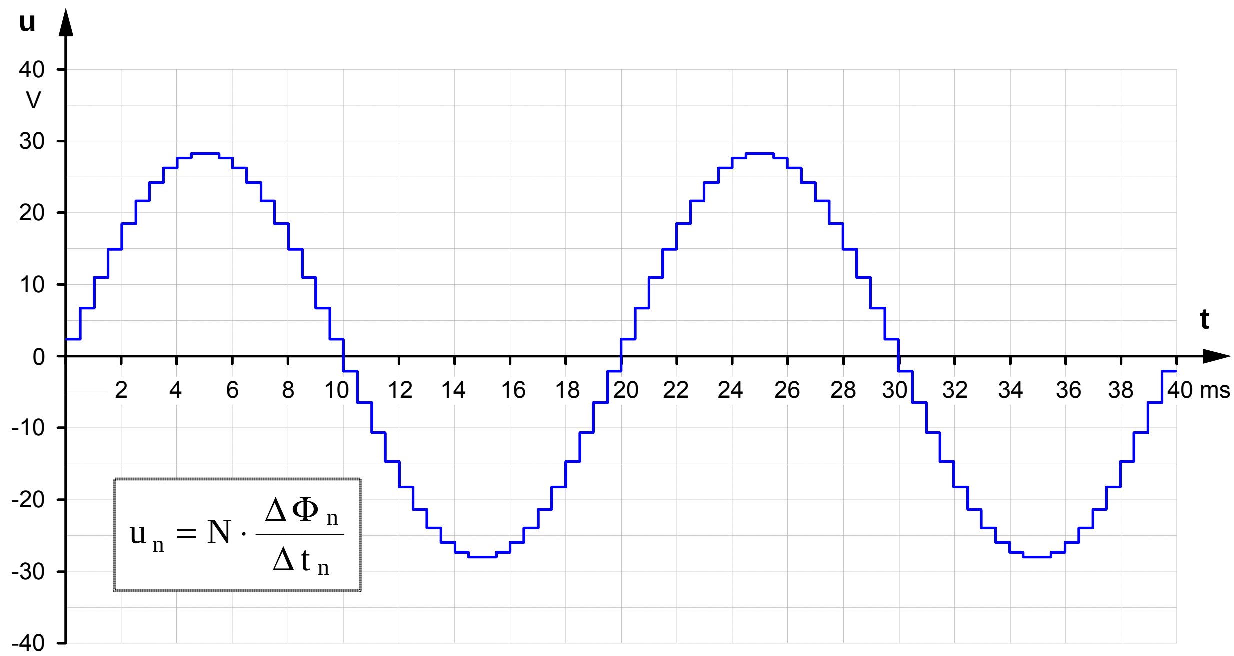
Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name: WT-3-3-B.DOC - 21.02.00
Folie: Ergänzende **Deutungen** und **Schlußfolgerungen** zur **Übungsaufgabe** von Arbeitsblatt Nr. **3**	

Der in der o.g. Übungsaufgabe dargestellte zeitliche Verlauf des magnetischen Flusses Φ = f (**t**) stellt eine abschnittsweise lineare Annäherung (**Approximation**) an eine **kosinusförmige Funktion** dar. Eine Betrachtung des zeitlichen Verlaufs der in der Spule induzierten Spannung legt die **Vermutung** nahe, daß **u** = f (**t**) eine Approximation an eine **sinusförmige Funktion** darstellen könnte – wenngleich auch eine recht ungenaue. In der Übungsaufgabe wurde ein Linearisierungs-intervall von Δ**t** = **2** ms gewählt. Zur Überprüfung der obigen Vermutung soll die Approximation an eine sinusförmige Funktion durch eine Verkleinerung des Linearisierungsintervalls auf Δ**t** = **0,5** ms verbessert werden und nach dem selben Verfahren der zeitliche Verlauf der induzierten Spannung bestimmt werden.

Φ **(t)** ≈ **–1.8** mVs **· cos (**ω·**t)** ω = const. mit [ω] = 1/s



Hinweis: Durch das recht kleine Linearisierungsintervall sind die einzelnen Abschnitte nicht mehr eindeutig zu erkennen.



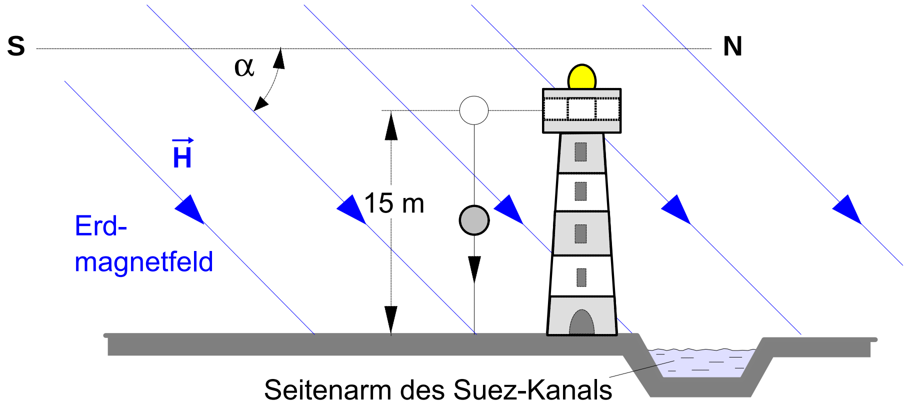
Jetzt ist der sinusförmige Spannungsverlauf schon deutlich zu erkennen: **u (t)** ≈ **28 V** · **sin (**ω·**t)**

Ein gedanklicher Übergang vom **Differenzenquotienten** zum **Differentialquotienten**, d.h. Δ**t** → **0** legt die begründete Vermutung (**Hypothese**) nahe:

> **Ändert** sich der **magnetische Fluß** in einer Spule gemäß einem **kosinusförmigen Zeitverlauf**, so wird durch Induktion eine **Spannung** mit einem **sinusförmigen Zeitverlauf** erzeugt.

Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name:	WT-3A-1.DOC - 22.04.03
Arbeitsblatt Nr. **3 a)** :	**Übungsaufgaben** zum **Induktionsgesetz**	Seite **1**

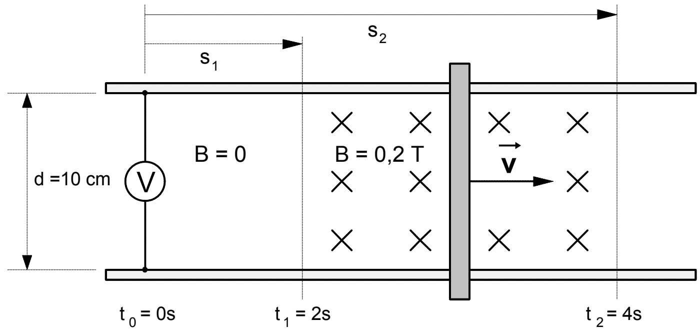
1. Von einem am Ufer eines Seitenarms des Suezkanals stehenden Leuchtturm wird ein in Ost-West-Richtung gehaltener Metallstab von **2** m Länge aus **15** m Höhe fallen gelassen. Die Totalintensität des Erdmagnetfeldes beträgt hier **H** = **31,2** A/m, der Inklinationswinkel α = **40**°.



Welche **Spannung** entsteht zwischen den Stabenden, wenn der Stab den Boden erreicht? [U =1,03 mV]

---

2. Ein Kupferstab wird gemäß nebenstehender Abbildung auf zwei Kupferschienen in 2 Sekunden gleichförmig quer durch das homogene Magnetfeld eines Dauermagneten (**B** = **0,2** T) mit einer Geschwindigkeit **v = 1,0** m/s bewegt.

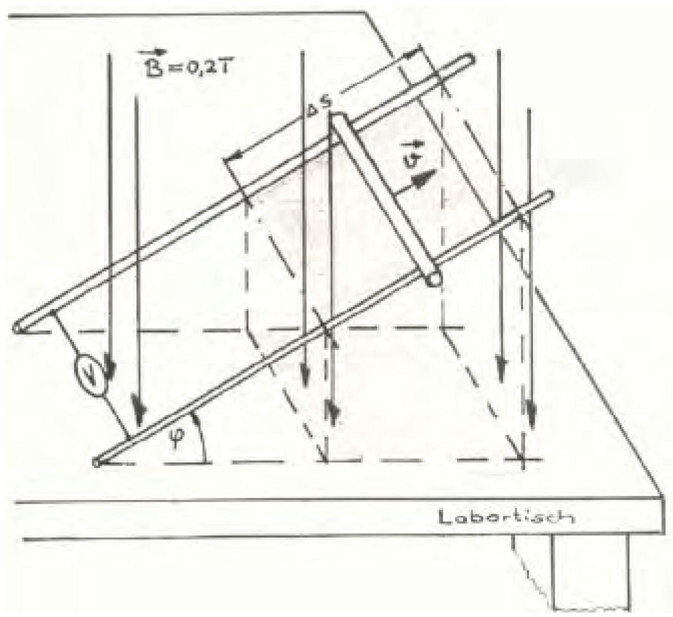


a) Wie groß ist die in dem Leiterstab induzierte Spannung**?** Geben Sie bitte zwei Lösungswege an**!** [U = 20 mV]

b) Stellen Sie den zeitlichen Verlauf des von der Leiterschleife eingeschlossenen Magnetflusses F und den Verlauf der Induktionsspannung **u** jeweils in einem maßstäblichen Zeitdiagramm dar.

---

3. Ein Kupferstab wird gemäß nebenstehender Abbildung auf zwei gegenüber dem Labortisch schräggestellten Kupferschienen (Winkel φ = **30**° ; Abstand **d** = **10** cm) mit einer Geschwindigkeit **v** = **2** m/s entlang eines Weges Δ**s** = **20** cm gleichförmig in einem homogenen Magnetfeld (**B** = **0,2** T) verschoben. Das Magnetfeld trifft senkrecht auf dem Labortisch auf.



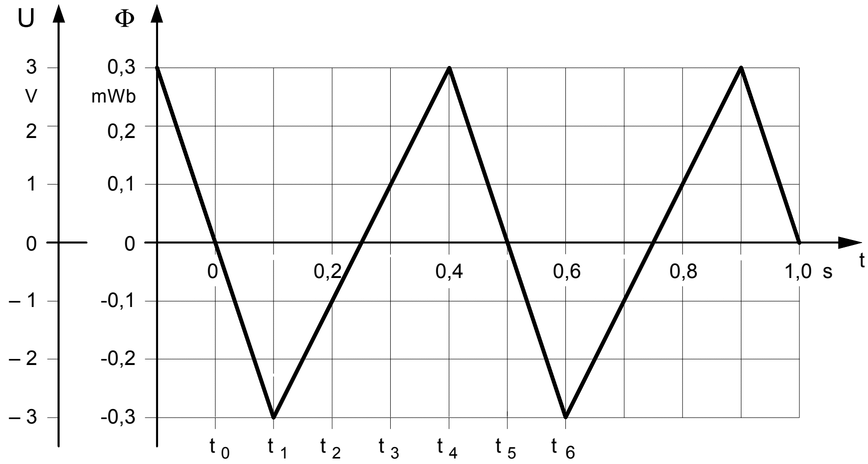
a) Berechnen Sie die in dem Leiterstab induzierte Spannung nach zwei Lösungsverfahren. [U = 34,6 mV]

b) Auf welchen Wert ändert sich die Induktionsspannung, wenn die Kupferschienen auf dem Labortisch liegen (d.h.: φ = **0**°) und das Experiment ansonsten unter gleichen Bedingungen wie in Aufgabe **a)** abläuft ? [U = 40 mV]

---

4. Ein Uhrwerk zieht einen **7** cm langen geraden Leiter innerhalb von **8** Sekunden quer durch ein homogenes Magnetfeld, das sich auf Fläche von **5** cm x **5** cm ausdehnt und dessen Flußdichte **0,62** Tesla beträgt. Welche Spannung entsteht während dieser Zeit in dem Leiter **?** [U = 0,194 mV]

5. Der magnetische Fluß F in einer Spule mit **500** Windungen ändert sich gemäß dem folgenden Zeitdiagramm.

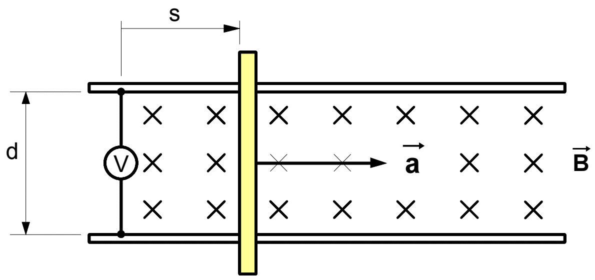


a) Berechnen Sie die **Induktionsspannung** in den Zeitpunkten $\mathbf{t_3}$ und $\mathbf{t_5}$. [$\mathbf{u_{t3}}$ = 1 V ; $\mathbf{u_{t5}}$ = –1,5 V]

b) Stellen Sie den zeitlichen Verlauf **u** =f (**t**) zwischen $\mathbf{t_o}$ und **t** = **1,0** s in dem obigen Zeitdiagramm dar.

---

6. Ein auf zwei Kupferschienen gleitender Kupferstab wird gemäß nebenstehender Abbildung mit einer konstanten Beschleunigung **a** = **0,5** m/s² in der angegebenen Richtung quer durch ein homogenes Magnetfeld mit der Feldstärke **B** = **0,2** T bewegt. Der Abstand der Kupferschienen beträgt **d** = **4** cm.



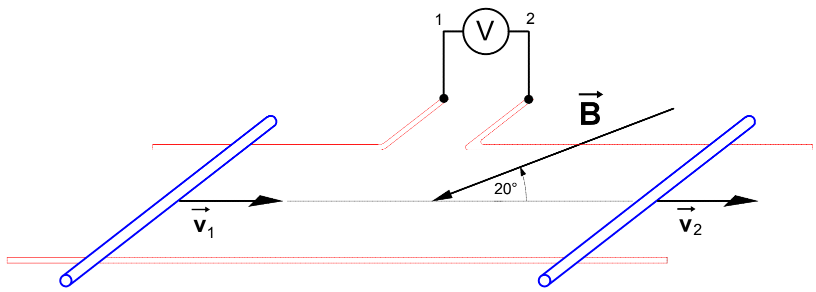
a) Stellen Sie für den Zeitraum von $\mathbf{t_o}$ = **0** bis **t** = **2** s den zeitlichen Verlauf F = f (**t**) des magnetischen Flusses dar, der von der aus den Schienen, dem Kupferstab und dem Meßinstrument gebildeten Leiterschleife eingeschlossen wird. [Φ (t) = 2 mV/s · t²]

b) Leiten Sie die Zeitgleichung **u** = f(**t**) für die während der Bewegung zwischen den Enden des Kupferstabes erzeugten Induktionsspannung her, und stellen Sie deren Zeitverlauf zwischen $\mathbf{t_o}$ = **0** bis **t** = **2** s in einem **u**–**t**–Diagramm dar. [**u** (t) = 4 mV/s · t]

---

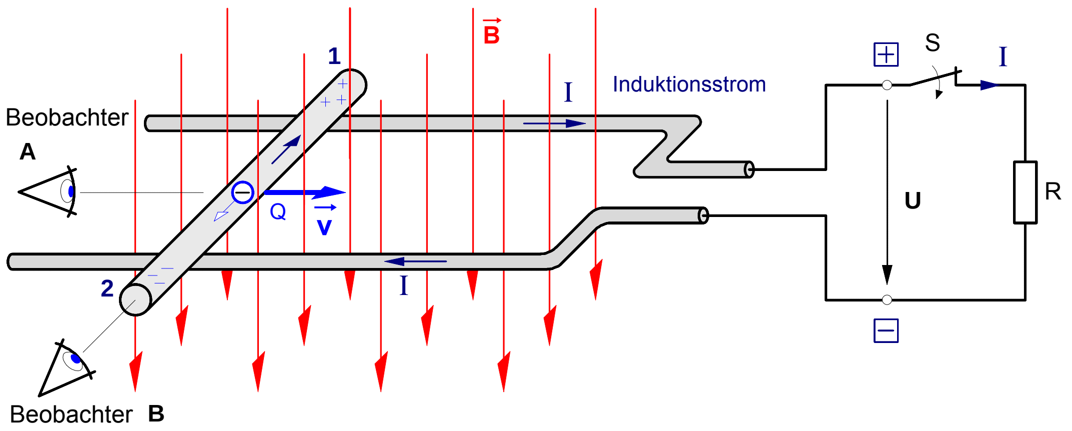
7. Ein homogenes Magnetfeld mit der Feldstärke **B** = **0,2** T ist unter dem Winkel b **= 20°** gegen die Ebene zweier Metallschienen geneigt.

Darauf gleiten zwei Kupferstäbe mit den Geschwindigkeiten $\mathbf{v_1}$ = **0,2** m/s und $\mathbf{v_2}$ = **0,5** m/s. Der Abstand der Schienen beträgt **d** = **30 cm**.



Berechnen Sie die zwischen den Klemmen 1 und 2 des Meßgerätes hervorgerufene Induktionsspannung $\mathbf{U_{12}}$. [U_{12} = – 6,16 mV]

Spannungsquelle (Generator) **Verbraucher**



1. Begründung der **Richtung der Induktionsspannung U** aus der Sicht von **Beobachter A** bei offenem Schalter S mit Hilfe des Feldlinienmodells

Wird der Leiterstab in der angegebenen Richtung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in dem Magnetfeld $\vec{B}$ bewegt, dann bewegt sich mit dem Stab die in ihm enthaltene leicht bewegliche **negative** Ladung **Q** (freie Elektronen) von dem Beobachter **A** weg. Um diese bewegte negative Ladung **Q** entsteht ein Magnetfeld $\vec{B}_Q$, das gegen den Uhrzeigersinn verläuft und sich dem Magnetfeld $\vec{B}$ überlagert. Die negative Ladung **Q** (freie Elektronen) wird durch eine magnetische Kraft in Richtung der Feldschwächung zum Stabende "2" abgelenkt. Am Stabende "2" sammelt sich die negative Ladung (Elektronenüberschuß) , am Stabende "1" hingegen bleibt eine positive Ladung (Elektronenmangel) zurück. Zwischen den beiden Stabenden ist eine von "1" nach "2" gerichtete **Induktionsspannung U** entstanden.

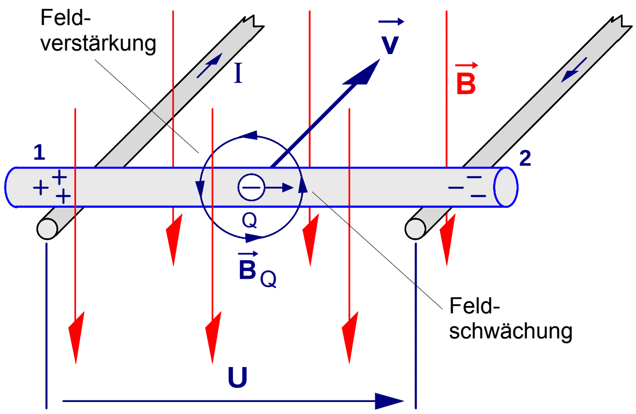


Bild 1 : Der im Magnetfeld bewegte Leiterstab aus der Sicht von Beobachter **A**

2. Begründung der **Richtung** des **Induktionsstromes** I aus der Sicht von **Beobachter B** bei geschlossenem Schalter S mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes

Wird der Schalter S geschlossen, so bilden die Spannungsquelle und der Verbraucherwiderstand R einen geschlossenen Stromkreis. Solange der Leiterstab in dem Magnetfeld $\vec{B}$ bewegt wird, entsteht gemäß Punkt **1.** eine Induktionsspannung **U** und in dem durch den Schalter geschlossenen Stromkreis fließt ein Induktionsstrom I. Im Sinne der technischen Stromrichtung **muß** dieser Induktionsstrom I von dem Beobachter **B** wegfließen. **Denn** nur unter dieser Voraussetzung entsteht um den Induktionsstrom I ein im Uhrzeigersinn verlaufendes Magnetfeld $\vec{B}_I$, das schließlich durch Überlagerung mit dem Magnetfeld $\vec{B}$ dafür sorgt, daß auf den Leiterstab eine nach links gerichtete, also gegen die ihn bewegende mechanische Kraft $\vec{F}$ gerichtete magnetische Kraft $\vec{F}'$ wirkt. **Wäre** der Induktionsstrom entgegengesetzt gerichtet, dann könnte nach einem kurzen Impuls die bewegende mechanische Kraft $\vec{F}$ entfallen, denn der Induktionsstrom würde dann mit seinem ebenfalls umgekehrten Magnetfeld $\vec{B}_I$ eine nach rechts gerichtete magnetische Kraft $\vec{F}'$ bewirken, die den Stab ohne äußeres Zutun weiter durch das Magnetfeld $\vec{B}$ bewegen würde; elektrische Energie würde »aus dem Nichts« entstehen, unsere Spannungsquelle wäre ein elektrisches »**perpetuum mobile**«. Dies jedoch widerspräche dem Energieerhaltungssatz.

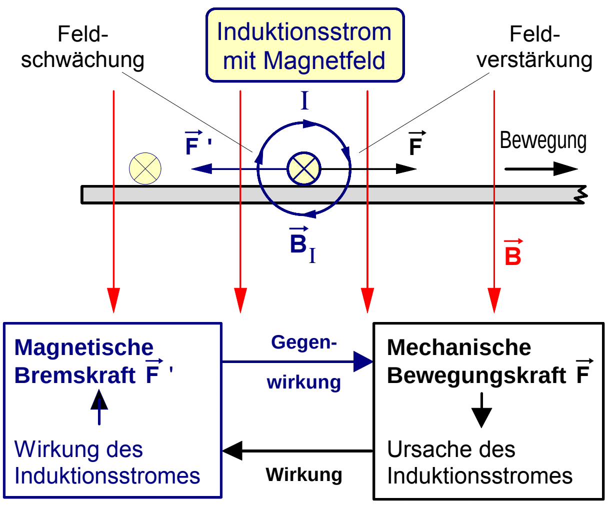


Bild 2 : Der im Magnetfeld bewegte Leiterstab aus der Sicht von Beobachter **B**

3. **Energieumwandlung** bei der **Induktion** in einem im Magnetfeld bewegten **Leiterstab**

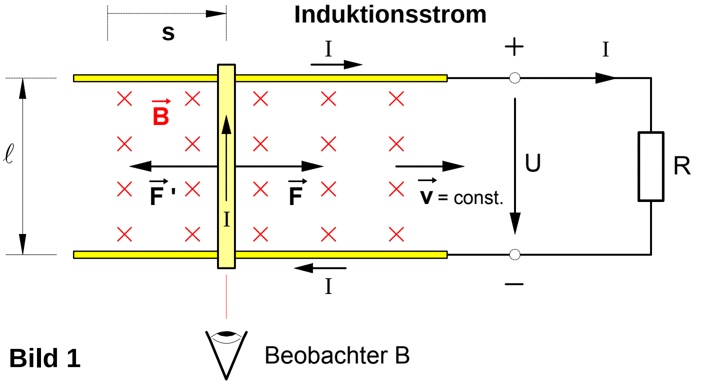


Bild 1

Der im Magnetfeld bewegte Leiterstab aus der Sicht des Beobachters B :

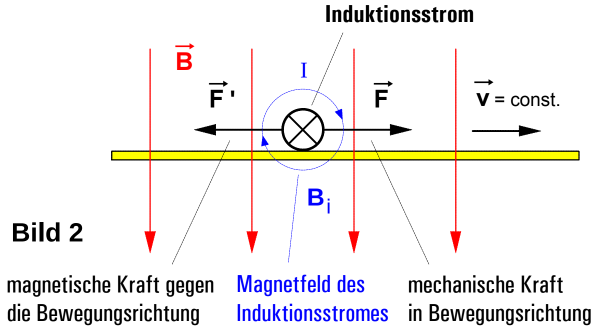


Bild 2

Um den Leiterstab in der angegebenen Richtung in der Zeit **t** unter dem Einfluß der bewegenden mechanischen Kraft $\vec{F}$ entlang des Weges **s** in dem Magnetfeld $\vec{B}$ zu bewegen, muß an dem Stab eine **mechanische Arbeit** W_{mech} verrichtet werden.

$$\boxed{W_{mech} = F \cdot s}$$

Bei dem dadurch verursachten Induktionsvorgang entsteht in dem geschlossenen Stromkreis eine Induktionsspannung **U** und ein Induktionsstrom I. Während der Strom durch den Stromkreis fließt, wird in der Zeit **t** an den in dem Stromkreis strömenden elektrischen Ladungen eine **elektrische Arbeit** $W_{el} = U \cdot I \cdot t$ verrichtet. In der nebenstehenden Darstellung soll nun gezeigt werden, daß diese **elektrische Arbeit** gemäß dem Energierhaltungssatz **genauso groß ist wie die** an dem Stab verrichtete **mechanische Arbeit**.
Wir wollen dabei annehmen, daß der Stab **gleichförmig** und geradlinig, also mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch das Magnetfeld bewegt werde. Dies setzt nach dem Trägheitsprinzip voraus, daß die **in** Bewegungsrichtung wirkende **mechanische Kraft** $\vec{F}$ dem Betrage nach so groß ist wie die durch das Magnetfeld des Induktionsstromes hervorgerufene und **gegen** die Bewegungsrichtung wirkende **magnetische Kraft** $\vec{F}\,'$.

$$W_{el} = U \cdot I \cdot t \qquad \text{mit} \qquad U = B \cdot \ell \cdot v$$
$$= B \cdot \ell \cdot v \cdot I \cdot t \qquad \text{mit} \qquad B = \frac{F'}{I \cdot \ell}$$
$$= \frac{F'}{I \cdot \ell} \cdot \ell \cdot v \cdot I \cdot t \qquad \text{mit} \qquad v = \frac{s}{t}$$
$$= F' \cdot \frac{s}{t} \cdot t$$
$$= F' \cdot s \qquad \text{mit} \qquad F' = F$$
$$\underline{\underline{W_{el} = F \cdot s = W_{mech}}} \qquad \text{q.e.d.}$$

4. LENZsches **Gesetz** zur Bestimmung der Richtung des **Induktionsstromes** (EMIL LENZ , 1834)

Die vorangegangenen Überlegungen zur Energieumwandlung bei Induktionsvorgängen und zur Bestimmung der Richtung des Induktionsstromes lassen sich in allgemeiner Form in dem von dem russischen Physiker Emil Lenz (1804-1865) im Jahre 1834 formulierten **Lenzschen Gesetz** wie folgt zusammenfassen:

> Der in elektrischen Leitern bewirkte **Induktionsstrom ist stets so gerichtet**, daß er mit seinem Magnetfeld **seiner eigenen Ursache** (d.h. also der Bewegung bzw. der Flußänderung) **entgegenwirkt**.

- **Beispiele** zur Bestimmung der Richtung des Induktionsstromes

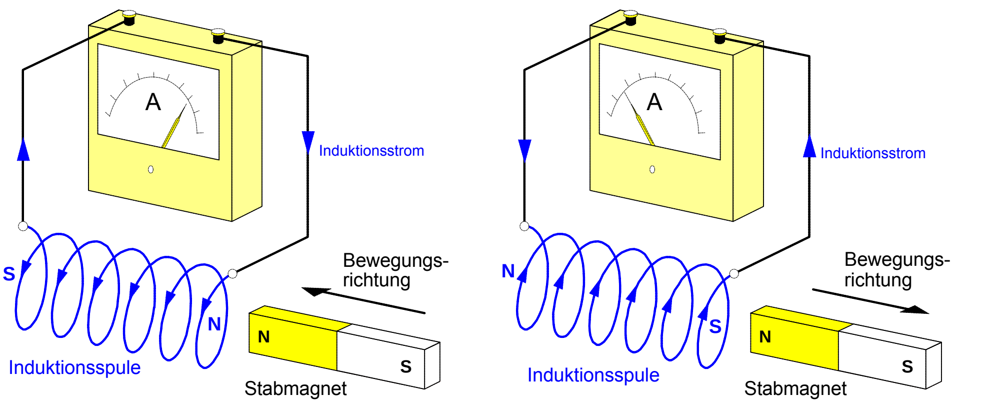


Bild 3: Bewegung eines Stabmagneten in der Umgebung einer Induktionsspule

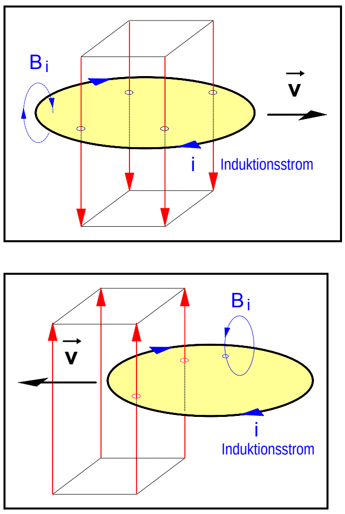


Bild 4: Bewegung einer Leiterschleife in einem Magnetfeld

Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name:	WT-5-F.DOC - 27.04.03
Arbeitsblatt Nr. **5** : **Thomsonscher Ringversuch** (1889) –nach Elihu Thomson (1853-1937)–		

1. Versuchsaufbau

Erregerspule
mit Eisenkern zur
Magnetfelderzeugung

Aluminium-Ring
als kurzgeschlossene
Induktionsspule (N = 1)

2. **Beobachtungen** während des Versuchs

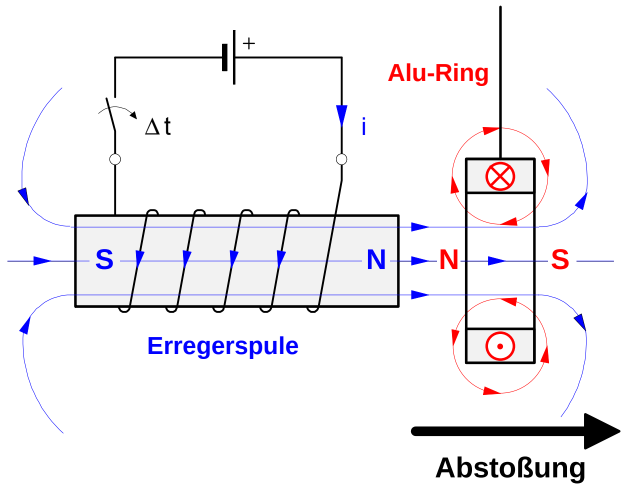
Der als Pendel an einem Faden aufgehängte Aluminium-Ring dient als **kurzgeschlossene Induktionspule** mit der Windungszahl **N = 1**.

- Beim **Einschalten** des Stromes in der Erregerspule wird der Aluminium-Ring kurzzeitig von der Spule **abgestoßen** ,
- beim **Ausschalten** des Stromes wird er hingegen **angezogen** .

Bei umgekehrter Richtung des Erregerstromes lassen sich die **gleichen** Vorgänge beobachten.

3. **Erklärung** des Ringversuchs mit Hilfe der **Lenzschen Regel**

a) Ein-Schaltvorgang: **Abstoßung** des Ringes



· **Ursache** :

Während des Einschaltens des Erregerstromes nimmt der magnetische Fluß im Inneren des Aluminium-Ringes sehr rasch **zu** .

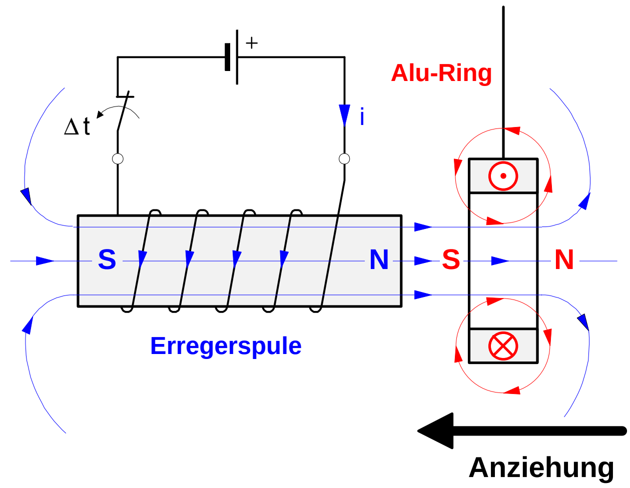
· **Wirkung** :

In der kurzgeschlossenen Induktions-spule (Alu-Ring) entsteht eine Induk-tionsspannung und ein Induktionsstrom. Dessen Magnetfeld ist so gerichtet, daß es seiner Ursache, nämlich der

Fluß **z u n a h m e** ,

entgegenwirkt (Lenzsche Regel).

b) Aus-Schaltvorgang: **Anziehung** des Ringes



· **Ursache** :

Während des Ausschaltens des Erregerstromes nimmt der magnetische Fluß im Inneren des Aluminium-Ringes sehr rasch **ab** .

· **Wirkung** :

In der kurzgeschlossenen Induktions-spule (Alu-Ring) entsteht eine Induk-tionsspannung und ein Induktionsstrom. Dessen Magnetfeld ist so gerichtet, daß es seiner Ursache, nämlich der

Fluß **a b n a h m e** ,

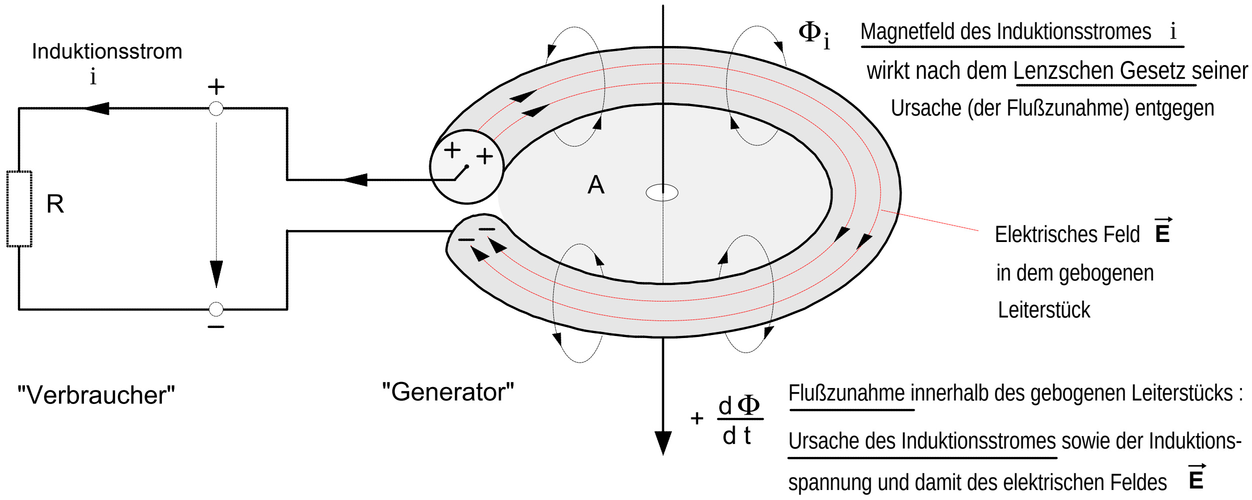
entgegenwirkt (Lenzsche Regel).

· Zum Inhalt der II. Maxwell-Gleichung :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Ein **zeitlich** sich änderndes **magnetisches Feld** (rechte Seite der Gleichung) ruft stets ein **elektrisches Wirbelfeld** (linke Seite der Gleichung) hervor.

1. Induktion in einer Leiterschleife :

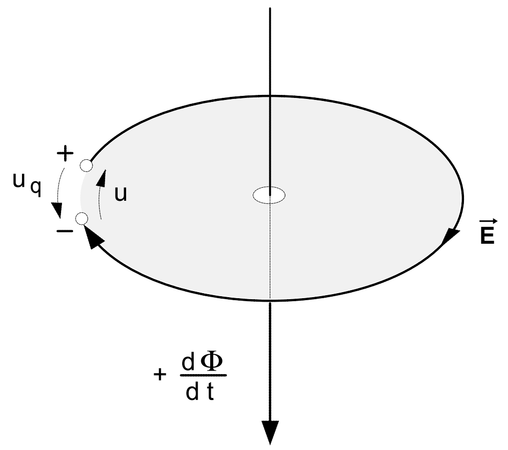


2. Das **elektrische Feld** in dem gebogenen Leiterstück bei **offenen** Anschluß-klemmen :

Das elektrische Feld $\vec{E}$ *erscheint als **Quellenfeld**,*

⇩

***tendenziell** handelt es sich jedoch bereits um ein elektrisches Wirbelfeld.*



u_q ... **Quellenspannung** des "Generators" ("technische Spannungsrichtung")

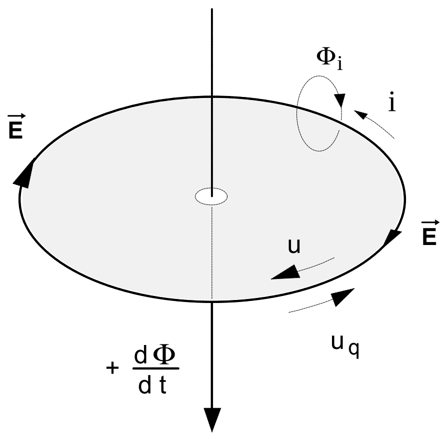
u ... Induktionsspannung in **Richtung** des **elektrischen Feldes** $\vec{E}$

$$u_q = -u$$

⇩

3. Das **elektrische Feld** in dem gebogenen Leiter-stück bei **geschlossenen** Anschlußklemmen :

Das elektrische Feld $\vec{E}$ *ist ein **Wirbelfeld**, das auch **ohne** ein materielles Leiterstück (also auch im Vakuum) durch ein sich änderndes magnetisches Feld entstehen kann.*



- Induktionsgesetz:

$$u = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

oder mit der

- Quellenspannung:

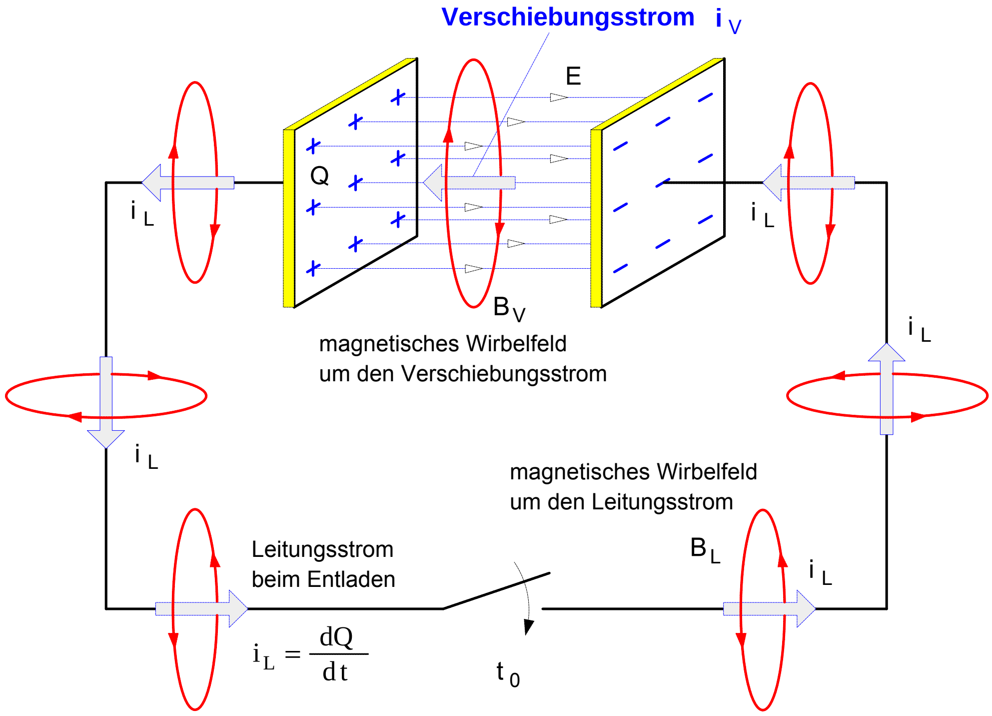
$$u_q = +N\frac{d\Phi}{dt}$$

Ausblick: Ist das **elektrische Wirbelfeld** ebenfalls einer **zeitlichen Änderung** unterworfen, so wirkt es wie der Induktionsstrom i, d.h. es ruft ein **zeitlich sich änderndes magnetisches Wirbelfeld** hervor (Inhalt der I. Maxwellgleichung), das seinerseits wiederum ein **zeitlich sich änderndes elektrisches Wirbelfeld** erzeugt usw. Aufgrund dieser Prinzipien konnte Maxwell die Möglichkeit der räumlichen Ausbreitung elektrischer Energie auch **Vakuum** in Form **elektromagnetischer Wellen** voraussagen.

● Der Maxwellsche Verschiebungsstrom

$$i_L = \frac{dQ}{dt}$$

Der geladene Kondensator in der folgenden Abbildung entlädt sich, sobald der Schalter S geschlossen worden ist. Im Sinne der technischen Stromrichtung strömt dabei in einem beliebigen Zeitabschnitt **dt** eine positive Ladung **dQ** von der linken Platte durch die Verbindungsleitung zur rechten Platte. Die in der Verbindungs**leitung** strömende Ladung **dQ/dt** stellt einen elektrischen Strom dar. Diesen Strom bezeichnet Maxwell als **Leitungsstrom** i_L . Um diesen Leitungsstrom i_L bzw. die strömende Ladung **dQ/dt** entsteht ein **magnetisches Wirbelfeld** B_L . Da sich zwischen den Platten kein elektrischer Leiter befindet, endet dieser Leitungsstrom an der rechten Platte. Dieser Sachverhalt widerspricht der Vorstellung, daß ein elektrischer Strom nur in einem **geschlossenen** Stromkreis fließen kann.



Der Leitungsstrom i_L bewirkt in jedem beliebigen Zeitabschnitt **dt** auf den **Kondensatorplatten** eine Ladungsänderung **dQ** . Die Geschwindigkeit, mit der sich diese Ladungsänderung vollzieht, läßt sich ebenfalls mit dem Quotienten **dQ/dt** beschreiben. Mit dieser **Ladungsänderung** *auf* den Kondensatorplatten verbunden ist eine **Änderung des elektrischen Feldes** *zwischen* den Kondensatorplatten: das elektrische Feld wird abgebaut, d.h. die elektrische Erregung **D**, die elektrische Feldstärke **E** und damit der elektrische Feldfluß Φ_{el} werden im Verlauf des Entladevorganges immer kleiner. Mit $Q = D \cdot A$ und $D = \varepsilon_0 \cdot E$ läßt sich diese zeitliche Änderung des elektrischen Feldes im Zusammenhang mit der Ladungsänderung **dQ/dt** wie folgt beschreiben:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d(D \cdot A)}{dt} \quad \text{mit} \quad D = \varepsilon_o \cdot E \quad \text{(elektrischer Erregung)}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d(\varepsilon_o \cdot E \cdot A)}{dt} \quad \text{mit} \quad E \cdot A = \Phi_{el} \quad \text{(elektrischer Feldfluß)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} = \varepsilon_o \cdot \frac{d\Phi_{el}}{dt}}$$

► Schlußfolgerungen Maxwells:

1. Wenn der Ausdruck **dQ/dt** auf der *linken Seite* der Gleichung einen elektrischen **Strom** darstellt, kann auch der Ausdruck auf der *rechten Seite* als "Strom" gedeutet werden. Diesen "Strom", der gemäß der rechten Seite der Gleichung **als zeitlich sich änderndes elektrisches Feld** (genauer: als Änderung des elektrischen Feldflusses) bestimmt ist und der damit keines materiellen Leiters bedarf, hat Maxwell als "Verschiebungsstrom" bezeichnet. Betrachtet man den Verschiebungsstrom als Fortsetzung des Leitungsstromes, so ist der Stromkreis auch in diesem Fall geschlossen. Der **Verschiebungsstrom** i_v ist demnach wie folgt bestimmt:

$$\boxed{i_v = \varepsilon_o \cdot \frac{d\Phi_{el}}{dt}}$$

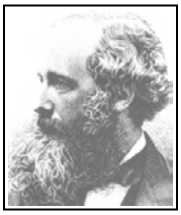
Wobei $\Phi_{el} = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$ ist (siehe Arbeitsblatt **6 a)**, Lehrgang Elektrotechnik **1**).

2. Wenn ein **zeitlich sich änderndes elektrisches Feld** physikalisch gesehen das gleiche ist wie ein **elektrischer Strom**, dann muß nach Maxwell wie bei jedem anderen Strom auch um ein zeitlich sich änderndes elektrisches Feld ein **magnetisches Wirbelfeld** B_V entstehen.

Die MAXWELLSCHEN Gleichungen

In seinem 1873 erschienen Hauptwerk "*A Treatise on eletricity and magnetism*" (*Abhandlungen über die Elektrizität und den Magnetismus*) schreibt **JAMES CLERK MAXWELL** (1831-1879) :

„Ich habe dieses Werk speziell in der Hoffnung unternommen, daß es mir gelingen könnte, **FARADAYS** Ideen und Methoden mathematischen Ausdruck zu verleihen.“ Seine Prinzipien zur Erklärung sämtlicher elektrischer und magnetischer Erscheinungen faßte **MAXWELL** in den folgenden vier Gleichungen zusammen.



J.Cl. Maxwell

I. Maxwell-Gleichung (Über die Erzeugung *magnetischer* Wirbelfelder)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o \cdot \varepsilon_o \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} + \mu_o \cdot \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

$\varepsilon_o \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = I_V \Rightarrow$ **Verschiebungsstrom**

$\int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = I_L \Rightarrow$ **Leitungsstrom**

Ist der Verschiebungsstrom $I_V = 0$, so ergibt sich :

$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_o} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = I_L \Rightarrow$ **Durchflutungssatz**

$\vec{S}$ ... Stromdichte $\vec{E}$ ... elektr. Feldstärke $\vec{B}$ ... magnet. Feldstärke

Ein **magnetisches Wirbelfeld** wird erzeugt sowohl durch einen **Leitungsstrom** als auch durch ein **zeitlich sich änderndes elektrisches Feld**. Ein zeitlich sich änderndes elektrisches Feld bezeichnet Maxwell als **Verschiebungsstrom**.

II. Maxwell-Gleichung (Über die Erzeugung *elektrischer* Wirbelfelder)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

mit $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = u$ und $\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \Phi$ ergibt sich

$u = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow$ **Induktionsgesetz**

Ein **elektrisches Wirbelfeld** wird erzeugt durch ein **zeitlich sich änderndes magnetisches Feld**.

III. Maxwell-Gleichung (Über die Erzeugung *elektrischer Quellen*felder)

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_V \rho \, dV$$

$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Phi_{el} \Rightarrow$ elektrischer Feldfluß

$\int_V \rho \, dV = Q \Rightarrow$ ruhende elektrische Ladung (ρ...Raumladungsdichte)

$\Phi_{el} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q \Rightarrow$ **Gaußscher Satz**

mit $\Phi_{el} = \vec{E} \cdot \vec{A}$ und $\frac{Q}{\vec{A}} = \vec{D}$ ergibt sich :

$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \Rightarrow$ **Grundgesetz der Elektrostatik**

Ruhende elektrische Ladungen erzeugen in dem Raum in ihrer Umgebung ein **elektrisches Quellenfeld**.

IV. Maxwell-Gleichung (Über die Form magnetischer Felder)

$$\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

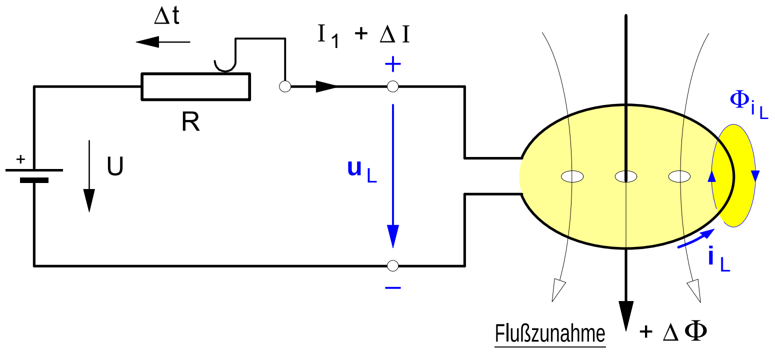
Magnetische Felder sind stets **quellenfreie Wirbelfelder**.

Quelle: W.Kuhn: Physik - Band III C : Felder und Ladungen, Braunschweig 1974, S. 124 f.

Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK** | Name: | WT-7-1-L.DOC - 27.04.03

Arbeitsblatt Nr. **7** : **Selbstinduktion in Spulen** | Seite **1**

1. **Selbstinduktion** in einer Leiterschleife (Spule mit N = 1) bei **Strom<u>zunahme</u>**

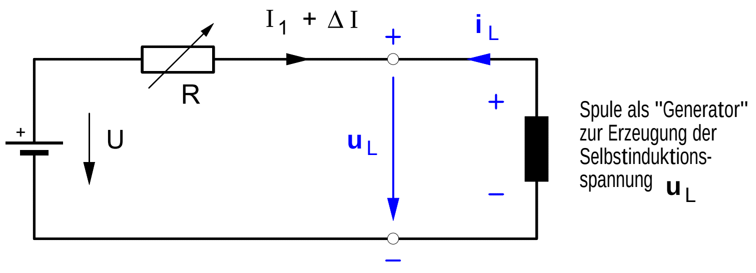


Annahme: Durch Verschieben des Schleifkontaktes werde der Strom I in der Spule (N=1) in der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ um den Betrag ΔI **erhöht**, d.h. von I_1 im Zeitpunkt t_1 auf $I_2 = I_1 + \Delta I$ im Zeitpunkt t_2 .

Durch die **Strom*zunahme*** $+\Delta I$ mit der Stromänderungsgeschwindigkeit $+\Delta I / \Delta t$ wird in der Spule eine **Fluß*zunahme*** $+\Delta\Phi$ mit der Flußänderungsgeschwindigkeit $+\Delta\Phi / \Delta t$ verursacht. Dadurch entsteht in der Spule eine **Induktionsspannung u_L**.

Da diese Spannung im Stromkreis jenes Stromes entsteht, der die Flußänderung **selbst** hervorruft, bezeichnet man sie als **Selbstinduktionsspannung** und den Induktionsvorgang als **Selbstinduktion.**

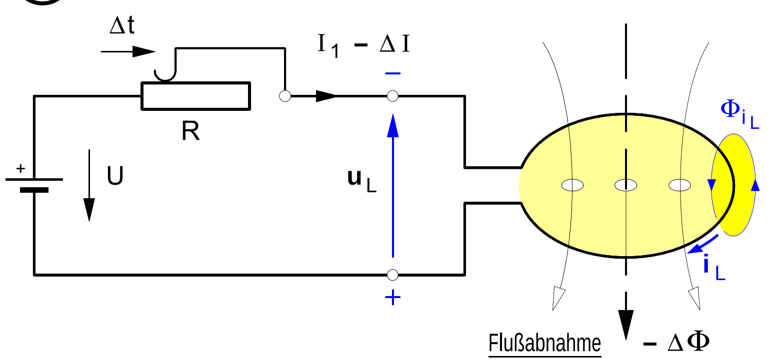
Ersatzschaltbild für die **Zeit** Dt, in der die Strom**zunahme** $+\Delta I$ erfolgt:



Diese **Selbstinduktionsspannung u_L** ruft ihrerseits einen **Selbstinduktionsstrom i_L** hervor, der nach dem *Lenzschen Gesetz* so gerichtet ist, daß er mit seinem Magnetfeld Φ_{iL} seiner Ursache, also der Fluß**zunahme** entgegenwirkt. Deshalb "fließt" der **Selbstinduktionsstrom* in diesem Fall in *entgegengesetzter* Richtung** wie der von der Spannung **U** erzeugte Strom I. Damit wirkt der Selbstinduktionsstrom zugleich auch gegen die Strom**zunahme**, indem er diese Stromänderung zu verhindern sucht. Während der Stromänderung wirkt die Spule wie ein Spannungserzeuger. Da der Strom in einem Generator stets von – nach **+** fließt, muß die Selbstinduktionsspannung die in dem Ersatzschaltbild angegebene Richtung haben. **Fazit:**

> Die durch eine ***Stromänderung*** in einer Spule hervorgerufene ***Selbstinduktionsspannung*** wirkt stets ihrer Ursache entgegen, indem sie die Strom*änderung*, d.h. die ***Zunahme*** oder ***Abnahme*** des Stromes zu ***verhindern sucht***. Diese Gegenwirkung äußert sich in einer ***Verzögerung*** der ***Änderung*** des Stromes.

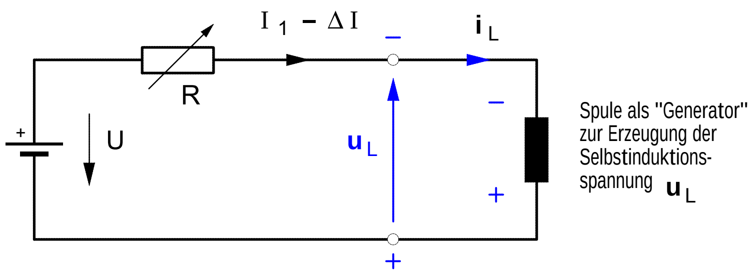
2. **Selbstinduktion** in einer Leiterschleife (Spule mit N = 1) bei **Strom<u>abnahme</u>**



Annahme: Durch Verschieben des Schleifkontaktes werde der Strom I in der Spule (N=1) in der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ um den Betrag ΔI **verringert**, d.h. von I_1 im Zeitpunkt t_1 auf $I_2 = I_1 - \Delta I$ im Zeitpunkt t_2 (jetzt ist $I_2 < I_1$ und damit $\Delta I < 0$).

Durch die **Strom*abnahme*** $-\Delta I$ mit der Stromänderungsgeschwindigkeit $-\Delta I / \Delta t$ wird in der Spule jetzt eine **Fluß*abnahme*** $-\Delta\Phi$ mit der Flußänderungsgeschwindigkeit $-\Delta\Phi / \Delta t$ verursacht. Auch in diesem Fall entsteht in der Spule eine **Selbstinduktionsspannung u_L**, die ebenfalls einen **Selbstinduktionsstrom i_L** hervorruft, der wiederum so gerichtet ist, daß er mit seinem Magnetfeld Φ_{iL} seiner Ursache, also jetzt der Fluß**abnahme** bzw. der Strom**abnahme** entgegenwirkt. Deshalb "fließt" der **Selbstinduktionsstrom* in diesem Fall in *gleicher* Richtung** wie der Strom I. Da auch hier der Selbstinduktionsstrom in der als "Generator" wirkenden Spule von – nach **+** "fließt", ist die Selbstinduktionsspannung jetzt umgekehrt gerichtet wie im Falle der Stromzunahme.

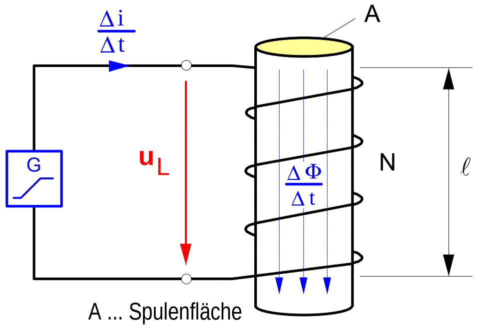
Ersatzschaltbild für die **Zeit** Dt, in der die Strom**abnahme** $-\Delta I$ erfolgt:



***** Der Selbstinduktionsstrom ist kein direkt meßbarer Strom. Er überlagert sich dem sich ändernden Strom I und äußert sich in seiner Wirkung gegen die Stromänderung, die dadurch nie sprunghaft erfolgen kann.

3. Berechnung der **Höhe der Selbstinduktionsspannung u_L**

Wir wollen der Einfachheit halber zunächst von einem **Sonderfall** ausgehen, indem wir annehmen, daß sich der Strom **i** in einer **langen eisenlosen Zylinderspule** gemäß dem nebenstehenden Zeitdiagramm in der Zeit von t_1 bis t_2 **gleichförmig** von i_1 auf i_2 ändere und damit um den Betrag **Δi** ansteige. Da wir eine eisenlose Spule voraussetzen, wird dieser Stromanstieg eine ebenfalls gleichförmige Änderung der magnetischen Feldstärke B und damit auch des magnetischen Flusses Φ in der Spule bewirken.



A ... Spulenfläche
N ... Windungszahl der Spule
ℓ ... Länge der Spule

Nach dem **Induktionsgesetz** gilt für die **Selbstinduktionsspannung u_L**, die aufgrund dieser Flußänderung D F in der Zeit D**t** in der Spule hervorgerufen wird :

$$\boxed{u_L = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}$$

Da die Flußänderung bei konstanter Spulenfläche A durch die Änderung der magnetischen Feldstärke B bewirkt wird, können wir für ΔΦ auch schreiben :

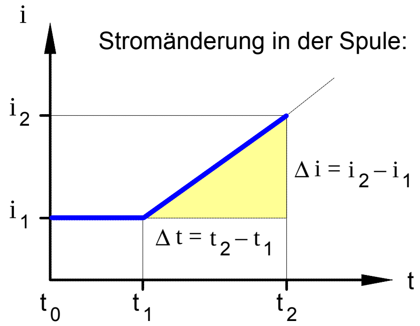
$$\Delta\Phi = \Delta(B \cdot A) = A \cdot \Delta B\,.$$

Damit lautet die Formel für u_L :

$$u_L = N \cdot \frac{A \cdot \Delta B}{\Delta t}$$

Die Änderung ΔB der Feldstärke setzt eine entsprechende Änderung ΔH der magnetischen Erregung voraus, d.h. :

$$\Delta B = \mu \cdot \Delta H\,.$$



Damit nimmt das Induktionsgesetz folgende Form an:

$$u_L = N \cdot \frac{A \cdot \mu \cdot \Delta H}{\Delta t}$$

Da es sich um eine lange Zylinderspule handelt, läßt sich mit $\Delta H = \frac{\Delta i \cdot N}{\ell}$ auch schreiben:

$$u_L = N \cdot \frac{A \cdot \mu \cdot \Delta i \cdot N}{\Delta t \cdot \ell}$$

und mit $\mu = \mu_o \cdot \mu_r$ und $N \cdot N = N^2$ ergibt sich schließlich :

$$u_L = N^2 \cdot \frac{A \cdot \mu_o \cdot \mu_r}{\ell} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Den in dieser Gleichung enthaltenen Ausdruck mit den Spulenmerkmalen **A**, **N**, **μ** und ℓ fassen wir zu **einer** Spulen-Kenngröße , zur sogenannten **"Induktivität" L** zusammen.

- Die **Induktivität L** einer ***langen Zylinderspule*** kann demnach wie folgt berechnet werden:

$$\boxed{L = N^2 \cdot \frac{A \cdot \mu_o \cdot \mu_r}{\ell}}$$

- Für die **Höhe der Selbstinduktionsspannung u_L** gilt dann das **Induktionsgesetz** in der folgenden Form:

$$\boxed{u_L = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}}$$

Δi ... gleichmäßige Stromänderung in der Spule in **A**
Δt ... Zeit , in der die Stromänderung erfolgt, in **s**
L ... Induktivität der Spule in **Vs/A** = **H** (Henry)
u_L ... Selbstinduktionsspannung, die in der Spule erzeugt wird, in **V**

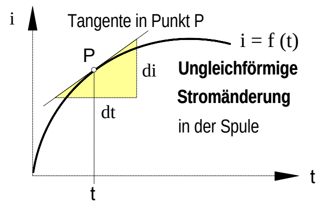
- **Maßeinheit** der Induktivität L :

$$[L] = [u_L] \cdot \frac{[\Delta t]}{[\Delta i]} = 1V \cdot \frac{1s}{1A} = 1\,\frac{Vs}{A} = 1\,H \;(\Rightarrow \text{"Henry"})$$

- Für den Fall, daß sich der Strom in der Spule **ungleichförmig** ändert, können wir dann allgemeiner schreiben:

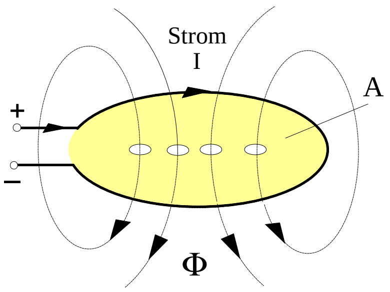
$$\boxed{u_L = L \cdot \frac{di}{dt}}$$

Der Differentialquotient **di/dt** ist der Steigungsfaktor der **Tangente** in einem beliebigen Punkt P des Graphen der Strom-Zeit-Funktion i = f(t).



4. Allgemeine Definition der **Induktivität L**

Die Formel $L = N^2 \cdot \frac{A \cdot \mu_o \cdot \mu_r}{\ell}$ war für den *Sonderfall* einer *langen Zylinderspule* entwickelt worden. Im folgenden soll nun eine **allgemeine**, von der besonderen Form der jeweiligen magnetfelderzeugenden Anordnung unabhängige Bestimmung des Begriffs der Induktivität angegeben werden.



Magnetfluß, der die von dem felderzeugenden Strom I umrandende Fläche A durchsetzt

- Für die **Induktivität L** einer ***Leiterschleife*** mit dem felderzeugenden Strom I gilt die Festlegung:

$$\boxed{L = \frac{\Phi}{I}}$$

I ... felderzeugender Strom in der Leiterschleife in **A**
Φ ... Magnetfluß, den der Strom in der Leiterschleife erzeugt, in **Vs** = Wb
L ... Induktivität der Leiterschleife in **Vs/A** = **H** (Henry)

- Dementsprechend gilt für die **Induktivität L** einer ***Spule*** die **Definition** :

I ... felderzeugender Strom in der Spule in **A**
N ... Windungszahl der Spule
Φ ... Magnetfluß, den der Strom in der Spule erzeugt, in **Vs** = Wb
L ... Induktivität der Spule in **Vs/A** = **H** (Henry)

$$\boxed{L = N \cdot \frac{\Phi}{I}}$$

- Anwendungsbeispiel : **Vergleich** der **Induktivitäten dreier Ringspulen**

1. ***Eisenlose* Ringspule** ("Luftspule")

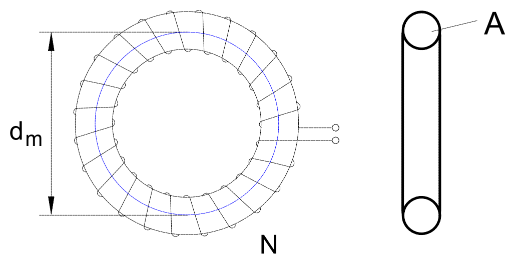
Von der nebenstehenden eisenlosen Ringspule sind folgende Daten bekannt:

d_m = 30 cm N = 800 A = 9 cm²

Wie groß ist die Induktivität L der Spule bei einem Strom von

a) I_1 = **0,3** A und **b)** I_2 = **0,6** A ?

L_1 = 0,768 mH **L_2 = 0,768** mH



Fazit : L = konstant

2. **Ringspule** mit ***geschlossenem Ringeisenkern***

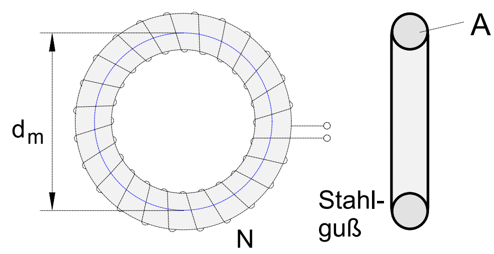
Von der nebenstehenden Ringspule mit einem Stahlgußkern sind folgende Daten bekannt:

d_m = 30 cm N = 800 A = 9 cm²

Wie groß ist die Induktivität L der Spule bei einem Strom von

a) I_1 = **0,3** A und **b)** I_2 = **0,6** A ?

L_1 = 2,16 H **L_2 = 1,44** H



Fazit : L ¹ konstant

3. **Ringspule** mit ***Ringeisenkern mit Luftspalt***

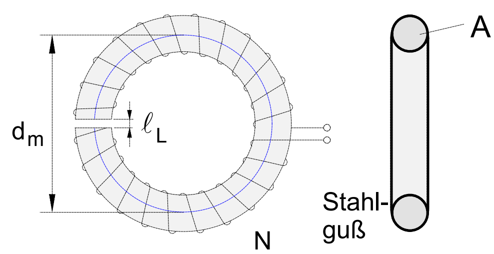
Von der nebenstehenden Ringspule mit einem Stahlgußkern mit einem Luftspalt sind folgende Daten bekannt:

d_m = 30 cm N = 800 A = 9 cm² ℓ_L = 1 mm

Wie groß ist die Induktivität L der Spule bei einem Strom von

a) I_1 = **0,3** A und **b)** I_2 = **0,6** A ?

L_1 = 0,528 H **L_2 = 0,564** H

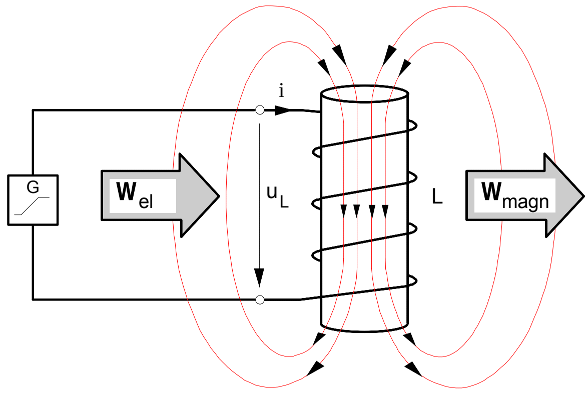


Fazit : L » konstant

Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name:	WT-7-4-F.DOC - 27.04.03
Arbeitsblatt Nr. **7** :	**Selbstinduktion** in **Spulen**	Seite **4**

5. Selbstinduktion und magnetische **Feldenergie** in einer **Spule** mit **konstanter Induktivität**

- Vereinfachende Annahmen:



1. Der *Drahtwiderstand* **R** der Spule sei vernachlässigbar klein (d.h.: R = 0).

2. Die *Induktivität* **L** der Spule sei *konstant*. (Dies kann uneingeschränkt nur bei **eisenlosen** Spulen vorausgesetzt werden.*)

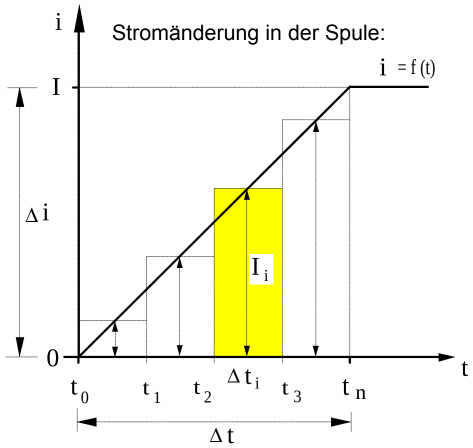
3. Der Strom in der Spule steige in der Zeit von $\mathbf{t_o}$ bis $\mathbf{t_n}$ *gleichförmig* von $\mathbf{i_o} = 0$ auf $\mathbf{i_n} = I$ an.

4. Damit ist die Selbstinduktionsspannung $\mathbf{u_L}$ in dieser Zeit konstant und es gilt das Induktionsgesetz in der Form :

$$u_L = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

mit $\Delta i = I - 0 = I$
und $\Delta t = t_n - t_o = t_n - 0 = t_n$
gilt dann

$$U_L = L \cdot \frac{I}{t_n}$$

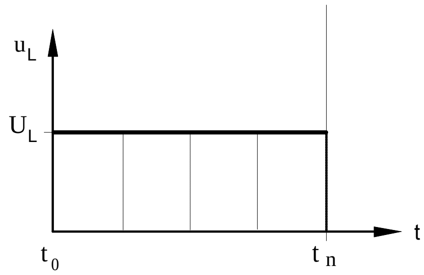


- In jedem Zeitabschnitt $\Delta \mathbf{t_i}$ wird an den bewegten Ladungen in dem Spulenstromkreis die **elektrische Arbeit**

$$\Delta W_{iel} = U_L \cdot I_i \cdot \Delta t_i$$

verrichtet und in dem magnetischen Feld der Spule als **magnetische Energie** ΔW_{imagn} gespeichert, d.h.:

$$U_L \cdot I_i \cdot \Delta t_i = \Delta W_{imagn}$$



- In der Zeit von $\mathbf{t_o}$ bis $\mathbf{t_n}$ wird dann **insgesamt** folgende magnetische Energie gespeichert :

$$W_{magn.} = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_{i\,magn.} \quad \text{mit} \quad \Delta W_{i\,magn.} = U_L \cdot I_i \cdot \Delta t_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} U_L \cdot I_i \cdot \Delta t_i \quad \text{Da} \quad U_L = \text{const.} \quad \text{ist, gilt}$$

$$W_{magn.} = U_L \sum_{i=1}^{n} I_i \cdot \Delta t_i$$

- Die Summanden " $\mathbf{I_i \cdot \Delta t_i}$ " sind die Rechteckflächenstreifen im i–t–Diagramm. Läßt man deren Breite $\Delta t_i \to 0$ bzw. deren Anzahl $n \to \infty$ gehen, dann ist die *Gesamtfläche aller Rechteckstreifen* (= Fläche unter der Treppenlinie) **flächengleich** der *Dreiecksfläche* unter der Strom-Zeit-Linie i = f(t) , d.h.:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} I_i \cdot \Delta t_i}_{\text{Fläche unter der Treppenlinie}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot I \cdot t_n}_{\text{Dreieck–Fläche}}$$

- Damit können wir für die in dem Magnetfeld einer **Spule** mit **konstanter Induktivität** insgesamt gespeicherte magnetische Feldenergie folgende Formel angeben:

$$W_{magn.} = U_L \cdot \frac{1}{2} \cdot I \cdot t_n \quad \text{und mit} \quad U_L = L \cdot \frac{I}{t_n}$$ ergibt sich für die **magnetische Feldenergie**:

$$\boxed{W_{magn.} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2}$$

I ... Erregerstrom in der Spule in **A**
L ... Induktivität der Spule in **Vs/A** = **H**
$\mathbf{W}_{magn}$ ... magnetische Energie in **Ws**

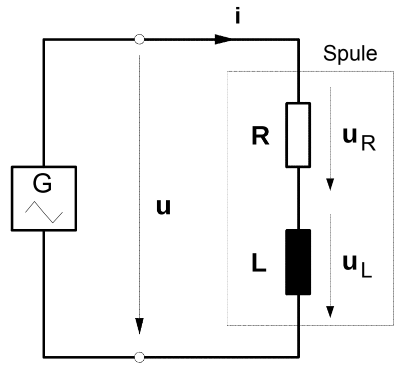
* Bei Spulen mit Eisenkernen ist die Induktivität nur in dem Bereich der Magnetisierungskennlinie konstant, in dem sich die Kennlinie durch eine Gerade durch den Nullpunkt annähern läßt.

• **Übungsaufgabe** zur Selbstinduktion in Spulen

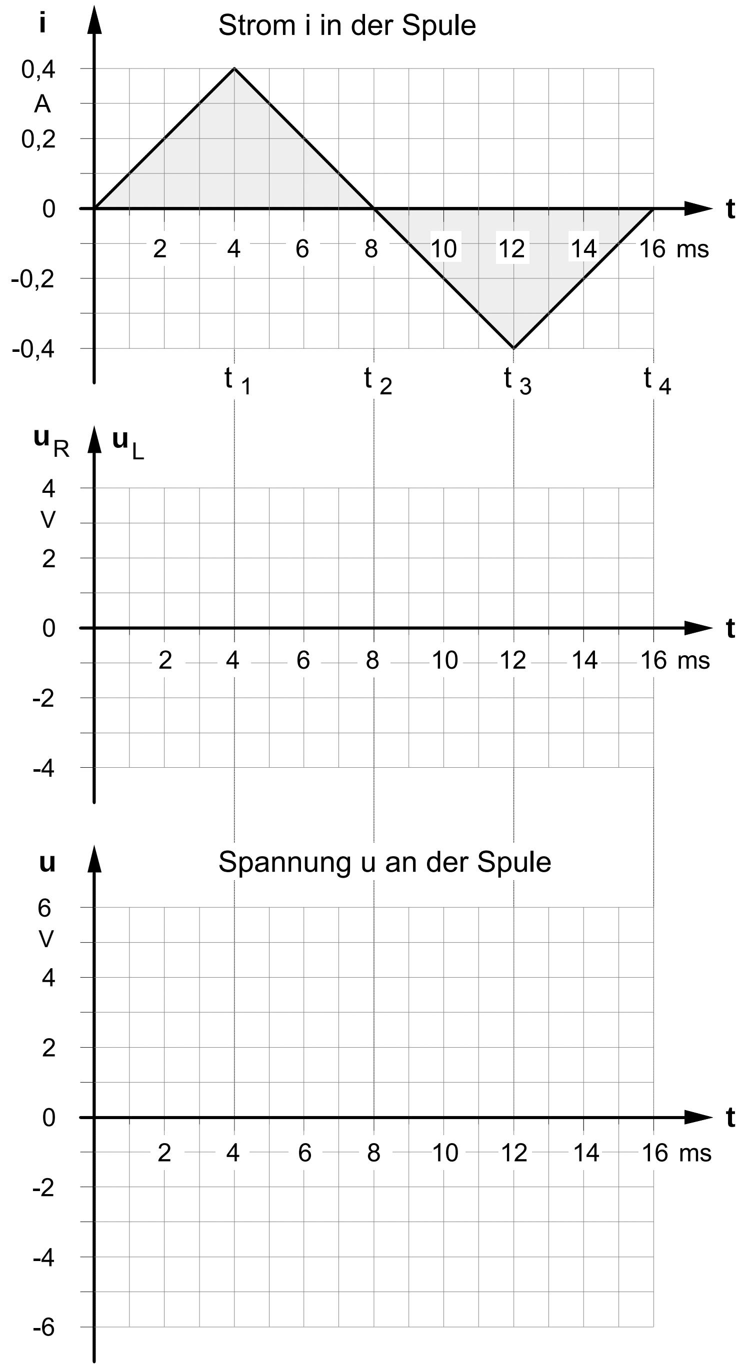
Eine "lange" eisenlose Zylinderspule ist an einen elektronischen Funktionsgenerator angeschlossen, der in der Spule den in dem unten angegebenen Strom-Zeit-Diagramm dargestellten **Dreieck-Wechselstrom i** hervorruft.

Die eisenlose Spule (μ_o = 1,257 · 10^{-6} Vs/Am) hat eine Spulenfläche **A** = **3** · 10^{-3} m², eine Länge von ℓ = **0,5** m, eine Windungszahl **N** = **2303** und einen ohmschen Drahtwiderstand von **R** = **5** Ω.

Stellen Sie in den folgenden Zeitdiagrammen den Verlauf der Spannung $\mathbf{u_R}$ an dem ohmschen Widerstand **R**, den der Selbstinduktionsspannung $\mathbf{u_L}$ und den der Spannung **u** an der Spule dar.



Ersatzschaltbild der Spule



► **Induktivität** der Spule

$$L = \mu_o \cdot \mu_r \cdot \frac{N^2 \cdot A}{\ell}$$

► **Selbstinduktionsspannung** $\mathbf{u_L}$ in der Spule

Da sich der Strom **i** in der Spule jeweils gleichförmig ändert, gilt für jeden Zeitabschnitt Δ**t** :

$$u_L = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

wobei $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$, $\Delta i_n = i_n - i_{n-1}$

► **Spannung** $\mathbf{u_R}$ an dem ohmschen Widerstand

Für die Spannung $\mathbf{u_R}$ gilt **in jedem Augenblick** das Ohmsche Gesetz :

$$u_R = i \cdot R$$

wobei $u_{Rn} = R \cdot i_n$

► **Spannung u** an der Spule

In **jedem Augenblick** gilt das 2. Kirchhoffsche Gesetz (Maschenregel) :

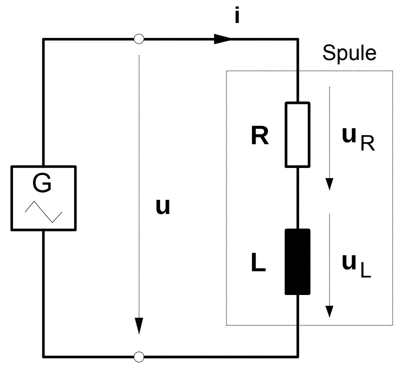
$$u = u_R + u_L$$

• **Übungsaufgabe** zur Selbstinduktion in Spulen

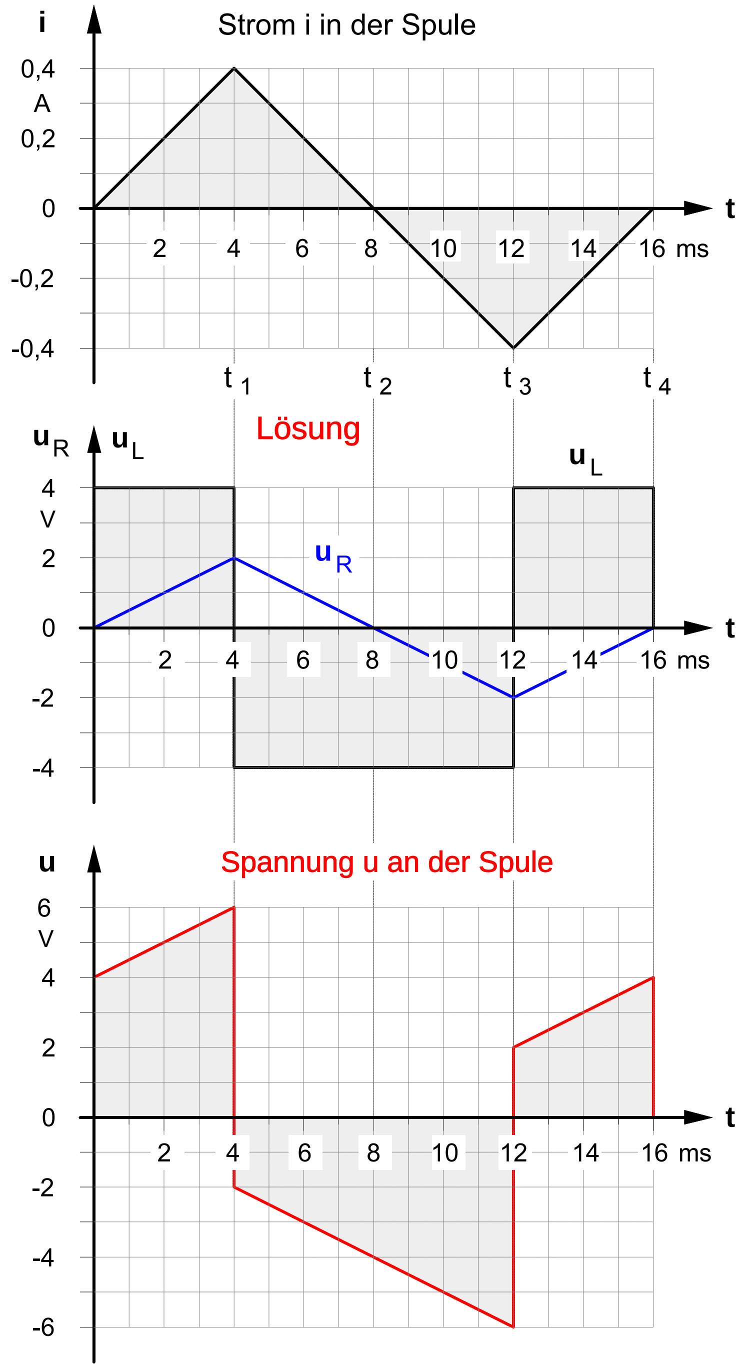
Eine "lange" eisenlose Zylinderspule ist an einen elektronischen Funktionsgenerator angeschlossen, der in der Spule den in dem unten angegebenen Strom-Zeit-Diagramm dargestellten **Dreieck-Wechselstrom i** hervorruft.

Die eisenlose Spule (μ_o = 1,257 · 10^{-6} Vs/Am) hat eine Spulenfläche **A** = **3** · 10^{-3} m², eine Länge von ℓ = **0,5** m, eine Windungszahl **N** = **2303** und einen ohmschen Drahtwiderstand von **R** = **5** Ω.

Stellen Sie in den folgenden Zeitdiagrammen den Verlauf der Spannung $\mathbf{u_R}$ an dem ohmschen Widerstand **R**, den der Selbstinduktionsspannung $\mathbf{u_L}$ und den der Spannung **u** an der Spule dar.



Ersatzschaltbild der Spule



▶ **Induktivität** der Spule

$$L = \mu_o \cdot \mu_r \cdot \frac{N^2 \cdot A}{\ell}$$

▶ **Selbstinduktionsspannung** $\mathbf{u_L}$ in der Spule

Da sich der Strom **i** in der Spule jeweils gleichförmig ändert, gilt für jeden Zeitabschnitt Δ**t** :

$$u_L = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} \Delta t_n &= t_n - t_{n-1} \\ \Delta i_n &= i_n - i_{n-1} \end{aligned}$$

▶ **Spannung** $\mathbf{u_R}$ an dem ohmschen Widerstand

Für die Spannung $\mathbf{u_R}$ gilt **in jedem Augenblick** das Ohmsche Gesetz :

$$u_R = i \cdot R \quad \text{wobei} \quad u_{Rn} = R \cdot i_n$$

▶ **Spannung u** an der Spule

In **jedem Augenblick** gilt das 2. Kirchhoffsche Gesetz (Maschenregel) :

$$u = u_R + u_L$$

- Weitere **Übungsaufgaben** zur Selbstinduktion in Spulen

1. Welche durchschnittliche Selbstinduktionsspannung entsteht in einer Spule mit der Induktivität **630** H , wenn man den in der Spule fließenden Strom von **100** mA in der Zeit Δt = **10** ms ausschaltet ? [-6,3kV]

---

2. Eine Spule mit der Induktivität **L** = **4,46** H wird von einem Gleichstrom der Stärke **20** mA durchflossen. Beim Ausschalten des Stromes soll die Selbstinduktionsspannung einen Wert von **500** V nicht überschreiten. Wie lange muß der Ausschaltvorgang mindestens dauern ? [0,178 ms]

---

3. Eine "lange" Zylinderspule hat den Radius **r** = **3** cm, eine Länge von **45** cm und **4000** Windungen. Die Spule ist eisenlos.

a) Welche Spannung wird in der Spule induziert, wenn der Spulenstrom während **0,2** ms von **2** mA gleichmäßig auf **10** mA ansteigt ? [5,04 V]

b) Auf welchen Wert würde sich die Induktionsspannung bei der Stromänderung gemäß Aufgabe b) erhöhen, wenn die Windungszahl der Spule bei sonst gleichen Daten doppelt so groß wäre? [20,16 V]

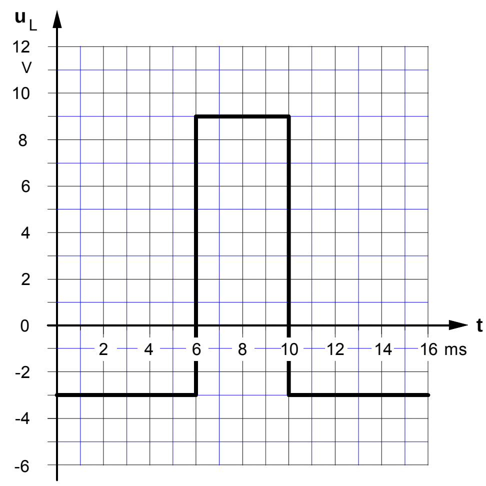
---

4. In einer "langen" eisenlosen Zylinderspule mit **50** Windungen und einer Windungsfläche von **2 ·** 10^{-4} m² wird mit einer Erregerstromstärke von **250** mA eine magnetische Feldstärke von **4** mT erzielt. Welche magnetische Energie ist in dem Magnetfeld der Spule gespeichert? [5 µWs]

---

5. Die Selbstinduktionsspannung $\mathbf{u_L}$ in einer Spule mit einem ohmschen Widerstand von **10** Ω und einer Induktivität von **60** mH hat den in dem nebenstehenden Zeitdiagramm angegebenen Verlauf.

Stellen Sie den zeitlichen Verlauf des Stromes **i** und der Spannung **u** an der Spule in maßstäblichen Zeitdiagrammen dar. (Der Anfangswert des Stromes im Zeitpunkt $\mathbf{t_o}$ = 0 s sei $\mathbf{i_o}$ = 0 A.)



---

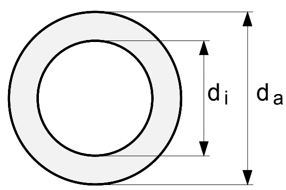
6. Eine "lange" eisenlose Zylinderspule mit dem Radius **r** = **4** cm und einer Länge von **38** cm wird von einem Strom der Stärke I = **250** mA durchflossen.

a) Berechnen Sie die Induktivität der Spule und die in dem Magnetfeld enthaltene Energie, wenn die Spule **4000** Windungen hat. [0,265 H ; 8,3 mWs]

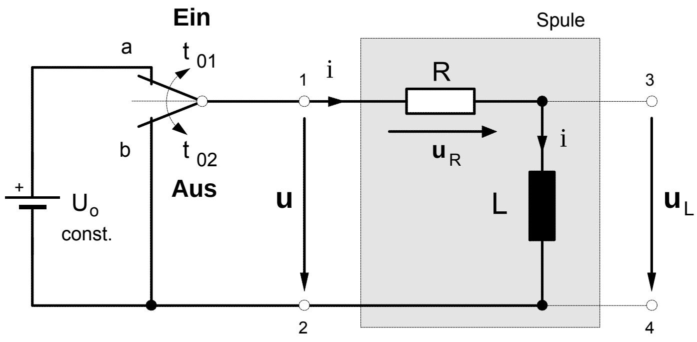
b) Wie viele Windungen müssen abgewickelt werden, damit die magnetische Energie bei sonst gleichen Bedingungen auf **2** mWs verringert wird? [2038]

---

7. Wieviel Windungen müssen auf einen ringförmigen Isolierstoffkern mit $\mathbf{d_a}$ = **4** cm und $\mathbf{d_i}$ = **3,2** cm gewickelt werden, um eine Induktivität von **0,55** mH zu erzielen? [1984]



Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name:	WT-8-1-F.DOC - 26.05.03
Arbeitsblatt Nr. **8** :	**Schaltvorgänge** in einer **RL-Schaltung** (reale Spule)	Seite **1**

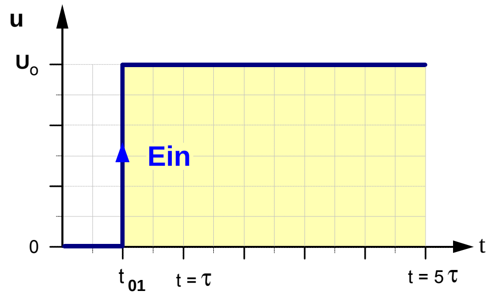


Zeitkonstante :

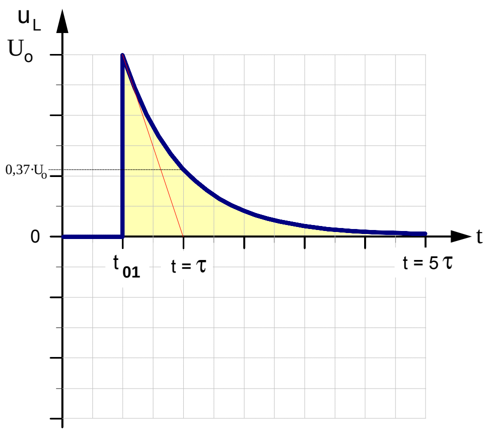
$$\tau = \frac{L}{R}$$

· E i n schaltvorgang

▶ Spannung **u** an der RL-Schaltung (Spule)

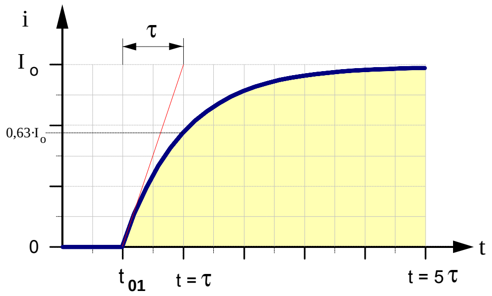


▶ Zeitdiagramm der **Selbstinduktionsspannung**



$$\boxed{u_L = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$ wobei $\tau = \frac{L}{R}$

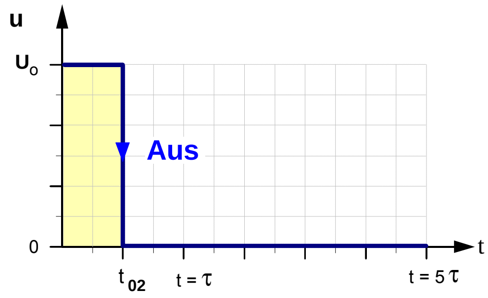
▶ Zeitdiagramm des **Stromes** beim Einschalten



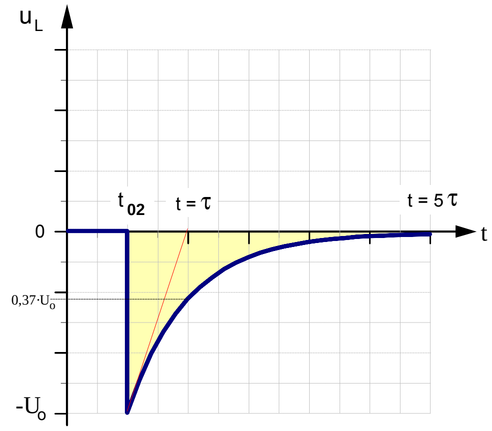
$$\boxed{i = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$ wobei $I_0 = \frac{U_0}{R}$

· A u s schaltvorgang

▶ Spannung **u** an der RL-Schaltung (Spule)

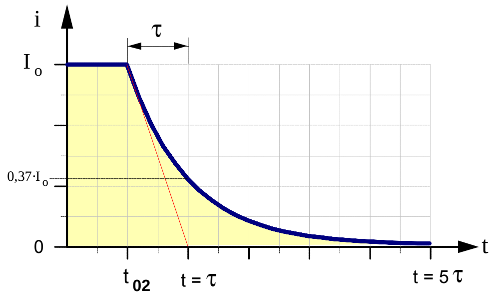


▶ Zeitdiagramm der **Selbstinduktionsspannung**



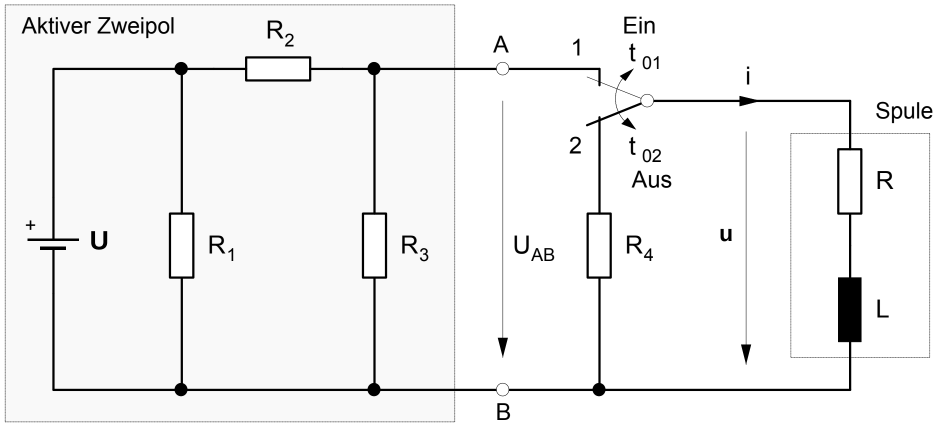
$$\boxed{u_L = -U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$ wobei $\tau = \frac{L}{R}$

▶ Zeitdiagramm des **Stromes** beim Ausschalten



$$\boxed{i = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$ wobei $I_0 = \frac{U_0}{R}$

1. Die in dem folgenden Schaltbild dargestellte Spule mit dem Wicklungsdrahtwiderstand **R** = **3** Ω und der konstanten Induktivität **L** = **1,9** H soll über einen verzögerungsfreien Schalter an den aktiven Zweipol mit den Daten **U** = **30** V , $\mathbf{R_1}$ = **10** Ω , $\mathbf{R_2}$ = **20** Ω und $\mathbf{R_3}$ = **30** Ω angeschlossen werden.



- **Einschaltvorgang :** Im Zeitpunkt $\mathbf{t_{01}}$ = 0 s wird der Schaltkontakt von **2** nach **1** umgeschaltet

a) Mit welcher Zeitkonstanten t_1 läuft der **Ein**schaltvorgang ab ? [t = 127 ms]

b) Welchen stationären Endwert I_0 erreicht der Strom **i** am Ende des Einschaltvorganges ? [I_o = 1,2 A]

c) Welchen Augenblickswert erreicht die Spannung **u** an der Spule in der Zeit **t** = **0,25** s nach Beginn des Einschaltvorganges im Zeitpunkt $\mathbf{t_{01}}$? [u = 5,6 V]

d) In welcher Zeit **t** nach dem Schließen des Kontakts im Zeitpunkt $\mathbf{t_{01}}$ hat der Strom **i** die **Hälfte** seines Endwerts erreicht ? [t = 87,8 ms]

- **Ausschaltvorgang :** Nachdem der Strom **i** seinen stationären Endwert I_0 erreicht hat, wird der Schaltkontakt im Zeitpunkt $\mathbf{t_{02}}$ = 0 s verzögerungsfrei von **1** nach **2** umgeschaltet

e) Mit welcher Zeitkonstanten t_2 läuft der **Aus**schaltvorgang ab, wenn der Parallelwiderstand $\mathbf{R_4}$ = **2** Ω beträgt ? [t = 0,38 s]

f) Auf welchen Prozentsatz seines Anfangswertes im Zeitpunkt $\mathbf{t_{02}}$ ist der Strom **i** in der Zeit **t** = t_2 nach Beginn des Aussschaltvorganges abgesunken ? [auf 36,7 %]

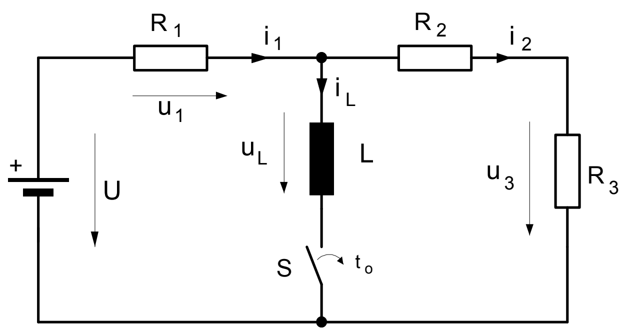
g) Welchen Augenblickswert erreicht die Spannung **u** an der Spule in der Zeit **t** = **0,5** s nach Beginn des Ausschaltvorganges im Zeitpunkt $\mathbf{t_{02}}$? [u = – 0,64 V]

h) Stellen Sie den Verlauf des Stromes **i** = f (**t**) während des **Ein**- und **Aus**schaltvorganges in einem maßstäblichen Zeitdiagramm dar.

---

2. Von der nebenstehenden RL-Schaltung sind folgende Daten bekannt:

$\mathbf{R_1}$ = **1200** Ω $\mathbf{R_2}$ = **240** Ω $\mathbf{R_3}$ = **480** Ω
L = **810** mH **U** = **80** V



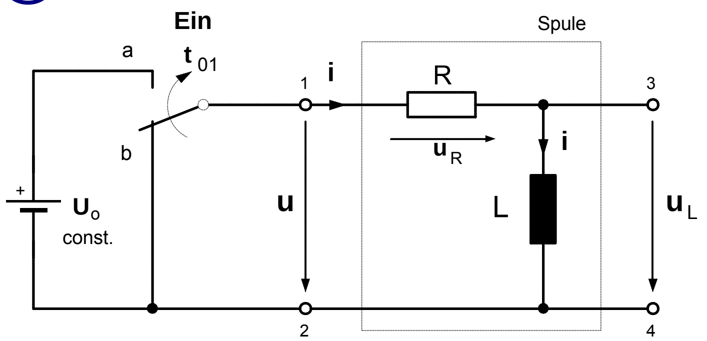
a) Entwickeln Sie die Zeitgleichungen $\mathbf{u_L}$ = f (**t**) und $\mathbf{i_L}$ = f (**t**) für den Einschaltvorgang.

b) Bestimmen Sie den Momentanwert des Stromes $\mathbf{i_1}$ nach **t** = **2** ms nachdem der Schalter S geschlossen worden ist. [i_1 = 58,4 mA]

c) Nach welcher Zeit **t** nach dem Schließen des Schalters erreicht die Spannung an $\mathbf{R_3}$ den Wert $\mathbf{u_3}$ = **5** V [t = 2,5 ms]

Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name:	WT-8A-F.DOC - 12.06.04
Arbeitsblatt Nr. **8 a)** : RL-Schaltvorgänge: **Begründung der e-Funktionsgleichungen**		Seite **1**

1. EIN-Schaltvorgang



- Nach dem Schließen des Schalters im Zeitpunkt **$t = t_{01} = 0$** beginnt der **Einschalt**vorgang. In **jedem** Zeitpunkt dieses Vorgangs gilt die Maschenregel in der Form:

$$u = U_0 = u_R + u_L \qquad (1)$$

- Mit $u_R = i \cdot R$ und $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ gilt dann:

$$U_0 = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} \quad \Big| \cdot \frac{1}{R} \qquad (2)$$

- Durch Umformung in $\frac{U_0}{R} = \frac{i \cdot R}{R} + \frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt}$ und mit $\frac{U_0}{R} = I_0$ ergibt sich: $\boxed{I_0 = i + \frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt}}$ **(3)**

- Zur Lösung der **Differentialgleichung** (**3**) werden zunächst die Veränderlichen **i** und **t** getrennt :

$$I_0 - i = \frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow dt = \frac{L}{R} \cdot \frac{di}{I_0 - i}$$ und dann beide Seiten integriert: $$\int dt = \frac{L}{R} \cdot \int \frac{1}{I_0 - i}\, di \qquad (4)$$

- Mit $\int dt = t$ und $\int \frac{1}{I_0 - i}\, di = -\ln(I_0 - i) + K$ ergibt sich: $$t = -\frac{L}{R} \cdot \ln(I_0 - i) + K \qquad (5)$$

- Bestimmung der **Konstanten K** für die *Anfangsbedingung* **i = 0** im *Zeitpunkt* **$t = t_{01} = 0$** (in Gl. (**5**) eingesetzt):

$$0 = -\frac{L}{R} \cdot \ln(I_0 - 0) + K \Rightarrow$$ Daraus folgt für die **Konstante K**: $$K = \frac{L}{R} \cdot \ln I_0 \qquad (6)$$

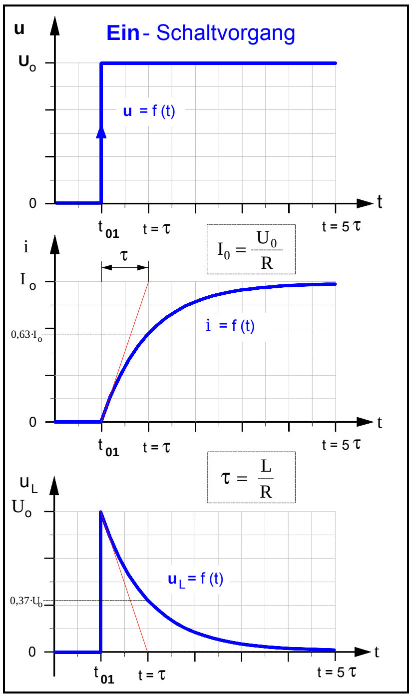
- Gleichung (**6**) in Gleichung (**5**) eingesetzt:

$$t = -\frac{L}{R} \cdot \ln(I_0 - i) + \frac{L}{R} \cdot \ln I_0 \Rightarrow t = -\frac{L}{R} \cdot [\ln(I_0 - i) - \ln I_0] \Rightarrow t = -\frac{L}{R} \cdot \ln\left(\frac{I_0 - i}{I_0}\right) \qquad (7)$$

- Durch Umformung ergibt sich $-\frac{t}{L/R} = \ln\left(\frac{I_0 - i}{I_0}\right)$ und aus der **Logarithmus**-Definition

Wenn $x = \ln a$, dann ist $e^x = a$.

folgt schließlich: $$e^{-\frac{t}{L/R}} = \frac{I_0 - i}{I_0} \Rightarrow I_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R}} = I_0 - i \ . \qquad (8)$$



- Damit gilt für die **Zeitfunktion** des **Stromes i** :

$$\boxed{i = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right)}$$ wobei $I_0 = \frac{U_0}{R}$ und $\frac{L}{R} = \tau$

- Für die **Selbstinduktionsspannung u_L** gilt dann:

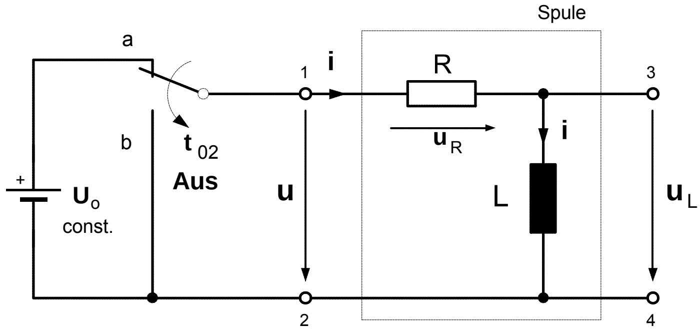
$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \quad \text{mit} \quad i = I_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{L/R}})$$

$$u_L = L \cdot \frac{d(I_0 - I_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R}})}{dt}$$

$$= L \cdot \frac{dI_0}{dt} - L \cdot \frac{d(I_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R}})}{dt}$$

$$= 0 - L \cdot I_0 \cdot \left(-\frac{1}{L/R}\right) \cdot e^{-\frac{t}{L/R}} \Rightarrow \boxed{u_L = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R}}}$$

2. AUS-Schaltvorgang



- Nach dem Schließen des Schalters im Zeitpunkt **$t = t_{02} = 0$** beginnt der **Ausschalt**vorgang. In **jedem** Zeitpunkt dieses Vorgangs gilt die Maschenregel in der Form:

$$u = 0 = u_R + u_L \tag{1}$$

- Mit $u_R = i \cdot R$ und $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ gilt dann:

$$0 = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} \quad \Big| \cdot \frac{1}{R} \tag{2}$$

- Durch Umformung in $0 = \frac{i \cdot R}{R} + \frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt}$ und mit $\frac{U_0}{R} = I_0$ ergibt sich:

$$\boxed{0 = i + \frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt}} \tag{3}$$

- Zur Lösung der **Differentialgleichung** (**3**) werden zunächst die Veränderlichen **i** und **t** getrennt :

$$-i = \frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{L}{R} \cdot \frac{di}{i}$$ und dann beide Seiten integriert: $$\int dt = -\frac{L}{R} \cdot \int \frac{1}{i}\, di \tag{4}$$

- Mit $\int dt = t$ und $\int \frac{1}{i}\, di = \ln i + K$ ergibt sich:

$$t = -\frac{L}{R} \cdot \ln i + K \tag{5}$$

- Bestimmung der **Konstanten K** für die *Anfangsbedingung* **i** = I_0 im *Zeitpunkt* **$t = t_{02} = 0$** (in Gl. (**5**) eingesetzt):

$$0 = -\frac{L}{R} \cdot \ln I_0 + K \quad \Rightarrow$$ Daraus folgt für die **Konstante K**: $$\underline{K = \frac{L}{R} \cdot \ln I_0} \tag{6}$$

- Gleichung (**6**) in Gleichung (**5**) eingesetzt:

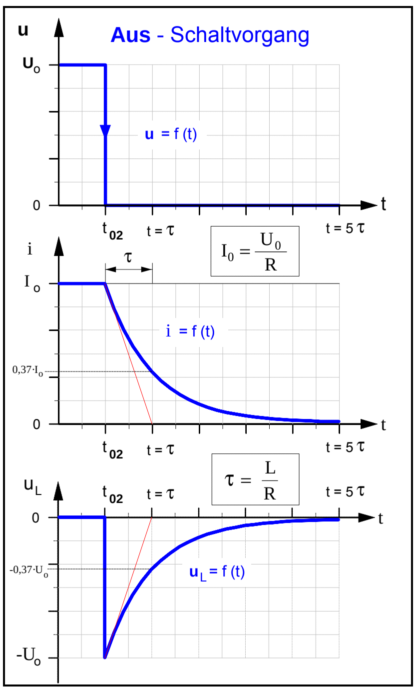
$$t = -\frac{L}{R} \cdot \ln i + \frac{L}{R} \cdot \ln I_0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{L}{R} \cdot [\ln i - \ln I_0] \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{L}{R} \cdot \ln\left(\frac{i}{I_0}\right) \tag{7}$$

- Durch Umformung ergibt sich $-\frac{t}{L/R} = \ln\left(\frac{i}{I_0}\right)$ und aus der **Logarithmus**-Definition

Wenn $x = \ln a$,
dann ist $e^x = a$.

folgt schließlich:

$$e^{-\frac{t}{L/R}} = \frac{i}{I_0} \quad \Rightarrow \quad I_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R}} = i \; . \tag{8}$$



- Damit gilt für die **Zeitfunktion** des **Stromes i** :

$$\boxed{i = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R}}}$$ wobei $I_0 = \frac{U_0}{R}$ und $\frac{L}{R} = \tau$

- Für die **Selbstinduktionsspannung u_L** gilt dann:

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \quad \text{mit} \quad i = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$$

$$u_L = L \cdot \frac{d(I_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R}})}{dt}$$

$$= L \cdot I_0 \cdot \left(-\frac{1}{L/R}\right) \cdot e^{-\frac{t}{L/R}}$$

$$= -L \cdot I_0 \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{t}{L/R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_L = -U_0 \cdot e^{-\frac{t}{L/R}}}$$

3. Mathematische Ergänzung

Vereinfachter Beweis der Behauptung: Wenn **y = ln x** , dann ist **y' =** $\frac{1}{x}$.

- **Behauptung**: Wenn $\boxed{y = \ln\ x}$, dann ist $\boxed{y' = \frac{1}{x}}$.
- **Voraussetzungen**:

1. Wenn $y = e^x$, dann ist $y' = e^x$ (1. Ableitung einer e-Funktion).

2. Wenn $x = e^y$, dann ist $y = \ln\ x$ (Logarithmus-Definition).

- **Beweis**:

$$y = \ln\ x$$ Gleichung (**1**)

- Gemäß der **Logarithmus-Defintion** gilt dann auch:

$$x = e^y$$ Gleichung (**2**)

- Beide Seiten der Gleichung (**2**) werden getrennt **differenziert**:

$$\frac{d[x]}{dx} = \frac{d\left[e^{(y)}\right]}{dx}$$

Gleichung (**3**)

$e^{(..)}$ ... äußere Funktion

y ... innere Funktion

▸ linke Seite von Gleichung (**3**): $\frac{d[x]}{dx} = 1 \cdot x^{1-1} = 1$ Gleichung (3 **a**)

▸ rechte Seite von Gleichung (**3**): $\frac{d\left[e^{(y)}\right]}{dx} = \underbrace{e^{(y)}}_{\text{1. Ableitung der äußeren Funktion}} \cdot \underbrace{y'}_{\text{1. Ableitung der inneren Funktion}}$ Gleichung (3 **b**)

- Die rechten Seiten der Gleichungen (3 **a**) und (3 **b**) wieder gleichgesetzt, ergibt:

$$1 = e^y \cdot y'$$ Gleichung (**4**)

- Gleichung (**4**) nach **y'** umgestellt:

$$y' = \frac{1}{e^y}$$ Gleichung (**5**)

- Gemäß der Logarithmus-Definition in Gleichung (**2**) gilt auch:

$$e^y = x$$ Gleichung (**6**)

- Durch Einsetzen der Gleichung (**6**) in (**5**) ergibt sich:

$$\boxed{y' = \frac{1}{x}}$$ **q.e.d.**

Damit konnte zugleich auch folgender Zusammenhang bewiesen werden:

$$\boxed{\text{Wenn } y = \frac{1}{x} \text{ , dann ist } Y = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x \text{ .}}$$

Literaturhinweis: Lambacher/Schweizer, Analysis, Stuttgart o.J. (Klett Verlag), S. 127 (Vgl. auch S. 161)

1. **Drehbewegung** einer Leiterschleife (Drehspule mit N = 1) in einem Magnetfeld

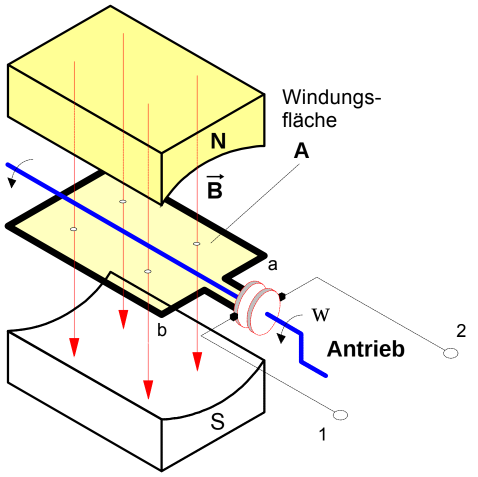


Bild 1 : Rotierende Leiterschleife im Magnetfeld als Modell eines Wechselstrom-Generators

Die in **Bild 1** dargestellte Leiterschleife (mit ℓ = **5** cm und **r** = **2,5** cm) werde durch einen geeigneten Antrieb mit einer konstanten **Drehzahl** von **3000** Umdrehungen pro Minute gleichmäßig in dem homogenen Magnetfeld mit der Feldstärke **B** = **1** T links herum gedreht. Bei einer Drehzahl **n** = **3000** min^{-1} rotiert die Leiterschleife mit einer **Drehfrequenz** von **f** = **3000** / 60 s^{-1} = **50** s^{-1} . Damit ergibt sich für die

- **Winkelgeschwindigkeit** (Kreisfrequenz) ω der Leiterschleife

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega = 2 \cdot \pi \cdot 50\,s^{-1}}$$

- und für die **Umlaufdauer** (Periodendauer):

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot 50\,s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \underline{T = 20\,ms}$$

- Für den **Drehwinkel** α (im *Bogenmaß*) gilt die Beziehung:

$$\hat{\alpha} = \omega \cdot t \qquad \text{(siehe Physik-Lehrgang "Mechanik")}$$

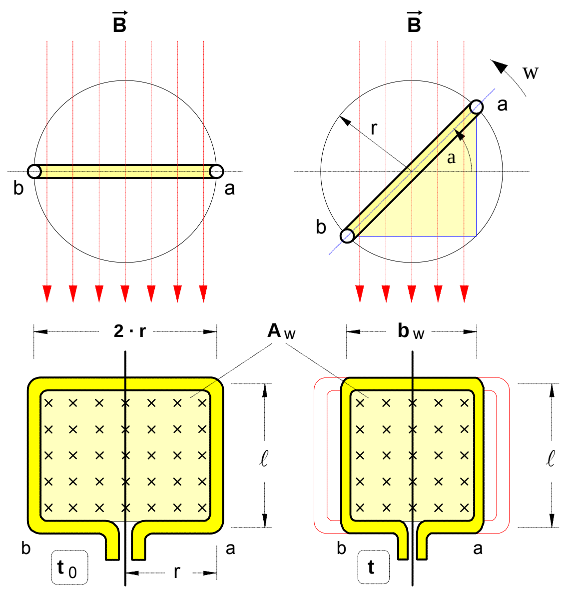


Bild 2 : Vorderansicht (im Schnitt) und Draufsicht der Leiterschleife im Zeitpunkt t_0 und in einem beliebigen Zeitpunkt **t**

Wir gehen bei unseren Überlegungen davon aus, daß sich die Leiterschleife zu Beginn unserer Betrachtungen im Zeitpunkt t_0 in der in **Bild 2** angegebenen **waagerechten Ausgangsposition** befinde. Dreht sich die Leiterschleife nach links, so ändert sich der von der Leiterschleife eingeschlossene magnetische Fluß in Abhängigkeit vom Drehwinkel α und damit von der Zeit **t** (**Bild 2**). Da die Feldstärke (Flußdichte) **B** konstant ist, liegt diese Flußänderung begründet in der Änderung der **wirksamen** Windungsfläche A_W und diese wiederum in der Änderung der wirksamen Breite b_W (denn die Länge ℓ ist konstant).

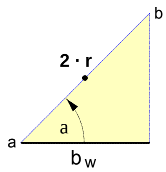


Bild 3

- **Wirksame Fläche** bei beliebigem Drehwinkel α :

$$A_w = b_w \cdot \ell \qquad \text{wobei} \qquad b_w = 2 \cdot r \cdot \cos\alpha$$

- **Magnetischer Fluß** in der rotierenden Leiterschleife

$$\Phi_t = B \cdot A_w \qquad \text{mit} \qquad A_w = 2 \cdot r \cdot \ell \cdot \cos\alpha$$

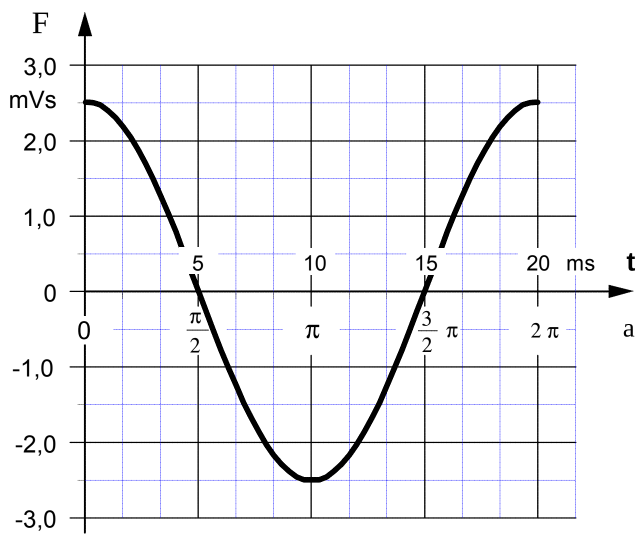
$$\Phi_t = B \cdot 2 \cdot r \cdot \ell \cdot \cos\alpha \qquad \text{mit} \qquad B \cdot 2 \cdot r \cdot \ell = \Phi_{max}$$

$$\Phi_t = \Phi_{max} \cdot \cos\alpha \qquad \text{mit} \qquad \alpha = \omega \cdot t$$

Daraus ergibt sich für den **Zeitverlauf** $\Phi_t = f(t)$ des Flusses

$$\boxed{\Phi_t = \Phi_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t)} \qquad \text{mit} \quad \omega \cdot t = \hat{\alpha}$$

mit $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T}$ und Φ_{max} = **2,5** mVs



t in ms	**0**	$\frac{1}{12} \cdot T$	$\frac{2}{12} \cdot T$	$\frac{3}{12} \cdot T$
α in rad	**0**	**π / 6**	**π / 3**	**π / 2**
α in °	**0°**	**30°**	**60°**	**90°**
Φ_t in mVs	**2,5**	**2,16**	**1,25**	**0**

Bild 4 : Zeitverlauf $\Phi = f(t)$ des Magnetflusses in der rotierenden Leiterschleife

In den vorangegangenen Betrachtungen konnte gezeigt werden, daß sich der **magnetische Fluß** in einer **Leiterschleife**, die gleichförmig in einem homogenen Magnetfeld **rotiert**, gemäß einer **Kosinusfunktion** ändert, wenn man von einer waagerechten Ausgangsposition im Zeitpunkt t_0 ausgeht. Auch im folgenden wollen wir von dieser Annahme ausgehen und auch die übrigen Voraussetzungen von Seite 1 beibehalten, bis auf eine kleine **Änderung**: Der Dauermagnet sei um 180° gedreht, das Magnetfeld $\vec{B}$ sei also genau entgegengesetzt gerichtet. Die Leiterschleife wird auch hier wieder als rotierende **Drehspule** mit der Windungszahl **N = 1** betrachtet (Bei höheren Windungszahlen würde sich prinzipiell nichts ändern.).

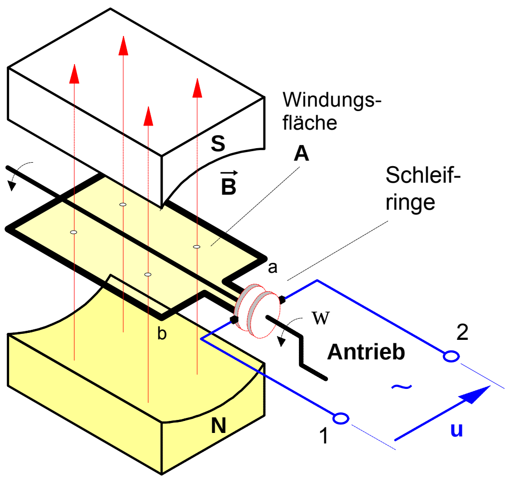


Bild 1 : Leiterschleife als rotierende Drehspule mit N = 1 im homogenen Magnetfeld eines Wechselstrom-Generatormodells

Bei umgekehrter Magnetfeldrichtung ist der Maximalwert des magnetischen Flusses im Zeitpunkt t_0 **negativ**. Ansonsten gilt für den **Zeitverlauf** $F_t = f(t)$ des Flusses in der rotierenden Drehspule wiederum die Kosinusfunktion (siehe auch Bild **2** und **3**):

$$\boxed{\Phi_t = -\,\Phi_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t)} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \omega \cdot t = \hat{\alpha} \\ \Phi_{max} = B \cdot 2 \cdot r \cdot \ell \end{array}$$

2. **Induktionsspannung** in der rotierenden Drehspule

Da sich während der Drehbewegung der Drehspule ständig der von ihr eingeschlossene magnetische Fluß **ändert** , wird in der Drehspule mit der Windungszahl **N** auch laufend eine Spannung **u induziert**. Zur Bestimmung des Zeitverlaufs **u** = f (t) dieser Induktionsspannung gehen wir von dem *Faradayschen Induktionsgesetz* aus.

- **Induktionsgesetz**

$$\boxed{u = N \cdot \frac{d\Phi_t}{dt}} \quad \text{mit} \quad \Phi_t = -\,\Phi_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$u = N \cdot \frac{d\left[-\Phi_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t)\right]}{dt}$$

- Nach der *Kettenregel* ergibt sich als *1. Ableitung*

$$u = N \cdot (-\Phi_{max}) \cdot \omega \cdot (-\sin(\omega \cdot t))$$

Allgemeine Form:

Wenn $y = a \cdot \cos(b \cdot x)$, dann $y' = \frac{dy}{dx} = -\,a \cdot b \cdot \sin(b \cdot x)$

und mit $N \cdot \Phi_{max} \cdot \omega = \hat{u}$ für den

- Zeitverlauf **u** = f(t) der **induzierten Spannung**

$$\boxed{u = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)} \quad \text{mit} \quad \omega \cdot t = \hat{\alpha}$$

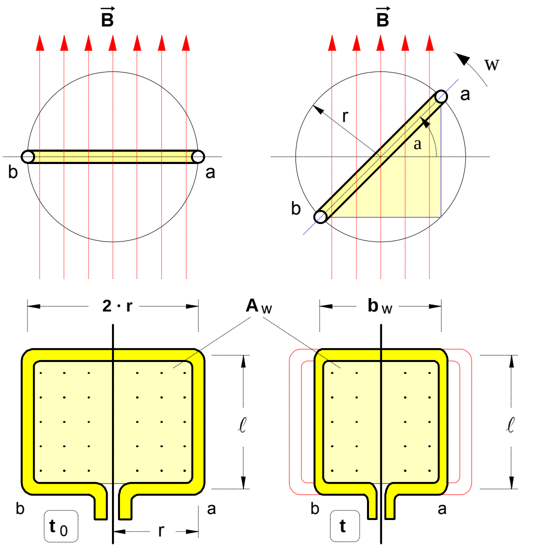


Bild 2 : Vorderansicht (im Schnitt) und Draufsicht der Drehspule im Zeitpunkt t_0 und in einem beliebigen Zeitpunkt **t**

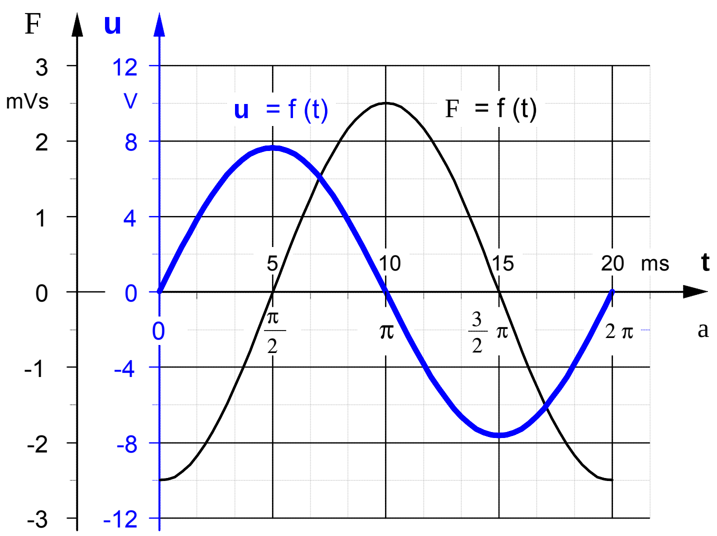


Bild 3 : Zeitdiagramme des magnetischen Flusses F und der Induktionsspannung **u** in der rotierenden Drehspule

Aufgabe: Stellen Sie den Zeitverlauf **u** = f(t) der in der Drehspule induzierten Spannung in **Bild 3** dar. Gehen Sie von den gleichen Daten wie auf S. 1 aus und nehmen Sie an, die Windungszahl betrage **N** = **10**.

Fazit: Ändert sich der *magnetische Fluß* in einer Spule **kosinusförmig**, so entsteht in der Spule eine *Induktionsspannung* , die sich **sinusförmig** ändert. Ein solche Spannung bezeichnet man als **Sinus-Wechselspannung**.

1. Graphische Darstellung von sinusförmigen Wechselgrößen als **Zeiger**

Eine sinusförmige Wechselspannung ist gemäß der Funktionsgleichung

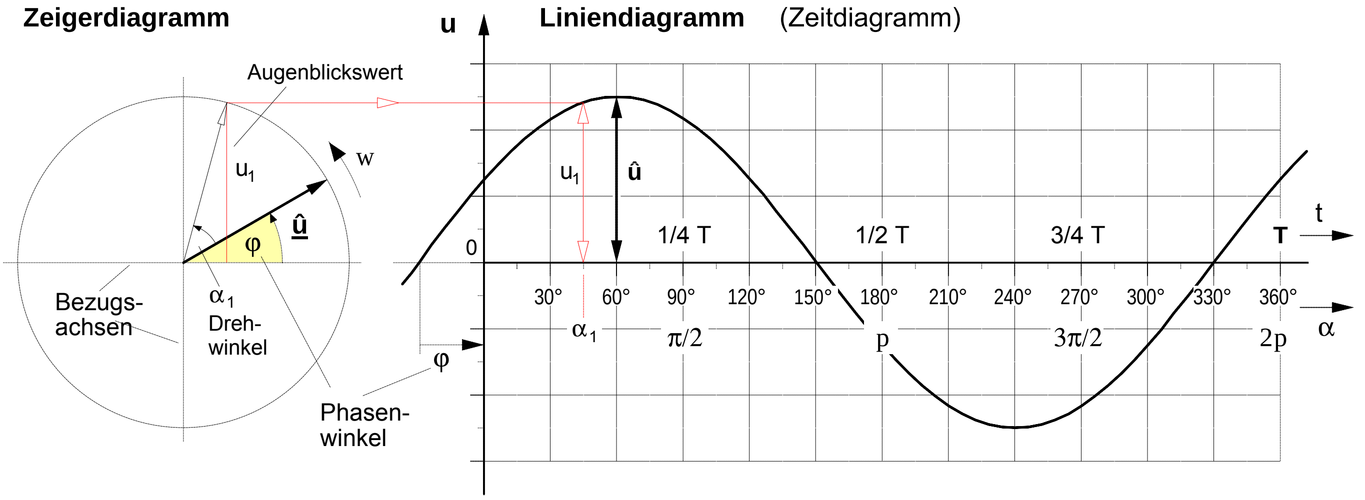
$$\boxed{u = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)} \quad \text{mit} \quad \boxed{\omega \cdot t = \hat{\alpha}} \quad \text{und} \quad \boxed{\omega = 2 \cdot \pi \cdot f} \quad \text{sowie} \quad \boxed{f = \frac{1}{T}}$$

durch folgende Angaben eindeutig bestimmt :

- **Maximalwert** (Amplitude) **û**
- **Frequenz f**
- **Phasenwinkel** j

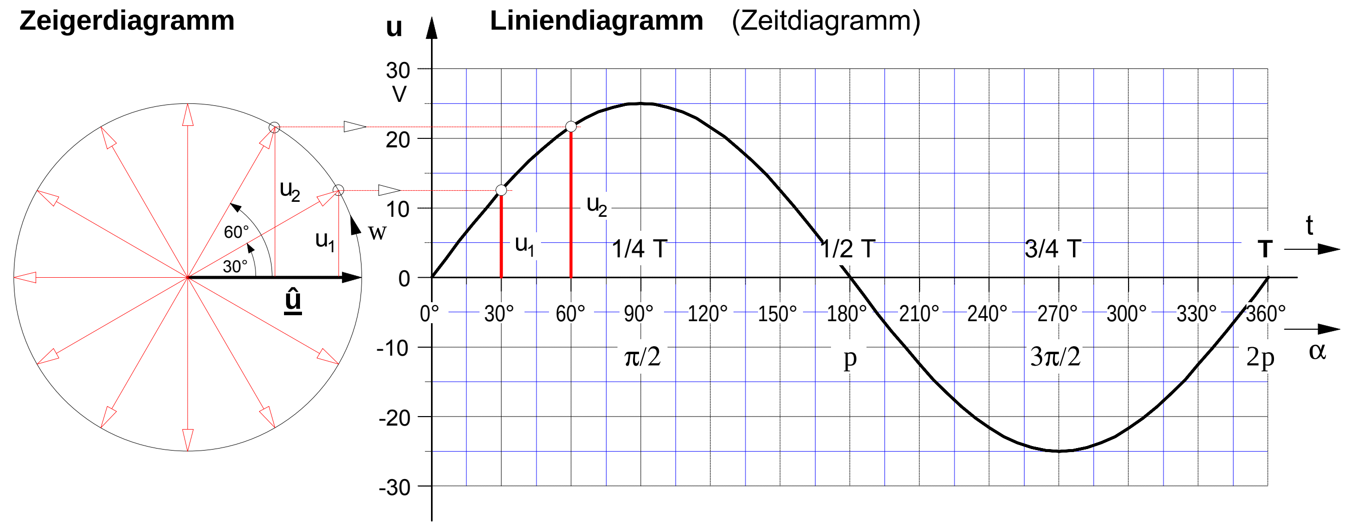
Mit Hilfe dieser Angaben und der Funktionsgleichung lassen sich die Augenblickswerte **u** für jeden beliebigen Zeitpunkt **t** berechnen. Mit diesen Augenblickswerten wiederum kann die sinusförmige Wechselspannung *graphisch* in einem Liniendiagramm (auch: Zeitdiagramm) dargestellt werden.

Eine Vereinfachung der *graphischen* Darstellung ergibt sich, wenn eine sinusförmige Wechselgröße statt durch ihr Liniendiagramm symbolisch durch einen sog. **Zeiger** dargestellt wird, dessen **Länge** durch den Maximalwert der Sinuswechselgröße bestimmt ist und von dem man annimmt, daß er **gegen den Uhrzeigersinn** mit einer Winkelgeschwindigkeit ω **rotiere**, die gleich der Kreisfrequenz ω der Sinuswechselgröße ist. Durch die Projektion dieses Zeigers auf eine senkrechte Bezugsachse lassen sich die Augenblickswerte für jeden Drehwinkel α und damit für jeden beliebigen Zeitpunkt **t** ermitteln.



2. Konstruktion des **Linien**diagramms (Zeitdiagramm) aus dem **Zeiger**diagramm

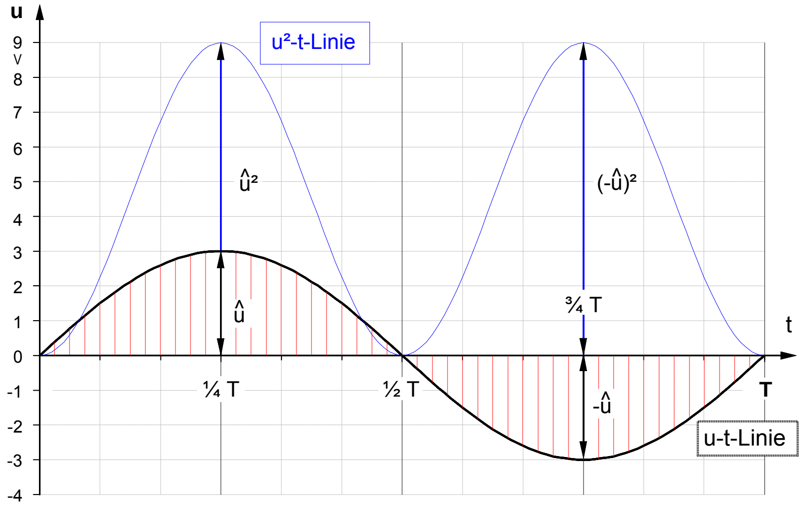
Eine sinusförmige Wechselspannung mit dem Maximalwert **û** = **25** V , der Frequenz **f** = **50** Hz und dem Phasenwinkel φ = **0**° sei durch folgenden Zeiger beschrieben. Konstruieren Sie daraus das Liniendiagramm (Zeitdiagramm) der Wechselspannung.



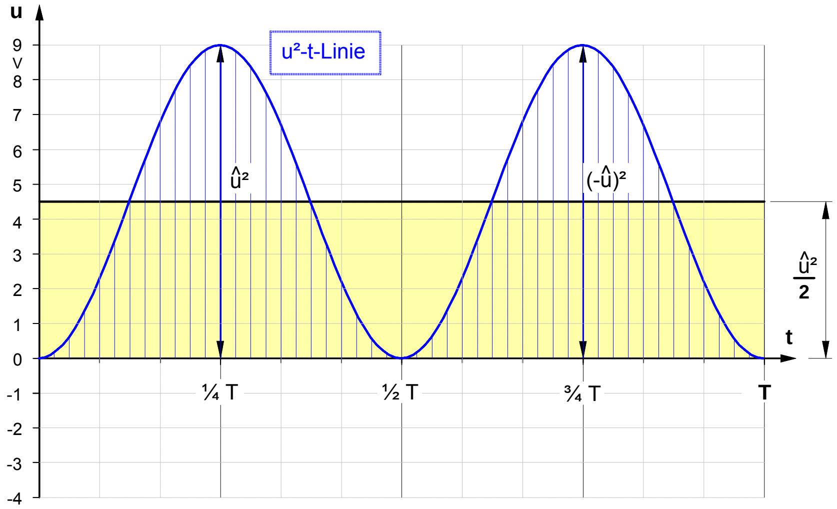
Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name: WT-11-BF.DOC - 25.05.03	
Arbeitsblatt Nr. **11** :	Der sog. **Effektivwert** von **sinusförmigen Wechselgrößen**	Seite **1**

Da der **arithmetische Mittelwert** einer sinusförmigen Wechselgröße (Wechselspannung oder Wechselstrom) wegen des halbperiodischen Wechsels der Richtungen und damit des Vorzeichens der Augenblickswerte stets gleich **null** ist, ist dieser Mittelwert als Unterscheidungsmerkmal für Sinuswechselgrößen unbrauchbar. Daher sah man sich genötigt, als Mittelwert für sinusförmige Wechselgrößen einen **quadratischen Mittelwert**, den sogenannten **"Effektivwert"**, zu definieren. Wie dieser Mittelwert geometrisch gebildet wird, soll im folgenden am Beispiel einer sinusförmigen Wechselspannung gezeigt werden.

1. Zunächst werden die Augenblickswerte der als **u–t–Linie** dargestellten sinusförmigen Wechselspannung **quadriert**. Es entsteht die **u²–t–Linie**. Sämtliche Augenblickswerte dieser **u²–t–Linie** werden durch das Quadrieren positiv und es kann jetzt aus diesen Augenblickswerten ein arithmetischer Mittelwert gebildet werden, der nicht mehr null ist.

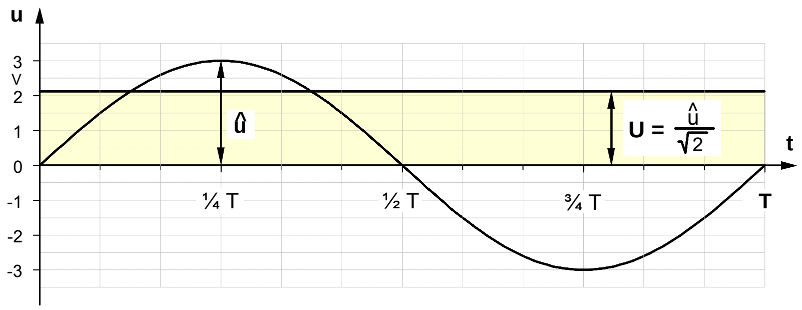


2. Zur Bestimmung des **Mittelwertes** der Augenblickswerte der **u²–t–Linie** muß über der "Seitenlänge" **T** ein Rechteck konstruiert werden, dessen Fläche genauso groß ist wie die Fläche unter der **u²–t–Linie**. Die Höhe dieses Rechtecks ist der Mittelwert der Augenblickswerte der **u²–t–Linie**. In dem *speziellen* Fall einer ***Sinus***wechselgröße ist dieser Mittelwert genau die Hälfte des Maximalwertes der **u²–t–Linie**, d.h. also **û²⁄2**.



3. Zieht man aus dem Mittelwert **û²⁄2** der **u²–t–Linie** nun noch die **Wurzel**, dann ergibt sich der **Effektivwert U** der Sinuswechselspannung, d.h. es ist:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{2}} = \frac{\sqrt{\hat{u}^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$



- Demnach sind der **Scheitelwert û** und der **Effektivwert U** einer **sinusförmigen** Wechselspannung über den sog. **Scheitelfaktor** $\sqrt{\mathbf{2}}$ miteinander verknüpft. Es gilt die folgende Beziehung: $\boxed{U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}}$ bzw. $\boxed{\hat{u} = U \cdot \sqrt{2}}$

- Eine Wechselspannung mit dem **Effektivwert U** ruft an einem ohmschen Widerstand R die gleiche **Leistungswirkung** hervor wie eine **Gleichspannung** von der Größe des Effektivwertes, ist also genau so **effektiv** wie die Gleichspannung. Daher die Bezeichnung **Effektivwert**.

- **Vielfachmeßgeräte** mit Drehspulmeßwerken zeigen im Betriebsart-Modus "Wechselstrom" nur bei ***sinus-*** förmigen Wechselgrößen den **Effektivwert** an.

2. **Gleichrichtwert** (Arithmetischer Mittelwert der Absolutbeträge)

• Definition des Gleichrichtwertes

> Der **Gleichrichtwert** einer Wechselgröße ist definiert als der **arithmetische Mittelwert der Absolutbeträge** der Augenblickswerte.

Beispiel: Mischspannung **u** = f(t)

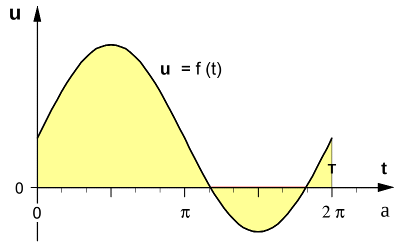


Bild 1: Zeitdiagramm der **Augenblickswerte u**

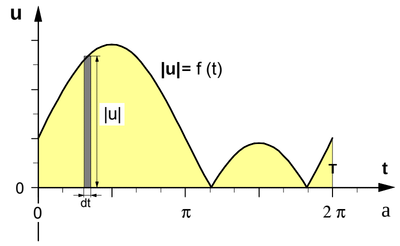


Bild 2: Zeitdiagramm der **Absolutbeträge |u|**

Demnach ist die Summe der Absolutbeträge aller Augenblickswerte zu bilden und durch deren Anzahl zu dividieren. Da diese Anzahl und mithin auch die Summe selbst innerhalb bestimmter Grenzen (z.B. in einer Periode **T**) unendlich groß ist und damit unbestimmbar zu sein scheint, begnügen wir uns zunächst mit einer

• näherungsweisen Bestimmung des Gleichrichtwertes

Gemäß der Mittelwertdefinition bilden wird dazu die Summe einer begrenzten Anzahl **n** diskreter Absolutbeträge von Augenblickswerten und dividieren diese durch deren Anzahl **n**:

$$|\overline{u}| \approx \frac{1}{n}\left(|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|\right)$$ oder mit dem

Summenzeichen

$$\boxed{|\overline{u}| \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k|}$$

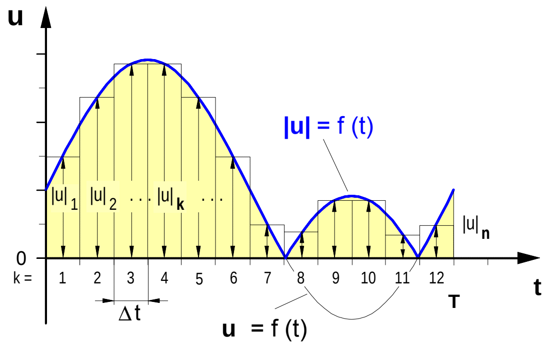


Bild 3 : Auswahl diskreter Augenblickswerte

Multipliziert man jetzt beide Seiten der Näherungsgleichung mit dem Ausdruck **n · Δt** und setzt dann auf der linken Seite für **n · Δt = T** , so ergibt sich

$$|\overline{u}| \cdot n \cdot \Delta t \approx \sum_{k=1}^{n} |u_k| \cdot \Delta t \qquad \text{bzw. mit } \mathbf{n \cdot \Delta t = T} \qquad |\overline{u}| \cdot T \approx \sum_{k=1}^{n} |u_k| \cdot \Delta t$$

Rein **geometrisch** betrachtet stellt das Produkt $|u_k| \cdot \Delta t$ nichts anderes als eine Fläche dar, nämlich die eines der in **Bild 3** angegebenen Rechtecktreifen mit der Breite **Δt**. Demnach wird auch mit der Summe auf der rechten Seite der Gleichung eine Fläche, nämlich die unter der Treppenlinie angegeben. Wenn auf der rechten Seite eine Fläche angegeben wird, muß auch der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung ebenfalls eine Fläche darstellen, nämlich die eines Rechtecks mit der Breite **T** und der Höhe $|\overline{u}|$. Insofern beinhaltet die Bestimmung des Gleichrichtwertes $|\overline{u}|$ geometrisch nichts anderes als die Bestimmung der Höhe eines Rechtecks mit der Breite **T**, dessen Fläche näherungsweise gleich der Fläche unter der Treppenlinie in Bild **3** ist.

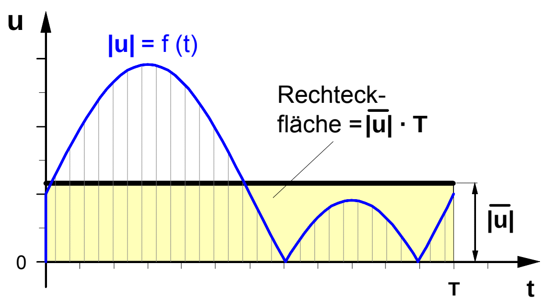


Bild 4 : Gleichrichtwert als Rechteckhöhe

Läßt man nun die Anzahl der Rechteckstreifen $n \to \infty$ bzw. deren Breite $\Delta t \to 0$ gehen, so ergibt sich als Grenzwert die Formel zur

• exakten Bestimmung des Gleichrichtwertes

$$|\overline{u}| = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ n \to \infty}} \left(\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n} |u_k| \cdot \Delta t\right) \qquad \text{oder kurz:} \qquad \boxed{|\overline{u}| = \frac{1}{T}\int_0^T |u| \cdot dt}$$

Mit dem Integral auf der rechten Seite wird wiederum eine Fläche, nämlich die unter der **|u|–t**–Linie angegeben. In dieser Fläche sind alle, d.h. die unendlich vielen Augenblickswerte enthalten. Insofern läßt sich die Bestimmung des Gleichrichtwertes $|\overline{u}|$ jetzt geometrisch deuten als die Bestimmung der Höhe eines Rechtecks mit der Breite **T**, dessen Fläche gleich der Fläche unter der **|u|**–**t**–Linie ist (Bild **4**).

• Gleichrichtwert einer Sinus-Wechselspannung

Gegeben sei die in Bild **5 a)** dargestellte Sinuswechselspannung **u** = f (**t**). Sie läßt sich beschreiben mit der Funktionsgleichung $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

Die vorzeichenunabhängige Darstellung des Zeitverlaufs **|u|** = f (**t**) der Absolutbeträge dieser Sinusspannung ist im Bild **5 b)** angegeben. Da $\mathbf{A_1} = \mathbf{A_2}$ ist, gilt für die **Gesamtfläche** unter dieser Kennlinie die Formel

$$A = 2 \cdot A_1 = 2 \cdot \int_0^{\omega \cdot T/2} \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)\ d(\omega \cdot t)$$

Für die Konstruktion eines **flächengleichen Rechtecks** (siehe Bild **5 c**) mit dem Gleichrichtwert **|ū|** als Höhe und der Breite **2** p **=** w **T** läßt sich dann die folgende Flächenformel angeben:

$$|\bar{u}| \cdot (\omega \cdot T) = A = 2 \cdot \int_0^{\omega \cdot T/2} \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)\ d(\omega \cdot t)$$

Daraus folgt für den **Gleichrichtwert**:

$$|\bar{u}| = \frac{2}{\omega \cdot T} \int_0^{\omega \cdot T/2} \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot d(\omega \cdot t) \quad \text{mit} \quad \omega \cdot t = \alpha \quad \text{und} \quad \omega \cdot T = 2\pi$$

$$|\bar{u}| = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \hat{u} \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha \qquad \text{mit} \quad \int \sin\alpha \cdot d\alpha = -\cos\alpha$$

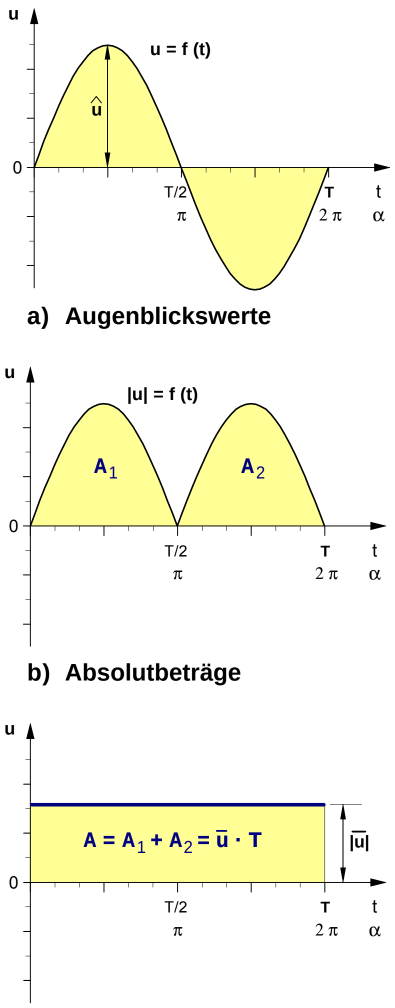
$$|\bar{u}| = \frac{\hat{u}}{\pi}\left[-\cos\alpha\right]_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} = \frac{\hat{u}}{\pi}\left[(-\cos\pi) - (-\cos 0)\right] = \frac{\hat{u}}{\pi}\left[(+1) - (-1)\right]$$

Für den **Gleichrichtwert |ū|** einer **sinusförmigen Wechselspannung** ergibt sich demnach die Formel:

$$\boxed{|\bar{u}| = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{u}}$$

Der Gleichrichtwert **|ū|** einer Sinus-Wechselspannung entspricht dem arithmetischen Mittelwert **ū** der Ausgangsspannung einer idealen Zweipuls-Gleichrichterschaltung (2-Puls-Brückenschaltung B2).

Bild 5: Zeitdiagramme



a) Augenblickswerte

b) Absolutbeträge

c) Gleichrichtwert

• **Geeignetes Meßsystem**: Gemessen werden kann der Gleichrichtwert einer Wechselspannung mit einem Drehspulmeßwerk, dem ein 2-Puls-Brückengleichrichter vorgeschaltet ist.

• Aufgabenbeispiele

1. Der Maximalwert der Eingangswechselspannung eines "idealen" B2-Brückengleichrichters betrage **10** V. Berechnen Sie den Gleichrichtwert der pulsierenden Gleichspannung am Ausgang des Gleichrichters. [6,37 V].
2. Wie groß wäre der Gleichrichtwert der Ausgangsspannung, wenn man die in der **1.** Aufgabe angegebene Wechselspannung an einen **Einpuls**-Gleichrichter (M1-Gleichrichter) anschließen würde? [3,18 V]
3. Bestimmen Sie den Gleichrichtwert einer **Dreieck**-Spannung mit einem Maximalwert von **10** V. [5 V]

Lösung zu Aufgabe **3.** :

Für den Bereich von **t** = **0** bis **t** = **T/4** gilt die Funktionsgleichung

$$|u| = f(t) = \frac{\hat{u}}{T/4} \cdot t$$ und damit für die **Gesamtfläche A** :

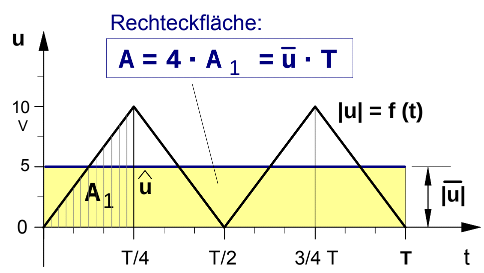


Bild 6: Zeitverlauf der Absolutbeträge einer Dreieckspannung

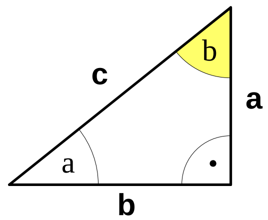
$$A = 4 \cdot A_1 = 4 \cdot \int_0^{T/4} |u| \cdot d\,t = 4 \cdot \int_0^{T/4} \frac{\hat{u}}{T/4} \cdot t \cdot d\,t = \frac{4 \cdot \hat{u}}{T/4} \cdot \int_0^{T/4} t \cdot d\,t$$

mit $\int t \cdot d\,t = \frac{1}{2} \cdot t^2$ ergibt sich für $A = |\bar{u}| \cdot T = \left[\frac{16}{T} \cdot \hat{u} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2\right]_{t=0}^{t=T/4}$ und für den Gleichrichtwert $|\bar{u}| = \frac{\hat{u}}{2}$

• Trigonometrische Voraussetzungen

▸ **Katheten im rechtwinkligen Dreieck**

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten **a** und **b** , der Hypotenuse **c** und dem Winkel b zwischen **a** und **c** gilt:



$$a = c \cdot \cos\beta \qquad \text{und} \qquad b = c \cdot \sin\beta \qquad \text{Gl. (1)}$$

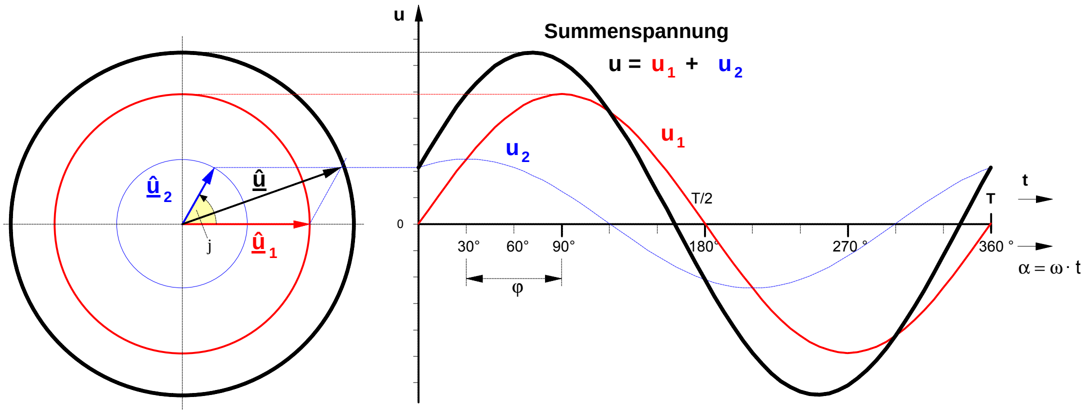
▸ **Additionstheorem**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \qquad \text{Gl. (2)}$$

▸ Der sog. »**trigonometrische Pythagoras**«

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \text{Gl. (3)}$$

• **Graphische Addition** der Spannungs-Zeit-Liniendiagramme **u** (t) und der Zeiger



• Problemstellung

Zwei sinusförmige Wechselspannungen gleicher Frequenz, die sich durch ihren Maximalwert und den Phasenwinkel unterscheiden, sollen algebraisch addiert werden. Es soll zum einen gezeigt werden, daß die Summenspannung ebenfalls eine Sinusspannung ist und zum anderen, wie sich der Maximalwert, der Effektivwert und der Phasenwinkel dieser Summenspannung berechnen lassen.

• Herleitung der Formeln zur **Berechnung der Summenspannung**

▸ Für die Augenblickswerte der zu addierenden Sinusspannungen setzen wir voraus (Vgl. zur folgenden Herleitung: Grafe, H. u.a., Grundlagen der Elektrotechnik, Band II, Heidelberg 1974, S. 45 ff):

$$u_1 = \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad \text{und} \qquad u_2 = \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

▸ Damit ergibt sich für die Augenblickswerte der Summenspannung **u**

$$u = u_1 + u_2 = \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

▸ Für den Sinus-Ausdruck im 2. Summanden gilt das oben in Gl. (**2**) angegebene Additionstheorem:

$$\sin(\omega \cdot t + \varphi) = \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos\varphi + \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin\varphi$$

▸ Damit ergibt sich für die Spannungsformel:

$$u = \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos\varphi + \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin\varphi$$

$$u = \sin(\omega \cdot t) \cdot [\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi] + \cos(\omega \cdot t) \cdot [\hat{u}_2 \cdot \sin\varphi]$$

▸ Wir definieren die konstanten (d.h. zeitunabhängigen) Ausdrücke in den eckigen Klammern der Einfachheit halber als allgemeinen Zahlen **a** und **b**, d.h.

$$[\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi] = a \qquad \text{und} \qquad [\hat{u}_2 \cdot \sin\varphi] = b$$

$$u = \sin(\omega \cdot t) \cdot a + \cos(\omega \cdot t) \cdot b$$

▸ Unter Berücksichtigung von Gl. (**1**) für **a** und **b** ergibt sich für die Summenspannung **u** :

$$u = \sin(\omega \cdot t) \cdot c \cdot \cos\beta + \cos(\omega \cdot t) \cdot c \cdot \sin\beta$$

$$u = c \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos\beta + \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin\beta]$$

- Der in eckige Klammern gesetzte Ausdruck läßt sich gemäß dem in Gl. (**2**) angegebenen **Additionstheorem** vereinfachen. Daraus ergibt sich für die Summenspannung die Gleichung $u = c \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta)$. Dies aber ist nichts anderes als die Zeit-Funktionsgleichung für eine Sinusspannung mit dem Maximalwert **c** und dem Phasenwinkel b gegenüber dem Nullpunkt der Zeitachse, d.h. wir können mit **c = û** auch schreiben:

$$\underline{u = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta)}$$

- Zwischenergebnis: **Die Addition zweier phasenverschobener Sinusspannungen ergibt wiederum eine sinusförmige Wechselspannung.**

- Zur Bestimmung des Maximalwertes **û = c** setzen wir zunächst in die Definitionsgleichungen für **a** und **b** die unter Gl. (**1**) angegebenen Ausdrücke für die Katheten ein

$$[\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi] = a = c \cdot \cos\beta \qquad \text{bzw.} \qquad [\hat{u}_2 \cdot \sin\varphi] = b = c \cdot \sin\beta$$

- **Quadriert** man diese Gleichungen, so ergibt sich unter Beachtung der 1. Binomischen Formel

$$[\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi]^2 = [c \cdot \cos\beta]^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_1^2 + 2 \cdot \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi + \hat{u}_2^2 \cdot \cos^2\varphi = c^2 \cdot \cos^2\beta$$

$$[\hat{u}_2 \cdot \sin\varphi]^2 = [c \cdot \sin\beta]^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_2^2 \cdot \sin^2\varphi = c^2 \cdot \sin^2\beta$$

- **Addiert** man jetzt die beiden Gleichungen, so erhält man

$$\hat{u}_1^2 + 2 \cdot \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi + \hat{u}_2^2 \cdot \cos^2\varphi + \hat{u}_2^2 \cdot \sin^2\varphi = c^2 \cdot \cos^2\beta + c^2 \cdot \sin^2\beta$$

$$\hat{u}_1^2 + 2 \cdot \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi + \hat{u}_2^2 \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = c^2 \cdot (\cos^2\beta + \sin^2\beta)$$

- Gemäß Gl. (**3**) der trigonometrischen Voraussetzungen kann für die Klammerausdrücke jeweils **1** gesetzt werden und es gilt

$$\hat{u}_1^2 + 2 \cdot \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi + \hat{u}_2^2 \cdot 1 = c^2 \cdot 1$$

- Mit **c = û** ergibt sich für die Berechnung des **Maximalwertes der Summenspannung**:

$$\boxed{\hat{u} = \sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2 \cdot \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi}}$$

- Unter Berücksichtigung der obigen Setzungen $[\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi] = a$ und $[\hat{u}_2 \cdot \sin\varphi] = b$ ergibt sich für den Tangens des Phasenwinkels b die Formel: $\tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{\hat{u}_2 \cdot \sin\varphi}{\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi}$

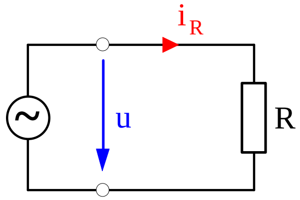
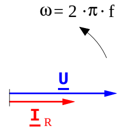
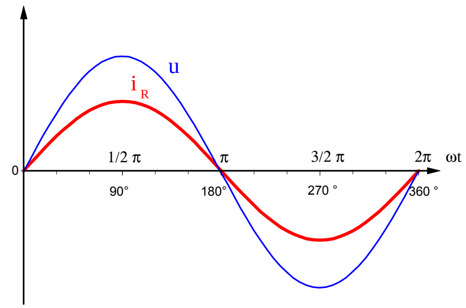
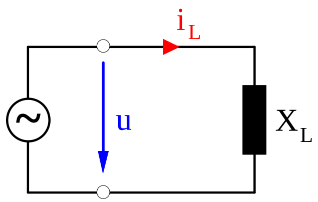
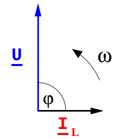
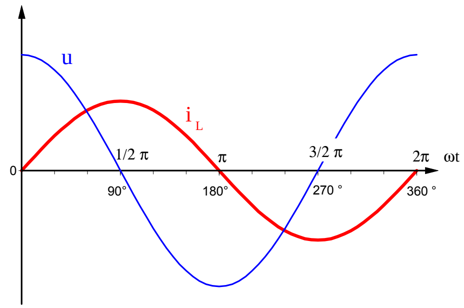
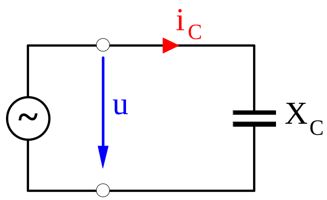
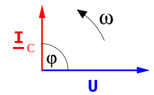
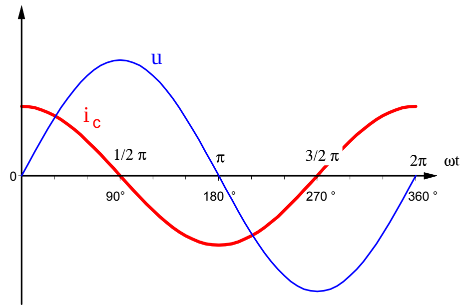
- Daraus folgt für den **Phasenwinkel der Summenspannung**:

$$\boxed{\beta = \arctan \frac{\hat{u}_2 \cdot \sin\varphi}{\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi}}$$

- Ersetzt man jeweils die Maximalwerte durch die entsprechenden ***Effektivwert***ausdrücke $\hat{u} = U \cdot \sqrt{2}$ etc., so erhalten wir mit den **Effektivwerten für die Summenspannung und den Phasenwinkel**:

$$\boxed{U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2 \cdot U_1 \cdot U_2 \cdot \cos\varphi}} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{\beta = \arctan \frac{U_2 \cdot \sin\varphi}{U_1 + U_2 \cdot \cos\varphi}}$$

Lehrgang: **WECHSELSTROMTECHNIK** Arbeitsblatt Nr. **13** : Die sogenannten »**idealen Wechselstromwiderstände**« WT-13.DOC - 31.05.03

Begründung der **idealen Wechselstromwiderstände**	**Zeigerdiagramme** und Phasenverschiebung	**Liniendiagramme** und Zeitfunktionen	**Widerstände** und **Leitwerte**	**Wirkleistung** und **Blindleistung**
1. Ohmscher Widerstand R Annahme: $i_R = \hat{i}_R \cdot \sin(\omega t)$ $\boxed{u = R \cdot i_R}$  $u = R \cdot \hat{i}_R \cdot \sin(\omega t)$ mit $R \cdot \hat{i}_R = \hat{u}$ $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$	**I** ...Stromzeiger **U** ...Spannungszeiger  $\varphi_R = 0°_{el}$ Spannung und Strom sind **phasengleich**.	 $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ $i_R = \hat{i}_R \cdot \sin(\omega t)$	• Wirk**widerstand**: $R = \frac{\hat{u}}{\hat{i}_R} = \frac{U}{I_R}$ • Wirk**leitwert**: $G = \frac{1}{R}$	• Wirkleistung : $P_R = U \cdot I_R$ • Blindleistung : $Q_R = 0$ $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$; $I_R = \frac{\hat{i}_R}{\sqrt{2}}$
2. Induktiver Widerstand X_L Annahme: $i_L = \hat{i}_L \cdot \sin(\omega t)$ $\boxed{u = L \cdot \frac{d\,i_L}{d\,t}}$  $u = L \cdot \frac{d(\hat{i}_L \cdot \sin(\omega t))}{d\,t}$ $u = L \cdot \hat{i}_L \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$ mit $L \cdot \hat{i}_L \cdot \omega = \hat{u}$ $\frac{\hat{u}}{\hat{i}_L} = \omega \cdot L = X_L \Leftarrow$ $u = \hat{u} \cdot \cos(\omega t)$	**I** ...Stromzeiger **U** ...Spannungszeiger  $\varphi_L = 90°_{el}$ ($\hat{=}\ \pi/2$) Die Spannung eilt dem Strom um 90° **voraus**.	 $i_L = \hat{i}_L \cdot \sin(\omega t)$ $u = \hat{u} \cdot \cos(\omega t)$	• Induktiver Blind**widerstand**: $X_L = \frac{\hat{u}}{\hat{i}_L} = \frac{U}{I_L}$ wobei : $X_L = \omega \cdot L$ • Induktiver Blind**leitwert**: $B_L = \frac{1}{X_L}$	• Wirkleistung : $P_L = 0$ • Blindleistung : $Q_L = U \cdot I_L$ $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$; $I_L = \frac{\hat{i}_L}{\sqrt{2}}$
3. Kapazitiver Widerstand X_C Annahme: $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ $\boxed{i_C = \frac{d\,q}{d\,t} = C \cdot \frac{d\,u}{d\,t}}$  $i_C = C \cdot \frac{d(\hat{u} \cdot \sin(\omega t))}{d\,t}$ $i_C = C \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$ mit $C \cdot \hat{u} \cdot \omega = \hat{i}_C$ $\frac{\hat{u}}{\hat{i}_C} = \frac{1}{\omega \cdot C} = X_C \Leftarrow$ $i_C = \hat{i}_C \cdot \cos(\omega t)$	**I** ...Stromzeiger **U** ...Spannungszeiger  $\varphi_C = 90°_{el}$ ($\hat{=}\ \pi/2$) Die Spannung eilt dem Strom um 90° **nach**.	 $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ $i_C = \hat{i}_C \cdot \cos(\omega t)$	• Kapazitiver Blind**widerstand**: $X_C = \frac{\hat{u}}{\hat{i}_C} = \frac{U}{I_C}$ wobei : $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ • Kapazitiver Blind**leitwert**: $B_C = \frac{1}{X_C}$	• Wirkleistung : $P_C = 0$ • Blindleistung : $Q_C = U \cdot I_C$ $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$; $I_C = \frac{\hat{i}_C}{\sqrt{2}}$

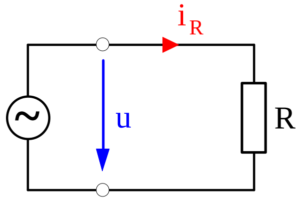
Begründung der **idealen Wechselstromwiderstände**

Spalten: **Zeigerdiagramme** und Phasenverschiebung | **Liniendiagramme** und Zeitfunktionen | **Widerstände** und **Leitwerte** | **Wirkleistung** und **Blindleistung**

1. Ohmscher Widerstand R

$\boxed{u = R \cdot i_R}$

Annahme: $i_R = \hat{i}_R \cdot \sin(\omega t)$

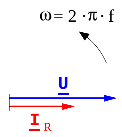


$u = R \cdot \hat{i}_R \cdot \sin(\omega t)$

mit $R \cdot \hat{i}_R = \hat{u}$

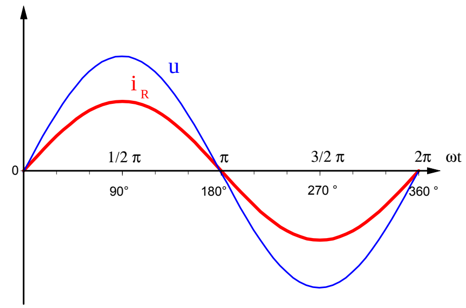
$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$

I ...Stromzeiger
U ...Spannungszeiger



$\varphi_R = 0°_{el}$

Spannung und Strom sind **phasengleich**.



$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ $i_R = \hat{i}_R \cdot \sin(\omega t)$

- Wirk**widerstand**:

$$R = \frac{\hat{u}}{\hat{i}_R} = \frac{U}{I_R}$$

- Wirk**leitwert**:

$$G = \frac{1}{R}$$

- Wirkleistung :

$P_R = U \cdot I_R$

- Blindleistung :

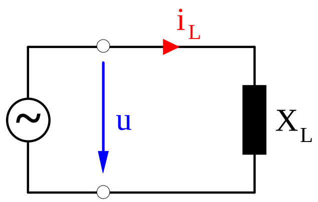
$Q_R = 0$

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \;;\; I_R = \frac{\hat{i}_R}{\sqrt{2}}$$

2. Induktiver Widerstand X_L

$\boxed{u = L \cdot \frac{d\,i_L}{d\,t}}$

Annahme: $i_L = \hat{i}_L \cdot \sin(\omega t)$



$$\frac{\hat{u}}{\hat{i}_L} = \omega \cdot L = X_L \Leftarrow$$

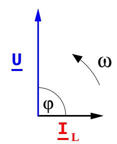
$$u = L \cdot \frac{d\left(\hat{i}_L \cdot \sin(\omega t)\right)}{d\,t}$$

$u = L \cdot \hat{i}_L \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$

mit $L \cdot \hat{i}_L \cdot \omega = \hat{u}$

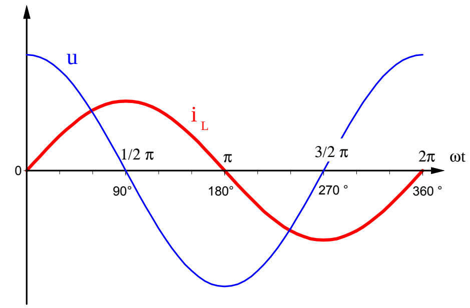
$u = \hat{u} \cdot \cos(\omega t)$

I ...Stromzeiger
U ...Spannungszeiger



$\varphi_L = 90°_{el}$ ($\hat{=}\ \pi / 2$)

Die Spannung eilt dem Strom um 90° **voraus**.



$i_L = \hat{i}_L \cdot \sin(\omega t)$ **$u = \hat{u} \cdot \cos(\omega t)$**

- Induktiver Blind**widerstand**:

$$X_L = \frac{\hat{u}}{\hat{i}_L} = \frac{U}{I_L}$$

wobei : $X_L = \omega \cdot L$

- Induktiver Blind**leitwert**:

$$B_L = \frac{1}{X_L}$$

- Wirkleistung :

$P_L = 0$

- Blindleistung :

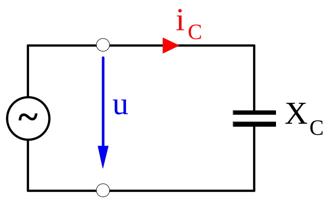
$Q_L = U \cdot I_L$

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \;;\; I_L = \frac{\hat{i}_L}{\sqrt{2}}$$

3. Kapazitiver Widerstand X_C

$\boxed{i_C = \frac{d\,q}{d\,t} = C \cdot \frac{d\,u}{d\,t}}$

Annahme: $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$



$$\frac{\hat{u}}{\hat{i}_C} = \frac{1}{\omega \cdot C} = X_C \Leftarrow$$

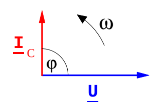
$$i_C = C \cdot \frac{d\left(\hat{u} \cdot \sin(\omega t)\right)}{d\,t}$$

$i_C = C \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$

mit $C \cdot \hat{u} \cdot \omega = \hat{i}_C$

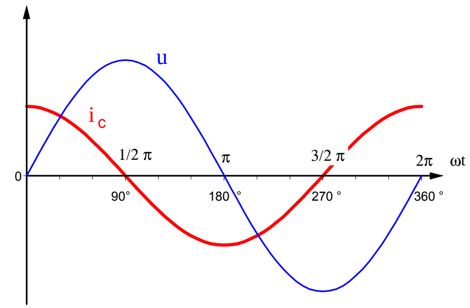
$i_C = \hat{i}_C \cdot \cos(\omega t)$

I ...Stromzeiger
U ...Spannungszeiger



$\varphi_C = 90°_{el}$ ($\hat{=}\ \pi / 2$)

Die Spannung eilt dem Strom um 90° **nach**.



$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ $i_C = \hat{i}_C \cdot \cos(\omega t)$

- Kapazitiver Blind**widerstand**:

$$X_C = \frac{\hat{u}}{\hat{i}_C} = \frac{U}{I_C}$$

wobei : $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$

- Kapazitiver Blind**leitwert**:

$$B_C = \frac{1}{X_C}$$

- Wirkleistung :

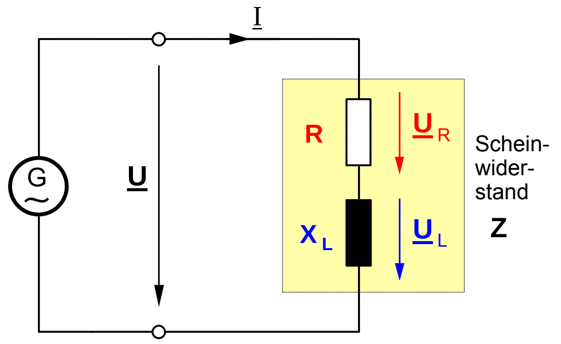
$P_C = 0$

- Blindleistung :

$Q_C = U \cdot I_C$

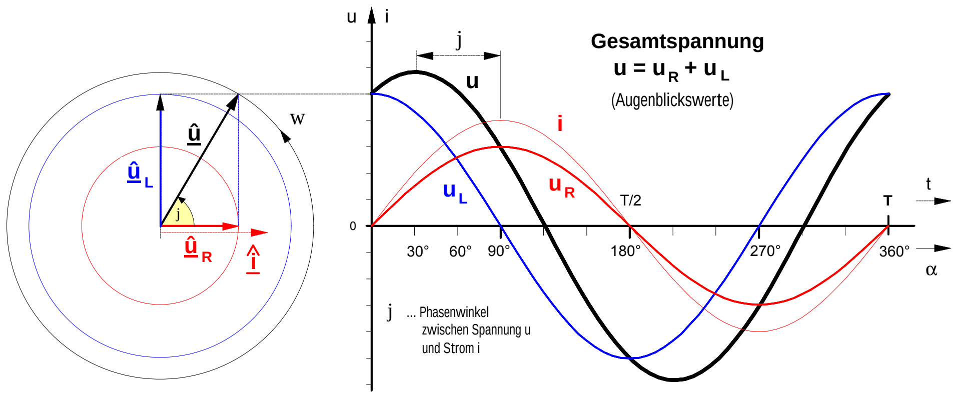
$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \;;\; I_C = \frac{\hat{i}_C}{\sqrt{2}}$$

1. Reihenschaltung aus ohmschem Widerstand R und induktivem Widerstand X_L



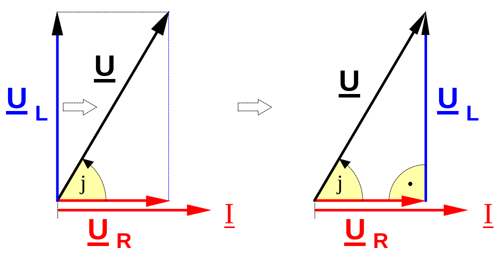
Liegt an einer Wechselspannungsquelle ein **ohmscher Widerstand R** mit einem **induktiven Widerstand X_L** in Reihe, so fließt durch beide Wechselstromwiderstände **der gleiche Wechselstrom** mit den Augenblickswerten **i** (bzw. dem Effektivwert I). Die dadurch an dem **ohmschen** Widerstand **R** hervorgerufene Teilspannung mit den Augenblickswerten u_R (bzw. dem Effektivwert U_R) hat den gleichen Zeitverlauf wie der Strom **i**. Die Teilspannung an dem **induktiven** Widerstand X_L mit den Augenblickswerten u_L (bzw. dem Effektivwert U_L) hingegen **eilt** gegenüber dem Strom **i** und damit auch gegenüber der Spannung u_R um **90°** (= π/2) **voraus**.

a) Zeigerdiagramm mit Amplitudenzeigern und Liniendiagramm



Zur Ermittlung des Zeitverlaufs der Gesamtspannung **u** müssen die Augenblickswerte der Teilspannungen u_R und u_L **algebraisch** addiert werden. Das Ergebnis dieser Addition ist im Liniendiagramm dargestellt. Das **Zeiger**diagramm ergibt sich aus dem Liniendiagramm. Es verdeutlicht, daß der Zeiger **û** der Gesamtspannung durch eine **geometrische** Addition der Zeiger $\hat{u}_R$ und $\hat{u}_L$ ermittelt werden kann.

b) Darstellung der Wechselspannungen als Effektivwertzeiger



Zeigerdiagramm mit **Effektiv**werten

Durch Parallelverschiebung des Zeigers $\underline{U}_L$ ergibt sich ein **rechtwinkliges** Spannungszeiger-Dreieck.

- Der **Betrag** (Effektivwert) **U** des Zeigers der **Gesamtspannung** läßt sich nach dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}} \quad \textbf{(1)}$$

Außerdem gilt gemäß der Winkelfunktionen: $U_R = U \cdot \cos\varphi$ bzw. $U_L = U \cdot \sin\varphi$

- Bestimmung der Beträge (Effektivwerte) der **Teilspannungen**

$$\boxed{U_R = I \cdot R} \quad \textbf{(2)} \qquad \boxed{U_L = I \cdot X_L} \quad \textbf{(3)}$$

c) Das sog. "Ohmsche Gesetz" des Wechselstromkreises

Setzt man in die Gleichung (**1**) die Gleichungen (**2**) und (**3**) ein, so ergibt sich:

$$U = \sqrt{(I \cdot R)^2 + (I \cdot X_L)^2} = \sqrt{I^2 \cdot (R^2 + X_L^2)} = \sqrt{I^2} \cdot \sqrt{(R^2 + X_L^2)}$$

$$U = I \cdot \sqrt{(R^2 + X_L^2)} \quad \text{mit} \quad \sqrt{(R^2 + X_L^2)} = Z \;\; (\text{"Scheinwiderstand"}) \Rightarrow U = I \cdot Z$$

$$\boxed{I = \frac{U}{Z}}$$

Der Ausdruck $\sqrt{R^2 + X_L^2}$ stellt einen Widerstand dar. Man bezeichnet ihn als **Scheinwiderstand Z**.

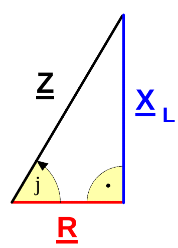
d) Das sog. Widerstandsdreieck und der Phasenwinkel j

- **Scheinwiderstand**

$$\boxed{Z = \sqrt{(R^2 + X_L^2)}}$$

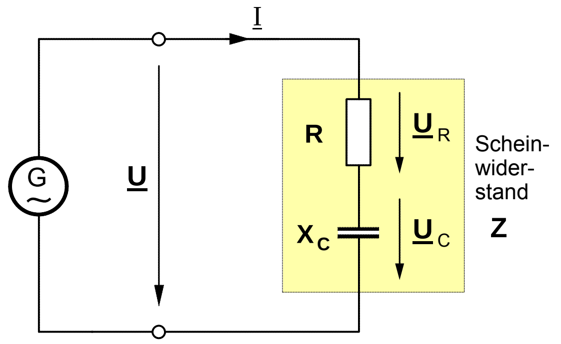
- **Phasenwinkel** zwischen Spannung **U** und Strom **I**

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{X_L}{R}} \quad \text{wobei} \quad X_L = \omega \cdot L \quad \text{und} \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$



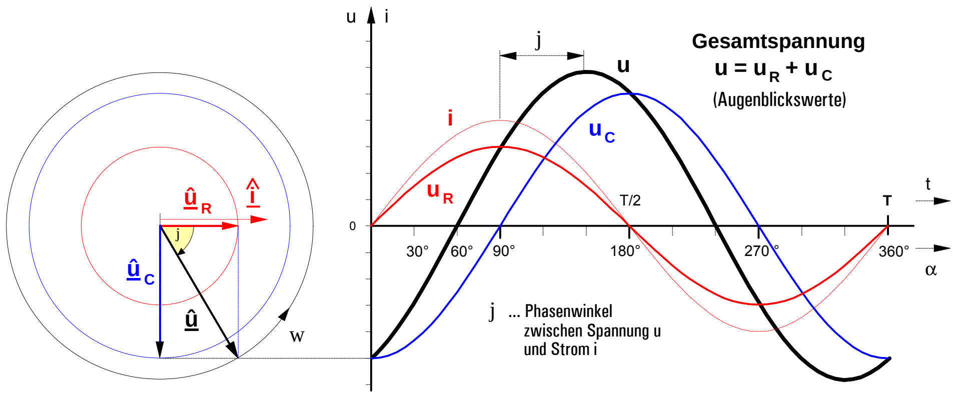
Die Definition des Scheinwiderstandes **Z** legt es nahe, **Z** als Hypotenuse sowie **R** und X_L als Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks darzustellen. Daraus ergibt sich das nebenstehende Dreieck mit den Widerstands**operatoren** $\underline{R}$, $\underline{X}_L$ und $\underline{Z}$.

2. **Reihenschaltung** aus **ohmschem Widerstand R** und **kapazitivem Widerstand X_C**



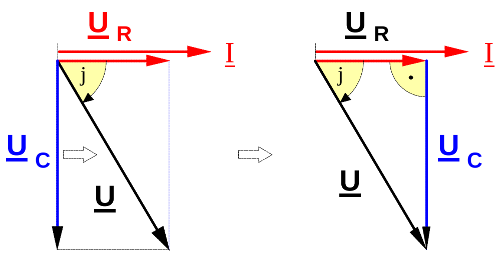
Liegt an einer Wechselspannungsquelle ein **ohmscher Widerstand R** mit einem **kapazitivem Widerstand X_C** in Reihe, so fließt auch hier durch beide Wechselstromwiderstände **der gleiche Wechselstrom** mit den Augenblickswerten **i** (bzw. dem Effektivwert I). Die dadurch an dem **ohmschen** Widerstand **R** hervorgerufene Teilspannung mit den Augenblickswerten $\mathbf{u_R}$ (bzw. dem Effektivwert $\mathbf{U_R}$) hat wiederum den gleichen Zeitverlauf wie der Strom **i**. Die Teilspannung an dem **kapazitivem** Widerstand X_C mit den Augenblickswerten $\mathbf{u_C}$ (bzw. dem Effektivwert U_C) indessen **eilt** gegenüber dem Strom **i** und damit auch gegenüber der Spannung $\mathbf{u_R}$ um **90°** (= $\pi/2$) **nach**.

a) Zeigerdiagramm mit Amplitudenzeigern und Liniendiagramm



Wiederum müssen zur Darstellung des Zeitverlaufs der **Gesamtspannung u** im Liniendiagramm die Augenblickswerte der Teilspannungen $\mathbf{u_R}$ und $\mathbf{u_C}$ **algebraisch** addiert werden. Das daraus sich ergebende **Zeiger**diagramm macht auch hier wieder deutlich, daß der Zeiger **û** der Gesamtspannung durch eine **geometrische** Addition der Zeiger **û**$_R$ und **û**$_C$ ermittelt werden kann.

b) Darstellung der Wechselspannungen als Effektivwertzeiger



Zeigerdiagramm mit **Effektiv**werten

Durch Parallelverschiebung des Zeigers $\underline{U}_C$ ergibt sich ein **rechtwinkliges** Spannungszeiger-Dreieck.

- Der **Betrag** (Effektivwert) **U** des Zeigers der **Gesamtspannung** läßt sich wiederum nach dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$U^2 = U_R^2 + U_C^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}} \quad \mathbf{(1)}$$

Außerdem gilt gemäß der Winkelfunktionen: $U_R = U \cdot \cos\varphi$ bzw. $U_C = U \cdot \sin\varphi$

- Bestimmung der Beträge (Effektivwerte) der **Teilspannungen**

$$\boxed{U_R = I \cdot R} \quad \mathbf{(2)} \qquad \boxed{U_C = I \cdot X_C} \quad \mathbf{(3)}$$

c) Das sog. "Ohmsche Gesetz" des Wechselstromkreises

Setzt man in die Gleichung (**1**) die Gleichungen (**2**) und (**3**) ein, so ergibt sich:

$$U = \sqrt{(I \cdot R)^2 + (I \cdot X_C)^2} = \sqrt{I^2 \cdot (R^2 + X_C^2)} = \sqrt{I^2} \cdot \sqrt{(R^2 + X_C^2)}$$

$$U = I \cdot \sqrt{(R^2 + X_C^2)} \quad \text{mit} \quad \sqrt{(R^2 + X_C^2)} = Z \ \text{("Scheinwiderstand")} \Rightarrow U = I \cdot Z$$

$$\boxed{I = \frac{U}{Z}}$$

Der Ausdruck $\sqrt{R^2 + X_C^2}$ stellt wiederum einen Widerstand dar. Auch ihn bezeichnet man als **Scheinwiderstand Z.**

d) Das sog. Widerstandsdreieck und der Phasenwinkel j

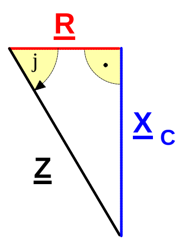
- **Scheinwiderstand**

$$\boxed{Z = \sqrt{(R^2 + X_C^2)}}$$

- **Phasenwinkel** zwischen Spannung **$\underline{U}$** und Strom **$\underline{I}$**

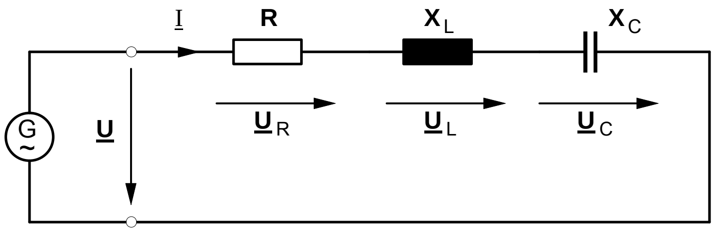
$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{X_C}{R}} \quad \text{wobei} \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

und $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$



Auch diese Definition des Scheinwiderstandes **Z** legt es nahe, **Z** als Hypotenuse sowie **R** und $\mathbf{X_C}$ als Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks darzustellen. Daraus ergibt sich das nebenstehende Dreieck mit den Widerstands**operatoren** $\underline{\mathbf{R}}$, $\underline{\mathbf{X}}_C$ und $\underline{\mathbf{Z}}$.

3. **Reihenschaltung** aus **ohmschem Widerstand R**, **induktivem Widerstand X_L** und **kapazitivem Widerstand X_C** (Reihenschwingkreis)



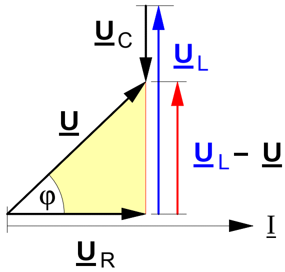
Beispiele:

1. **R** = 400 Ω **L** = 5,093 H **C** = 2,45 μF
   U = 110 V **f** = 50 Hz
2. **R** = 200 Ω **L** = 1,973 H **C** = 3,98 μF
   U = 220 V **f** = 50 Hz

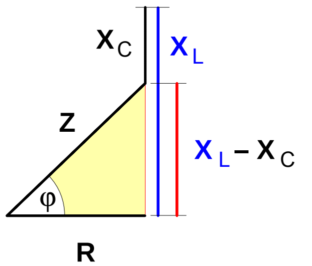
Berechnen Sie jeweils U_R , U_L und U_C .

· **Spannungszeiger**-Diagramme	· **Widerstandsoperatoren**-Diagramme

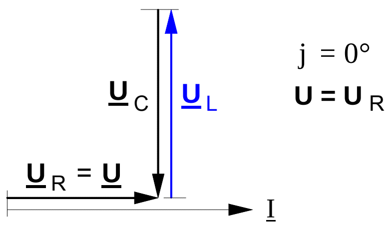
1. Überwiegend **induktiv** (U_L > U_C)



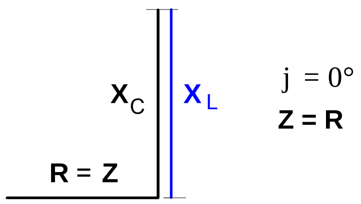
1. Überwiegend **induktiv** (X_L > X_C)



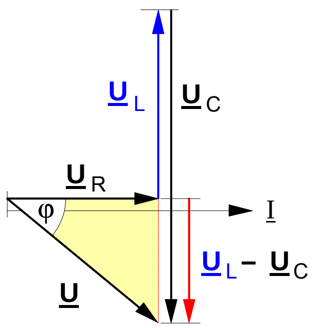
2. **Resonanzfall** (U_L = U_C)



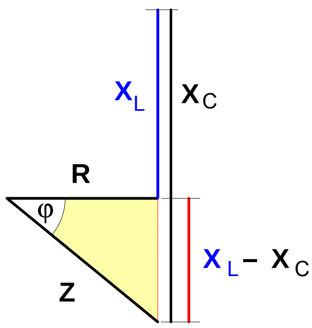
2. **Resonanzfall** (X_L = X_C)



3. Überwiegend **kapazitiv** (U_C > U_L)



3. Überwiegend **kapazitiv** (X_C > X_L)



► Für **alle drei Fälle** gilt:

$$\boxed{U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

$$\boxed{U_R = I \cdot R} \quad \boxed{U_L = I \cdot X_L} \quad \boxed{U_C = I \cdot X_C}$$

► Für **alle drei Fälle** gilt:

$$\boxed{Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$X_L = \omega \cdot L$$

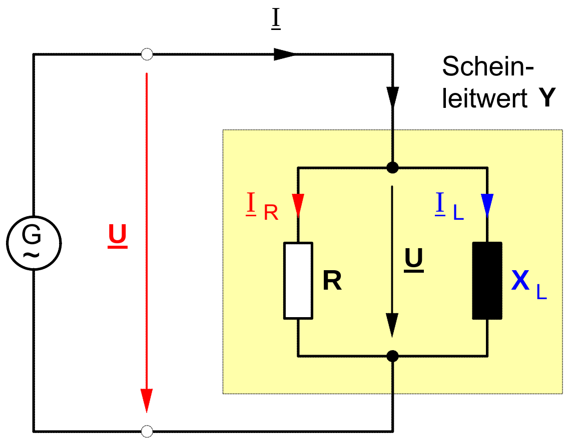
$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

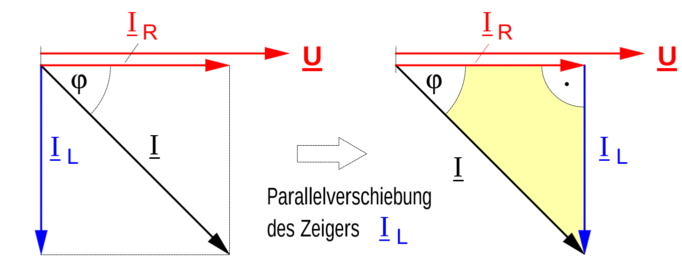
$$\boxed{I = \frac{U}{Z}} \quad \boxed{\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R}}$$

1. Parallelschaltung aus ohmschem Widerstand R und induktivem Widerstand X_L

Wird an eine Wechselspannungsquelle **parallel** zu einem **ohmschen Widerstand R** ein **induktiver Widerstand** $\mathbf{X_L}$ angeschlossen, so liegt an beiden Wechselstromwiderständen **die gleiche Wechselspannung** $\underline{U}$ (mit dem Effektivwert **U**). Der dadurch in dem **ohmschen** Widerstand **R** hervorgerufene Teilstrom $\underline{I}_R$ (mit dem Effektivwert I_R) hat den gleichen Zeitverlauf wie die Spannung $\underline{U}$. Der Teilstrom $\underline{I}_L$ (mit dem Effektivwert I_L) in dem **induktiven** Widerstand $\mathbf{X_L}$ hingegen **eilt** gegenüber der Spannung $\underline{U}$ und damit auch gegenüber dem Strom $\underline{I}_R$ um **90°** (= π/2) **nach**.



a) Zeigerdiagramm mit Effektivwertzeigern



- **Betrag** (Effektivwert) I des **Gesamtstrom**-Zeigers

$$\boxed{I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}} \quad \textbf{(1)}$$

wobei:

$I_R = I \cdot \cos\varphi$

$I_L = I \cdot \sin\varphi$

- Bestimmung der Beträge (Effektivwerte) der **Teilströme** mit Widerständen und Leitwerten

$\boxed{I_R = \frac{U}{R}}$ mit dem **ohmschen Leitwert** $\boxed{\frac{1}{R} = G}$ gilt dann: $\boxed{I_R = U \cdot G}$ **(2)**

$\boxed{I_L = \frac{U}{X_L}}$ mit dem **induktiven Leitwert** $\boxed{\frac{1}{X_L} = B_L}$ gilt dann: $\boxed{I_L = U \cdot B_L}$ **(3)**

b) Das sog. "Ohmsche Gesetz" des Wechselstromkreises mit Leitwerten

Setzt man in die Gleichung (**1**) die Gleichungen (**2**) und (**3**) ein, so ergibt sich:

$$I = \sqrt{(U \cdot G)^2 + (U \cdot B_L)^2} = \sqrt{U^2 \cdot (G^2 + B_L^2)} = \sqrt{U^2} \cdot \sqrt{(G^2 + B_L^2)}$$

$$I = U \cdot \sqrt{(G^2 + B_L^2)} \quad \text{mit} \quad \sqrt{(G^2 + B_L^2)} = Y \quad (\text{"Scheinleitwert"}) \Rightarrow$$

$$\boxed{I = U \cdot Y} \quad \textbf{(4)}$$

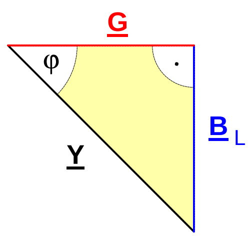
$$\text{mit} \quad Y = \frac{1}{Z} \quad \textbf{(5)}$$

Der Ausdruck $\sqrt{G^2 + B_L^2}$ stellt einen Leitwert dar. Man bezeichnet ihn als **Scheinleitwert Y**. Der Kehrwert **1/Y** des Scheinleitwertes ist der Scheinwiderstand **Z** der Parallelschaltung. Setzt man für den Scheinleitwert **Y** in Gleichung (**4**) die Gleichung (**5**) ein, so ergibt sich mit Gleichung (**6**) das "Ohmsche Gesetz" des Wechselstromkreises in der bereits bekannten Form.

$$\boxed{I = \frac{U}{Z}} \quad \textbf{(6)}$$

c) Scheinleitwert Y , Phasenwinkel und Scheinwiderstand Z

Auch die Definition des Scheinleitwertes **Y** legt es nahe, **Y** als Hypotenuse sowie **G** und $\mathbf{B_L}$ als Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Leitwert**operatoren** $\underline{G}$, $\underline{B}_L$ und $\underline{Y}$ darzustellen (siehe die Abb. rechts).



Leitwertdreieck

- **Scheinleitwert**

$$\boxed{Y = \sqrt{(G^2 + B_L^2)}}$$

- **Phasenwinkel** zwischen Spannung $\underline{U}$ und Strom $\underline{I}$

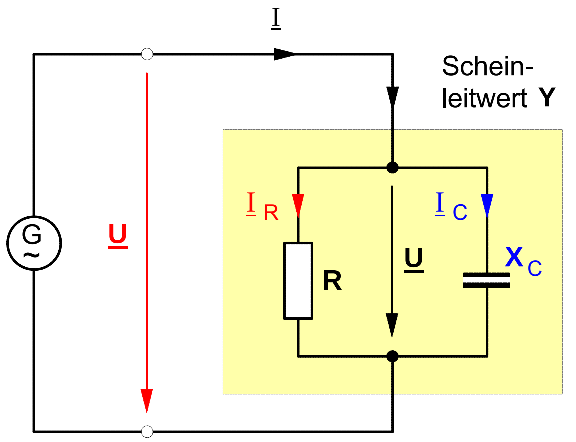
$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{B_L}{G}}$$

wobei $B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega \cdot L}$ und $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

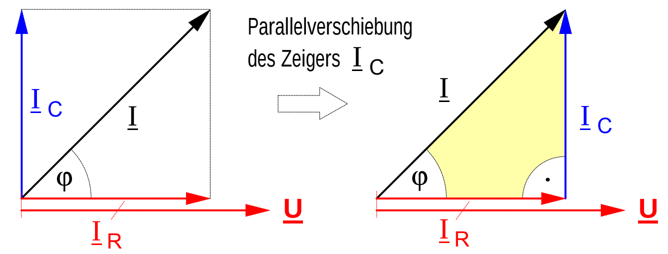
- **Scheinwiderstand** Mit $Z = \frac{1}{Y}$ ergibt sich: $\boxed{Z = \frac{1}{\sqrt{G^2 + B_L^2}}}$ wobei $G = \frac{1}{R}$ und $B = \frac{1}{X_L}$

2. Parallelschaltung aus ohmschem Widerstand R und kapazitivem Widerstand X_C

Wird an eine Wechselspannungsquelle **parallel** zu einem **ohmschen Widerstand R** ein **kapazitiver Widerstand** X_C angeschlossen, so liegt an beiden Wechselstromwiderständen **die gleiche Wechselspannung** $\underline{U}$ (mit dem Effektivwert **U**). Der dadurch in dem **ohmschen** Widerstand **R** hervorgerufene Teilstrom $\underline{I}_R$ (mit dem Effektivwert I_R) hat den gleichen Zeitverlauf wie die Spannung $\underline{U}$. Der Teilstrom $\underline{I}_C$ (mit dem Effektivwert I_C) in dem **kapazitiven** Widerstand X_C hingegen **eilt** gegenüber der Spannung $\underline{U}$ und damit auch gegenüber dem Strom $\underline{I}_R$ um **90°** (= $\pi/2$) **voraus**.



a) Zeigerdiagramm mit Effektivwertzeigern



- **Betrag** (Effektivwert) I des **Gesamtstrom**-Zeigers

$$\boxed{I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}} \quad (\mathbf{1})$$

wobei:

$$I_R = I \cdot \cos\varphi$$

$$I_C = I \cdot \sin\varphi$$

- Bestimmung der Beträge (Effektivwerte) der **Teilströme** mit Widerständen und Leitwerten

$\boxed{I_R = \dfrac{U}{R}}$ mit dem **ohmschen Leitwert** $\boxed{\dfrac{1}{R} = G}$ gilt dann: $\boxed{I_R = U \cdot G}$ (**2**)

$\boxed{I_C = \dfrac{U}{X_C}}$ mit dem **kapazitiven Leitwert** $\boxed{\dfrac{1}{X_C} = B_C}$ gilt dann: $\boxed{I_C = U \cdot B_C}$ (**3**)

b) Das sog. "Ohmsche Gesetz" des Wechselstromkreises mit Leitwerten

Setzt man in die Gleichung (**1**) die Gleichungen (**2**) und (**3**) ein, so ergibt sich:

$$I = \sqrt{(U \cdot G)^2 + (U \cdot B_C)^2} = \sqrt{U^2 \cdot (G^2 + B_C^2)} = \sqrt{U^2} \cdot \sqrt{(G^2 + B_C^2)}$$

$$I = U \cdot \sqrt{(G^2 + B_C^2)} \quad \text{mit} \quad \sqrt{(G^2 + B_C^2)} = Y \quad (\text{"Scheinleitwert"}) \Rightarrow$$

$$\boxed{I = U \cdot Y} \quad (\mathbf{4})$$

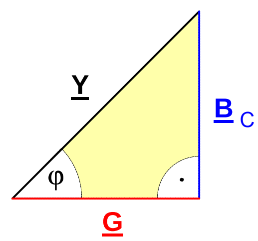
$$\text{mit} \quad Y = \frac{1}{Z} \quad (\mathbf{5})$$

Der Ausdruck $\sqrt{G^2 + B_C^2}$ stellt einen Leitwert dar. Man bezeichnet ihn als **Scheinleitwert Y**. Der Kehrwert **1/Y** des Scheinleitwertes ist der Scheinwiderstand **Z** der Parallelschaltung. Setzt man für den Scheinleitwert **Y** in Gleichung (**4**) die Gleichung (**5**) ein, so ergibt sich mit Gleichung (**6**) das "Ohmsche Gesetz" des Wechselstromkreises in der bereits bekannten Form.

$$\boxed{I = \frac{U}{Z}} \quad (\mathbf{6})$$

c) Scheinleitwert Y , Phasenwinkel und Scheinwiderstand Z

Auch die Definition des Scheinleitwertes **Y** legt es nahe, **Y** als Hypotenuse sowie **G** und B_C als Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Leitwert**operatoren** $\underline{G}$, $\underline{B}_C$ und $\underline{Y}$ darzustellen (siehe die Abb. rechts).



Leitwertdreieck

- **Scheinleitwert**

$$\boxed{Y = \sqrt{(G^2 + B_C^2)}}$$

- **Phasenwinkel** zwischen Spannung $\underline{U}$ und Strom $\underline{I}$

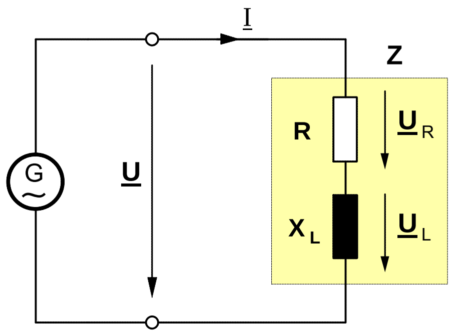
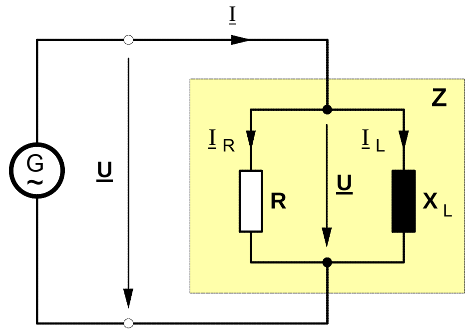
$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{B_C}{G}}$$

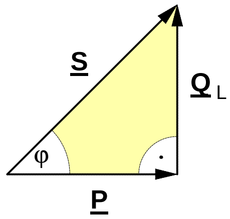
wobei $B_C = \dfrac{1}{X_C} = \omega \cdot C$ und $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

- **Scheinwiderstand** Mit $Z = \dfrac{1}{Y}$ ergibt sich: $\boxed{Z = \dfrac{1}{\sqrt{G^2 + B_C^2}}}$ wobei $G = \dfrac{1}{R}$ und $B = \dfrac{1}{X_C}$

Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name:	WT-14C1F.DOC - 30.05.03
Arbeitsblatt Nr. **14 c)** : **Wechselstromleistung**		Seite **1**

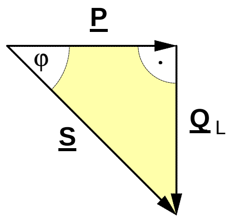
1. Wechselstromleistung in Schaltungen mit ohmschen und induktiven Widerständen

a) Reihenschaltung aus **R** und $\mathbf{X_L}$		**b) Parallelschaltung** aus **R** und $\mathbf{X_L}$
		
$P = U_R \cdot I$ in W	⇦ **Wirkleistung** (in R) ⇨	$P = U \cdot I_R$ in W
$Q_L = U_L \cdot I$ in var	⇦ **Induktive Blindleistung** (in X_L) ⇨	$Q_L = U \cdot I_L$ in var
$S = U \cdot I$ in VA	⇦ **Scheinleistung** (in Z) ⇨	$S = U \cdot I$ in VA

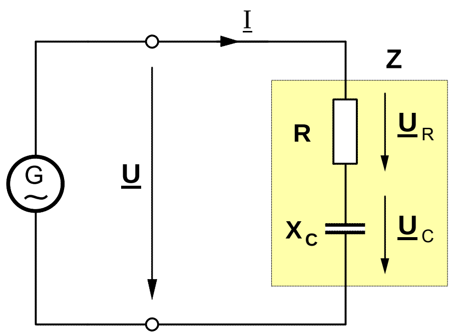
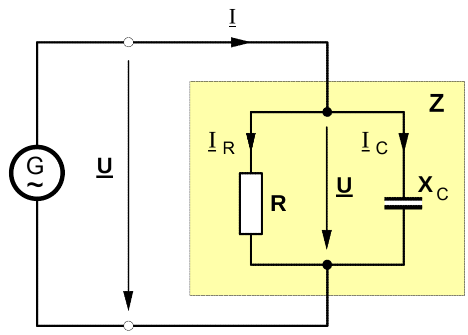


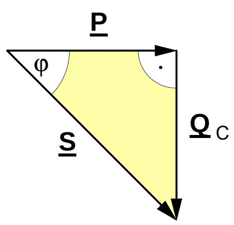
Gemäß dem Leistungszeiger-Dreieck gilt für beide Schaltungen:

- **Wirkleistung**: $P = S \cdot \cos\varphi$
- **Blindleistung**: $Q_L = S \cdot \sin\varphi$
- **Scheinleistung**: $S = \sqrt{P^2 + Q_L^2}$



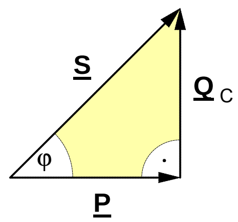
2. Wechselstromleistung in Schaltungen mit ohmschen und kapazitiven Widerständen

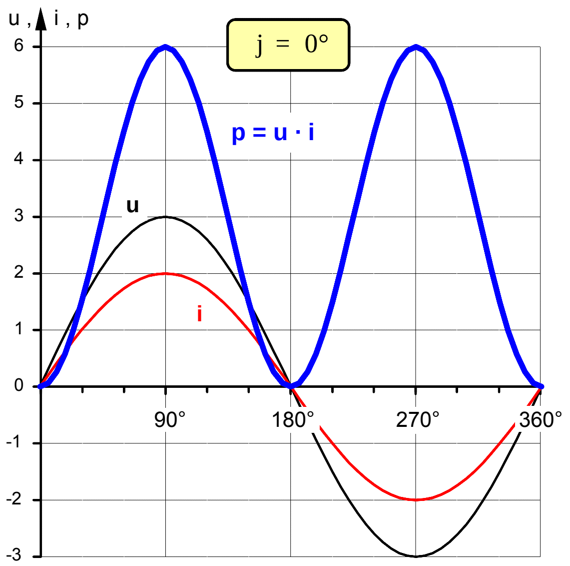
a) Reihenschaltung aus **R** und $\mathbf{X_C}$		**b) Parallelschaltung** aus **R** und $\mathbf{X_C}$
		
$P = U_R \cdot I$ in W	⇦ **Wirkleistung** (in R) ⇨	$P = U \cdot I_R$ in W
$Q_C = U_C \cdot I$ in var	⇦ **Kapazitive Blindleistung** (in X_C) ⇨	$Q_C = U \cdot I_C$ in var
$S = U \cdot I$ in VA	⇦ **Scheinleistung** (in Z) ⇨	$S = U \cdot I$ in VA

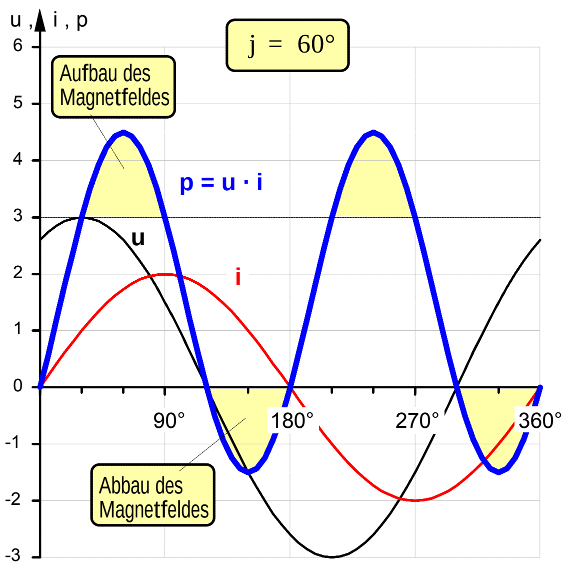


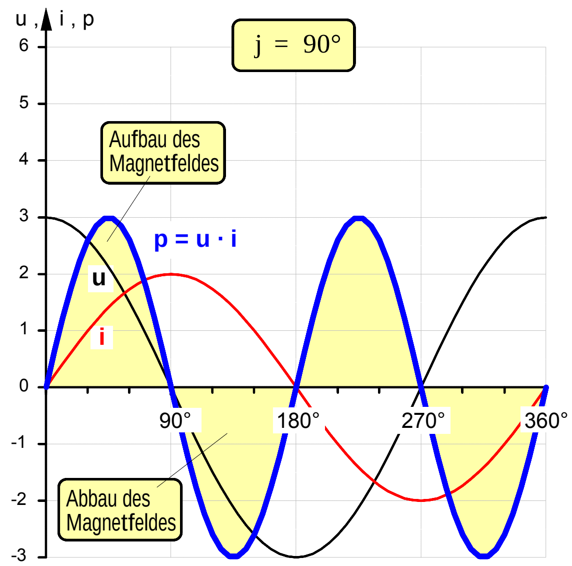
Gemäß dem Leistungszeiger-Dreieck gilt für beide Schaltungen:

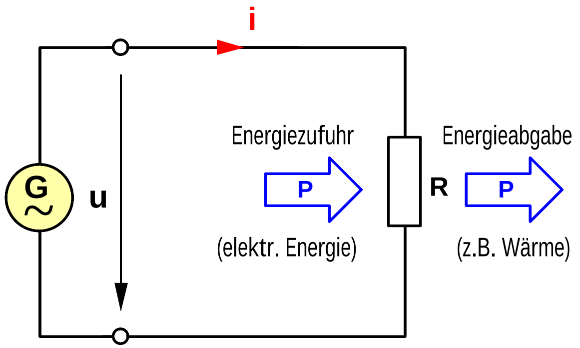
- **Wirkleistung**: $P = S \cdot \cos\varphi$
- **Blindleistung**: $Q_C = S \cdot \sin\varphi$
- **Scheinleistung**: $S = \sqrt{P^2 + Q_C^2}$

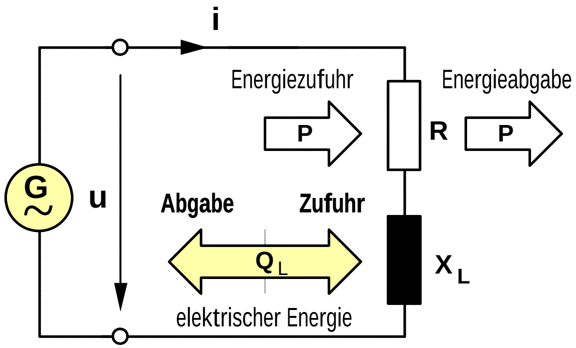


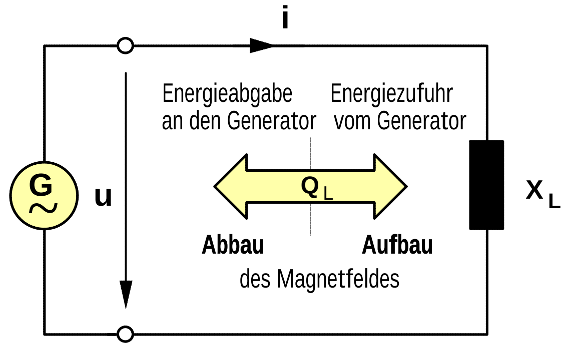












Wirkleistung:

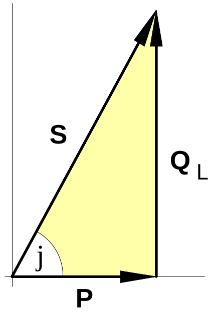
$\mathbf{P} = U \cdot I \cdot \cos 0° = \mathbf{U} \times I$

Blindleistung

$\mathbf{Q}_L = U \cdot I \cdot \sin 0° = \mathbf{0}$

Scheinleistung:

$\mathbf{S} = U \cdot I = \mathbf{P}$



Wirkleistung:

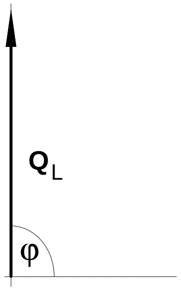
$P = U \cdot I \cdot \cos j$

Blindleistung:

$Q_L = U \cdot I \cdot \sin j$

Scheinleistung:

$S = U \cdot I$



Wirkleistung:

$\mathbf{P} = U \cdot I \cdot \cos 90° = \mathbf{0}$

Blindleistung:

$\mathbf{Q}_L = U \cdot I \cdot \sin 90° = \mathbf{U} \times I$

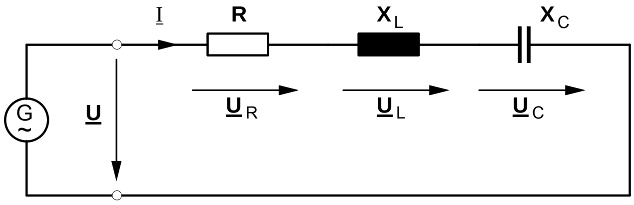
Scheinleistung:

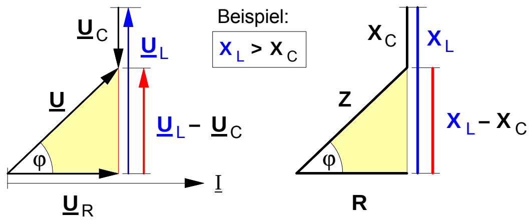
$\mathbf{S} = U \cdot I = \mathbf{Q}_L$

Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK** | Name: | WT-14D-1.DOC - 31.05.03

Arbeitsblatt Nr. **14 d)** : **Schaltungen** mit **Wechselstromwiderständen** (Übungen)

1. Reihenschaltung aus ohmschem, induktivem und kapazitivem Widerstand





$$\boxed{Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{X_L - X_C}{R}}$$

$$\boxed{I = \frac{U}{Z}}$$

Von der obigen Reihenschaltung sind folgende Daten bekannt:

R = **10** Ω **L** = **15** μH **C** = **1,0** μF **U** = **200** V **f** = **80** kHz

a) Berechnen Sie den Betrag **Z** des **Scheinwiderstandes**.

b) Berechnen Sie den **Phasenwinkel** j zwischen Gesamtspannung **U** und Strom I .

c) Berechnen Sie die Beträge **U_R** , **U_L** und **U_C** der **Teilspannungen** .

d) Zeichnen Sie ein maßstäbliches **Spannungszeigerdiagramm**.

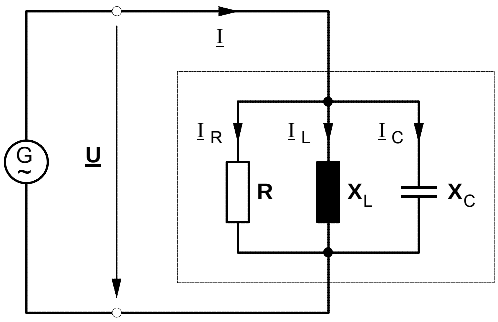
e) Berechnen Sie die **Resonanzfrequenz f_0** .

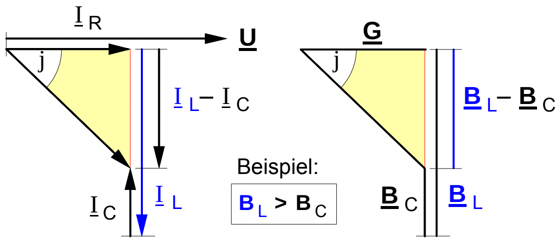
f) Berechnen Sie die **Wirkleistung P**, die **Blindleistung Q** und die **Scheinleistung S**.

[φ = 29° ; U_R = 174,5 V ; U_L = 131,5 V ; U_C = 34,8 V ; f_0 = 41,1 kHz ; P = 3,05 kW ; Q = 1,69 kvar ; S = 3,49 kVA]

---

2. Parallelschaltung aus ohmschem, induktivem und kapazitivem Widerstand





$$\boxed{Y^2 = G^2 + (B_L - B_C)^2}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{B_L - B_C}{G}}$$

$$\boxed{I = \frac{U}{Z} = U \cdot Y}$$

Von der obigen Parallelschaltung sind folgende Daten bekannt:

R = **100** Ω **L** = **0,1** H **C** = **32** μF I_L = **7,0** A **f** = **50** Hz

a) Berechnen Sie den Betrag I des **Gesamtstromes**.

b) Berechnen Sie die Beträge I_R und I_C der übrigen **Teilströme**.

c) Berechnen Sie den **Phasenwinkel** j zwischen Spannung **U** und Gesamtstrom I .

d) Zeichnen Sie ein maßstäbliches **Stromzeigerdiagramm**.

e) Berechnen Sie die **Resonanzfrequenz f_0** .

f) Auf welchen Wert **C'** muß die **Kapazität des Kondensators geändert** werden, damit der Phasenwinkel auf den Betrag φ' = **50°** verringert wird?

[I = 5,28 A ; I_R = 2,2 A ; I_C = 2,2 A ; φ = 65,4° ; f_0 = 88,97 Hz ; C' = 63,3 μF]

1. Definition der imaginären Zahl " j "

a) Vorbetrachtung: Begründung der **irrationalen Zahlen**

- **Forderung** : Eine Gleichung der Art $\boxed{x^2 = 9}$ sollte stets lösbar sein **!**

- **Lösbar** wird diese Gleichung durch die Einführung der **irrationalen Zahlen** ($\sqrt[2]{1}$, $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[2]{3}$, ... $\sqrt[2]{n}$) :

  Wenn $x^2 = 9$, dann ist $x = \sqrt[2]{9}$, denn definitionsgemäß ist $(\sqrt[2]{9})^2 = 9$.

- Die Zahl $\sqrt[2]{9}$ ist demnach eine Zahl, die mit dem Exponenten **2** potenziert (also einmal mit sich selbst multipliziert) die Zahl **9** ergibt , d.h.:

  Wenn $(\sqrt[2]{9})^2 = 9$, dann ist $\sqrt[2]{9} = 3$, denn bekanntlich ist $(3)^2 = 9$.

- **Allgemeiner :** Wenn $\boxed{x^a = b}$, dann ist $\boxed{x = \sqrt[a]{b}}$ wobei: $\boxed{\left(\sqrt[a]{b}\right)^a = b}$

  $\sqrt[a]{b}$ ist demnach definiert als eine Zahl, die mit dem Exponenten **a** potenziert –also **(a –1)**-mal mit sich selbst multipliziert– die Zahl **b** ergibt.

b) Begründung der **imaginären Zahl " j "**

- **Forderung** : Auch eine Gleichung der Art $\boxed{x^2 = -4}$ sollte ebenfalls stets lösbar sein **!**

- **Problem** : Gesucht wird demnach eine Zahl $x = \sqrt[2]{-4}$, die mit sich selbst multipliziert die ganze Zahl " **– 4** " ergibt. **Unter** den **reellen Zahlen** gibt es **keine solche Zahl !**

- **Lösbar** wird diese Gleichung durch die Einführung einer neuen Zahlenart, den sog. **"imaginären" Zahlen**:

  $$\pm\sqrt[2]{-4} = ? \Rightarrow \pm\sqrt[2]{-4} = \pm\sqrt[2]{4\cdot(-1)} = \pm\sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{-1}$$

  Die Zahl $\sqrt[2]{-1}$ ist definiert als die sog. imaginäre Zahl "**j**" (imaginär: nur in der Vorstellung vorhanden).

- **Definition :**

  $\boxed{j = \sqrt[2]{-1}}$ wobei stets $\boxed{j^2 = -1}$

> Die **imaginäre Zahl " j "** ist demnach definiert als eine Zahl, *die mit sich selbst multipliziert* die *reelle* Zahl **" – 1 "** ergibt.

- Lösung der Gleichung $\underline{x^2 = -4}$:

  $x_{1/2} = \pm\sqrt[2]{4} \cdot j$ $\qquad x_1 = +2j$ $\qquad x_2 = -2j$

- Probe : $(x_1)^2 = (+2)^2 \cdot (j)^2 = (+4) \cdot (-1) = -4$

  $(x_2)^2 = (-2)^2 \cdot (j)^2 = (+4) \cdot (-1) = -4$

2. Begründung und Darstellung **komplexer Zahlen**

Carl Friedrich ***Gauß*** (1777–1855)

Physiker und Mathematiker. 1807–1855 Professor für Astronomie in Göttingen. Gauß gilt als einer der größten Mathematiker aller Zeiten.

Nach ihm sind zahlreiche Begriffe aus Physik und Mathematik benannt, so z.B. die frühere Einheit der magnetischen Flußdichte (heute: Tesla), der bei den galvanomagnetischen Effekten beobachtete Gauß-Effekt, die Gauß-Epoche (paläomagnetische Epoche vor ca. 3,3-2,4 Millionen Jahren), die Gaußsche Methode zur Bestimmung der Horizontalintensität des Erdmagnetfelds, das Gaußsche Eliminationsverfahren (Gauß-Algorithmus) zur Berechnung der Lösung eines linearen Gleichungssystems, die Gaußsche Zahlenebene zur Darstellung komplexer Zahlen, die Gaußsche Differentialgleichung (hypergeometrische Differentialgleichung) und der Gaußsche Integralsatz (zur Umwandlung von Oberflächenintegralen in Volumenintegrale).

a) Beispiel :

$$x^2 - 12\,x + 52 = 0$$

Lösung :

$$x_{1/2} = +\frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 - 52} = +\,6 \pm \sqrt{36 - 52}$$

$$= +\,6 \pm \sqrt{-16}$$

$$= +\,6 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16}$$

$$x_{1/2} = \underbrace{\underbrace{+\,6}_{\text{Realteil}} \pm \underbrace{j \cdot 4}_{\text{Imaginärteil}}}_{\textbf{Komplexe Zahl}}$$

Ergebnis :

$$x_1 = 6 + j \cdot 4$$
$$x_2 = 6 - j \cdot 4$$

Definition : x_2 ist die **konjugiert** komplexe Zahl zu x_1 und x_1 ist die **konjugiert** komplexe Zahl zu x_2 .

b) Allgemeine arithmetische Darstellung einer komplexen Zahl $\underline{z}$

$$\boxed{\underline{z} = a + j\,b}$$

a ... **Realteil** der komplexen Zahl $\underline{z}$ kurz: $\mathbf{Re}\,(\underline{z})$

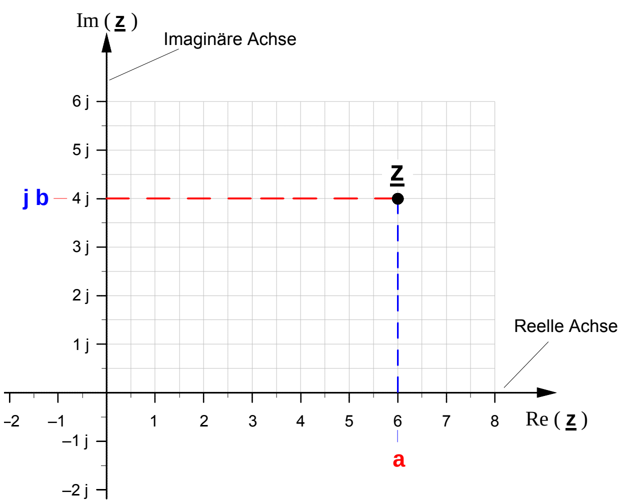
j b ... **Imaginärteil** der komplexen Zahl $\underline{z}$ kurz: $\mathbf{Im}\,(\underline{z})$

c) Graphische Darstellung einer komplexen Zahl $\underline{z}$ in der *Gauß*schen Zahlenebene

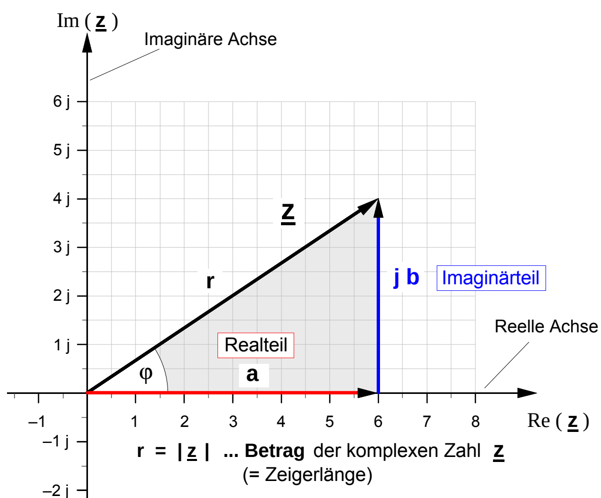
nach Carl Friedrich ***Gauß*** (1777–1855) :siehe Kastentext oben rechts

- Beispiel: $\underline{z} = 6 + j\,4$

- Darstellung **als Punkt**



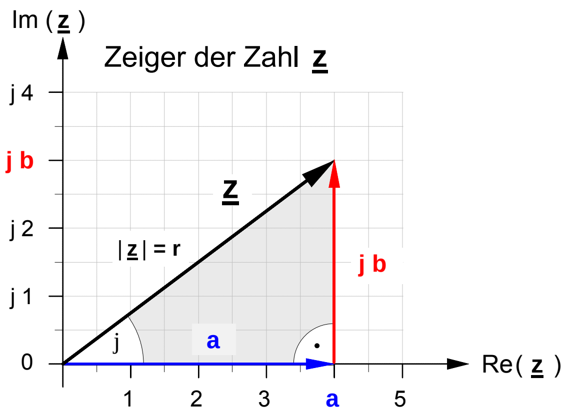
- Darstellung **als Zeiger**



r = | z | ... **Betrag** der komplexen Zahl $\underline{z}$ (= Zeigerlänge)

j ... Phasenwinkel

3. Darstellungsformen von komplexen Zahlen



Bedeutung der Formelzeichen:

$\underline{z}$ ... **komplexe Zahl**

|z| = r ... **Betrag** der komplexen Zahl $\underline{z}$
(⇒ Zeigerlänge = *Hypotenuse*)

j ... **Phasenwinkel** der komplexen Zahl $\underline{z}$

a ... **Betrag** des **Realteils** der komplexen Zahl $\underline{z}$
(⇒ Länge der *Gegenkathete* zu Winkel j)

b ... **Betrag** des **Imaginärteils** der komplexen Zahl $\underline{z}$
(⇒ Länge der *Ankathete* zu Winkel j)

a) Komponentenform einer komplexen Zahl $\underline{z}$ (Sie wird auch »arithmetische Form« genannt.)

$$\boxed{\underline{z} = a + j\,b}$$

a ... **reelle** Komponente der komplexen Zahl $\underline{z}$
jb ... **imaginäre** Komponente der komplexen Zahl $\underline{z}$

- **Anwendung**: Bei der **Addition** und **Subtraktion** von komplexen Zahlen **muß** die **Komponentenform** gewählt werden. Gleichwohl **können** komplexe Zahlen in Komponentenform auch multipliziert, dividiert oder potenziert werden.

b) Trigonometrische Form einer komplexen Zahl $\underline{z}$

- Komponentenform: $\underline{z} = a + j \cdot b$ mit $a = r \cdot \cos\varphi$ und $b = r \cdot \sin\varphi$ ergibt sich zunächst
  $\underline{z} = r \cdot \cos\varphi + j \cdot r \cdot \sin\varphi$ und nach Ausklammern von **r** schließlich die sog.
- »**Trigonometrische Form**« der komplexen Zahl $\underline{z}$:

$$\boxed{\underline{z} = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)}$$

►Für den *Betrag* **r** gilt:

$$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

►Für den *Phasenwinkel* φ gilt:

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{b}{a}}$$

- **Anwendung**: Die trigonometrische Form ist insbesondere geeignet für die **Umwandlung von der Exponentialform** (siehe **c) in die Komponentenform**, aber auch für die Multiplikation, Division und das Potenzieren von komplexen Zahlen.

c) Exponentialform einer komplexen Zahl $\underline{z}$

- Anknüpfend an die Potenzreihen-Theorie des englischen Mathematikers Brook Taylor (1685-1731) entwickelte der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) die nach ihm benannte

  Eulersche Gleichung. Sie lautet: $\cos x + j \cdot \sin x = e^{\,jx}$

- Setzt man für **x** = j ein und multipliziert beide Seiten der Eulerschen Gleichung mit **r** , so ergibt sich

  $$r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = r \cdot e^{\,j\varphi}$$

- Da es sich bei der **linken** Seite dieser Gleichung offensichtlich um eine **komplexe Zahl** $\underline{z}$ in **trigonometrischer Form** handelt, muß auch die **rechte** Seite eine komplexe Zahl $\underline{z}$ beinhalten, die sich jedoch in ihrer Form von den bisherigen Darstellungen unterscheidet. Wir bezeichnen sie als ↗

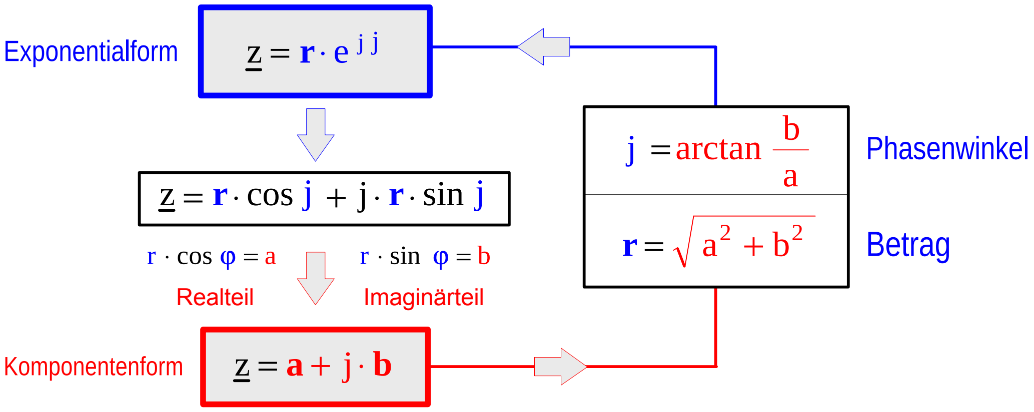
Leonhard Euler

- **Exponentialform** der komplexen Zahl $\underline{z}$:

$$\boxed{\underline{z} = r \cdot e^{\,j\varphi}}$$

- **Anwendung**: Die Exponentialform wird bevorzugt angewendet bei der **Multiplikation**, der **Division** und beim **Potenzieren** von komplexen Zahlen.

4. Schematische Darstellung des Verfahrens der **Umwandlung von der Exponentialform in die Komponentenform** und umgekehrt.



5. Rechenregeln für komplexe Zahlen

a) Addition komplexer Zahlen

Bei der **Addition** und **Subtraktion** von komplexen Zahlen **muß** die **Komponentenform** gewählt werden.

Wenn $\underline{z}_1 = a_1 + j\,b_1$ **und** $\underline{z}_2 = a_2 + j\,b_2$,
dann gilt für die **Summe** $\underline{z}_1 + \underline{z}_2$ definitionsgemäß:

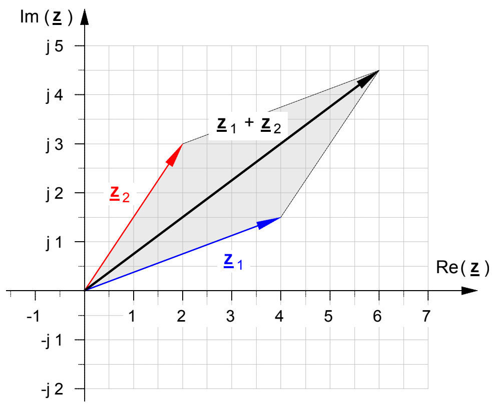
$$\boxed{\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + a_2) + j\,(b_1 + b_2)}$$

▶ Beispiel: gegeben: $\underline{z}_1 = 4 + j\,1{,}5$ und $\underline{z}_2 = 2 + j\,3$
gesucht: $\underline{z}_1 + \underline{z}_2$ **= ?**

- *Rechnerische* Lösung

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (4 + j\,1{,}5) + (2 + j\,3) = 4 + j\,1{,}5 + 2 + j\,3$$
$$= (4 + 2) + j\,(1{,}5 + 3)$$
$$\underline{\underline{\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 6 + j\,4{,}5}}$$

- *Graphische* Lösung:



b) Subtraktion komplexer Zahlen

Wenn $\underline{z}_1 = a_1 + j\,b_1$ **und** $\underline{z}_2 = a_2 + j\,b_2$,
dann gilt für die **Differenz** $\underline{z}_1 - \underline{z}_2$ definitionsgemäß:

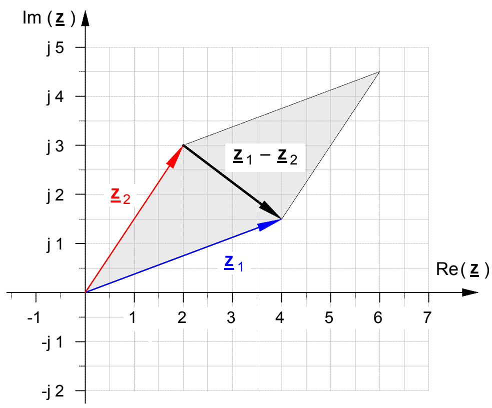
$$\boxed{\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (a_1 - a_2) + j\,(b_1 - b_2)}$$

▶ Beispiel: gegeben: $\underline{z}_1 = 4 + j\,1{,}5$ und $\underline{z}_2 = 2 + j\,3$
gesucht: $\underline{z}_1 - \underline{z}_2$ **= ?**

- *Rechnerische* Lösung

$$\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (4 + j\,1{,}5) - (2 + j\,3) \quad = 4 + j\,1{,}5 - 2 - j\,3$$
$$= \ (4 - 2) \quad + j\,(1{,}5 - 3) \ = 2 + j\,(-1{,}5)$$
$$\underline{\underline{\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = 2 - j\,1{,}5}}$$

- *Graphische* Lösung:



d) Multiplikation von komplexen Zahlen

· Multiplikation von komplexen Zahlen in Exponentialform

Wenn $\underline{z}_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ **und** $\underline{z}_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$, **dann** gilt für das **Produkt** $\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2$:

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2}$$

Nach der Potenzregel über die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis ergibt sich:

$$\boxed{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}}$$

· Multiplikation von komplexen Zahlen in Komponentenform

Wenn $\underline{z}_1 = a_1 + j\,b_1$ **und** $\underline{z}_2 = a_2 + j\,b_2$, **dann** ergibt sich durch *Ausmultiplizieren* für das **Produkt** :

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (a_1 + j\,b_1) \cdot (a_2 + j\,b_2) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot j\,b_2 + j\,b_1 \cdot a_2 + j\,b_1 \cdot j\,b_2$$ (Stets ist: **j · j = – 1 !!**)

Geordnet nach Real- und Imaginärteilen ergibt sich:

$$\boxed{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + j\,(a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)}$$

e) Division von komplexen Zahlen

• Division von komplexen Zahlen in Exponentialform

Wenn $\underline{z}_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ **und** $\underline{z}_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$, **dann** gilt für den **Quotienten** $\underline{z}_1 : \underline{z}_2$:

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{j\varphi_1}}{e^{j\varphi_2}}$$

Nach der Potenzregel über die Division von Potenzen mit gleicher Basis ergibt sich:

$$\boxed{\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

► Beispiel: gegeben: $\underline{z}_1 = 7{,}5 \cdot e^{-j30°}$ und $\underline{z}_1 = 2{,}5 \cdot e^{j60°}$

gesucht: **a)** $\underline{z}_p = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2$ **= ?** **b)** $\underline{z}_Q = \underline{z}_1 : \underline{z}_2$ **= ?** **c)** $\underline{z}_S = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$ **= ?**

· Division von komplexen Zahlen in Komponentenform

Wenn $\underline{z}_1 = a_1 + j\,b_1$ **und** $\underline{z}_2 = a_2 + j\,b_2$, **dann** erfolgt die **Division** $\underline{z}_1 : \underline{z}_2$ nach folgendem Verfahren:

(1) *Erweiterung* des Bruches mit der *konjugiert komplexen Zahl des Nenners* und anschließendem *Ausmultiplizieren von Zähler und Nenner* (Wobei stets **j · j = – 1** ist **!!**)

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)} \, \frac{\cdot (a_2 - jb_2)}{\cdot (a_2 - jb_2)} \qquad \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot jb_2 + jb_1 \cdot a_2 - jb_1 \cdot jb_2}{a_2 \cdot a_2 - a_2 \cdot jb_2 + jb_2 \cdot a_2 - jb_2 \cdot jb_2}$$

(2) *Ordnen* nach Realteilen und Imaginärteilen

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + jb_1 \cdot a_2 - ja_1 \cdot b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}}$$

(3) **Ergebnis**:

$$\boxed{\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \left(\frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}} \right) + j \cdot \left(\frac{b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}} \right)}$$

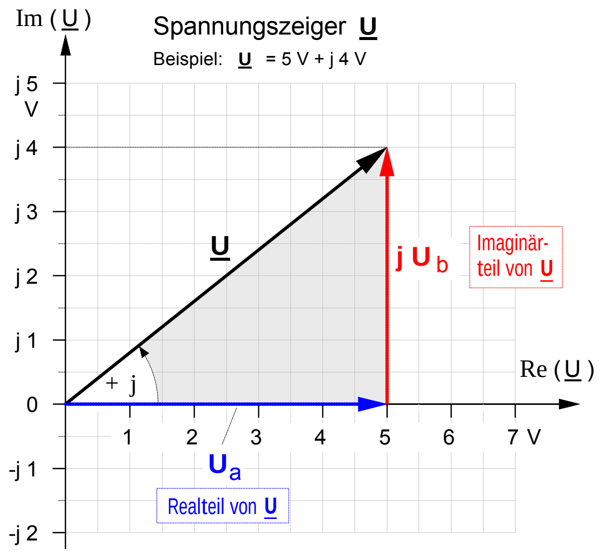
► Beispiele:

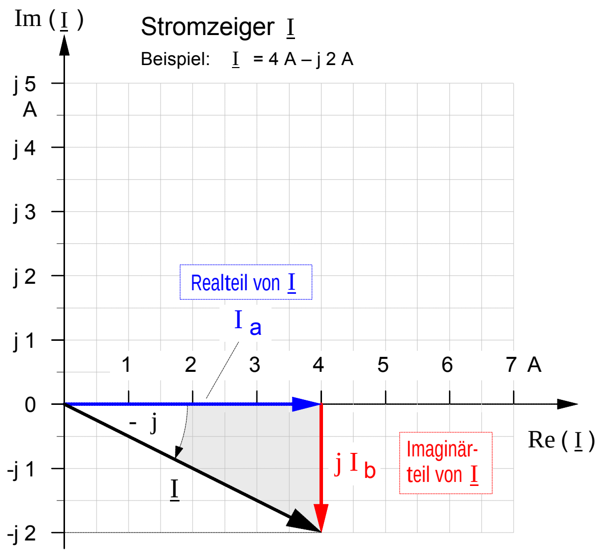
a) gegeben: $\underline{z}_1 = 4 + \mathbf{j}\,6$ und $\underline{z}_2 = 3 + \mathbf{j}\,2$ gesucht: $\underline{z}_Q = \underline{z}_1 : \underline{z}_2 = ?$

b) gegeben: $\underline{z}_1 = 1 + \mathbf{j}\,2$ und $\underline{z}_2 = 3 - \mathbf{j}$ gesucht: $\underline{z}_Q = \underline{z}_1 : \underline{z}_2 = ?$

Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name: WT-16A1F.DOC - 29.05.03
Arbeitsblatt Nr. **16 a)** :	**Komplexe Darstellung elektrischer Sinuswechselgrößen**

• Darstellung von **Spannungszeigern** und **Stromzeigern** in der **Gaußschen Zahlenebene**





1. **Komponentenform** der komplexen Darstellung sinusförmiger Wechselgrößen

$$\boxed{\underline{U} = U_a + j\,U_b}$$

$$\boxed{\underline{I} = I_a + j\,I_b}$$

Beispiel: $\underline{U} = 5\text{ V} + \mathbf{j}\,4\text{ V}$ $\qquad$ $\underline{I} = 4\text{ A} - \mathbf{j}\,2\text{ A}$

2. **Trigonometrische Form** der komplexen Darstellung sinusförmiger Wechselgrößen

$$\boxed{\underline{U} = U \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)}$$

$$\boxed{\underline{I} = I \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)}$$

- **Betrag**:

$$\boxed{U = \sqrt{U_a^{\,2} + U_b^{\,2}}}$$

$$\boxed{I = \sqrt{I_a^{\,2} + I_b^{\,2}}}$$

Beispiel: $U = \sqrt{(5\text{ V})^2 + (4\text{ V})^2} = 6{,}4\text{ V}$ $\qquad$ $I = \sqrt{(4\text{ A})^2 + (2\text{ A})^2} = 4{,}47\text{ A}$

- **Phasenwinkel**:

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{U_b}{U_a}}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{I_b}{I_a}}$$

Beispiel: $\varphi = \arctan\dfrac{4\text{ V}}{5\text{ V}} = 38{,}6°$ $\qquad$ $\varphi = -\arctan\dfrac{2\text{ A}}{4\text{ A}} = -26{,}56°$

3. **Exponentialform** der komplexen Darstellung sinusförmiger Wechselgrößen

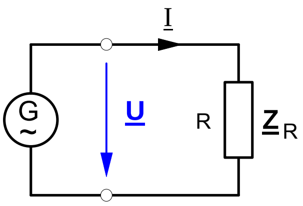
$$\boxed{\underline{U} = U \cdot e^{\,j\varphi}}$$

$$\boxed{\underline{I} = I \cdot e^{\,j\varphi}}$$

Beispiel: $\underline{U} = 6{,}4\text{ V} \cdot e^{\,j38{,}6°}$ $\qquad$ $\underline{I} = 4{,}47\text{ A} \cdot e^{\,-j\,26{,}56°}$

• Darstellung von **Wechselstromwiderständen** als **Operatoren** in der **Gaußschen Zahlenebene**

1. Der **Operator** des **ohmschen Widerstandes**



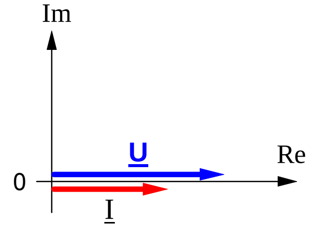
Ohmsches Gesetz:

$$\boxed{\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$$

► Annahme: $\underline{U} = U \cdot e^{j\,0°}$

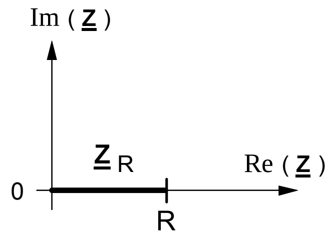
► Wegen des **ohmschen** Widerstandes ist der Strom phasengleich, d.h.:

$$\underline{I} = I \cdot e^{j\,0°}$$



► Und für den Operator des **ohmschen** Widerstandes ergibt sich:

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j\,0°}}{I \cdot e^{j\,0°}} = R \cdot e^{j\,0°} = R + j0$$



• **Exponentialform**:

$$\boxed{\underline{Z}_R = R \cdot e^{\,j\,0°} = R}$$

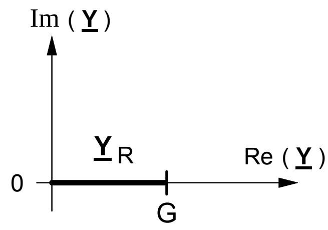
• **Komponentenform**:

$$\boxed{\underline{Z}_R = R + j\,0 = R}$$

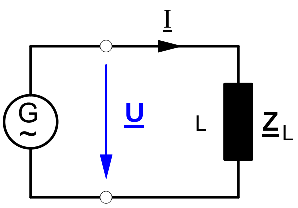
► Mit $\underline{Y}_R = \frac{1}{\underline{Z}_R} = \frac{1}{R \cdot e^{\,j\,0°}} = G \cdot e^{\,j\,0°} = G + j0$ ergibt sich für den

• **Wirkleitwert-Operator**:

$$\boxed{\underline{Y}_R = G \cdot e^{\,j\,0°} = G} \qquad G = \frac{1}{R} \qquad \boxed{\underline{Y}_R = G + j\,0 = G}$$



2. Der **Operator** des **induktiven Blindwiderstandes**



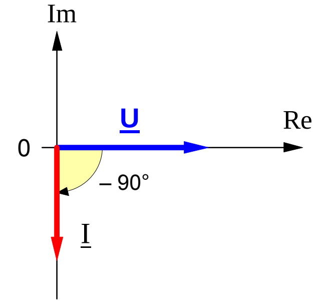
Ohmsches Gesetz:

$$\boxed{\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$$

► Annahme: $\underline{U} = U \cdot e^{j\,0°}$

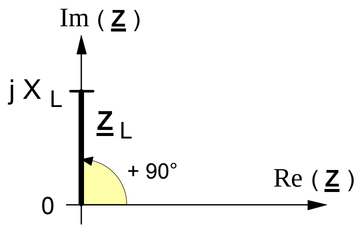
► Wegen des **induktiven** Widerstandes eilt der Strom um 90° nach, d.h.:

$$\underline{I} = I \cdot e^{-j\,90°}$$



► Und für den Operator des **induktiven** Widerstandes ergibt sich:

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{\,j\,0°}}{I \cdot e^{-j\,90°}} = X_L \cdot e^{+j\,90°} = 0 + jX_L$$



• **Exponentialform**:

$$\boxed{\underline{Z}_L = X_L \cdot e^{\,+j\,90°}} \qquad X_L = \omega \cdot L \text{ und } \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

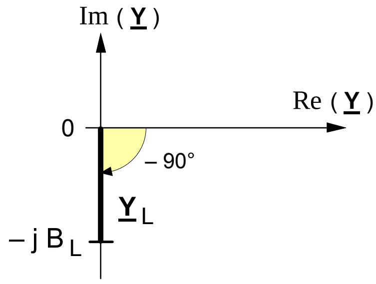
• **Komponentenform**:

$$\boxed{\underline{Z}_L = 0 + j\,X_L = +\,j\,X_L}$$

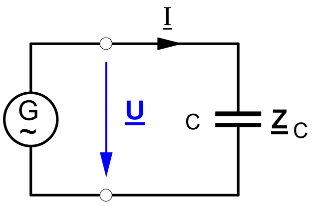
► Mit $\underline{Y}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} = \frac{1}{X_L \cdot e^{\,j\,90°}} = B_L \cdot e^{-j\,90°} = 0 - jB_L$ ergibt sich für den

• **Induktiven Blindleitwert-Operator**:

$$\boxed{\underline{Y}_L = B_L \cdot e^{\,-j\,90°}} \qquad B_L = \frac{1}{X_L} \qquad \boxed{\underline{Y}_L = 0 - j\,B_L = -\,j\,B_L}$$



3. Der **Operator** des **kapazitiven Blindwiderstandes**



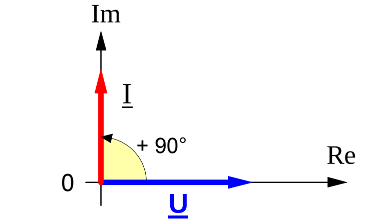
Ohmsches Gesetz:

$$\boxed{\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$$

► Annahme: $\underline{U} = U \cdot e^{\,j\,0^\circ}$

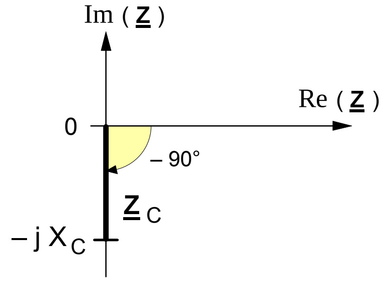
► Wegen des **kapazitiven** Widerstandes eilt der Strom um 90° voraus:

$$\underline{I} = I \cdot e^{+j\,90^\circ}$$



► Und für den Operator des **kapazitiven** Widerstandes ergibt sich:

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{\,j\,0^\circ}}{I \cdot e^{+j\,90^\circ}} = X_C \cdot e^{-j\,90^\circ} = 0 - j X_C$$



● **Exponentialform**:

$$\boxed{\underline{Z}_C = X_C \cdot e^{-j\,90^\circ}}$$

$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ und $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

● **Komponentenform**:

$$\boxed{\underline{Z}_C = 0 - j\,X_C = -\,j\,X_C}$$

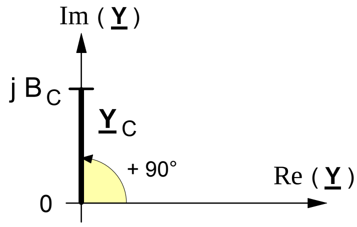
► Mit $\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{X_C \cdot e^{-j\,90^\circ}} = B_C \cdot e^{+j\,90^\circ} = 0 + j\,B_C$ ergibt sich für den

● **Kapazitiven Blindleitwert-Operator**:

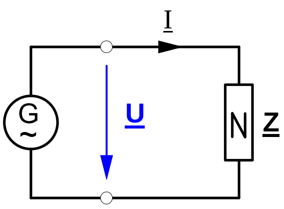
$$\boxed{\underline{Y}_C = B_C \cdot e^{+j\,90^\circ}}$$

$B_C = \frac{1}{X_C}$

$$\boxed{\underline{Y}_C = 0 + j\,B_C = +\,j\,B_C}$$



4. Der **Operator** des **Scheinwiderstandes** (allgemeiner Wechselstromwiderstand)

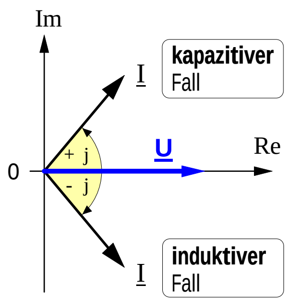


Ohmsches Gesetz:

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$$

► Annahme: $\underline{U} = U \cdot e^{\,j\,0^\circ}$

► Als allgemeiner Wechselstromwiderstand kann der Scheinwiderstand *außer* dem **ohmschen** Widerstandsanteil **R** *entweder* einen **induktiven** Widerstand **X_L** *oder* einen **kapazitiven** Widerstand **X_C** enthalten. Demnach sind prinzipiell **zwei Fälle** zu unterscheiden:



► Im **induktiven** Fall (d.h. **Z** mit **R** und **X_L**) **eilt der Strom nach**:

$$\underline{I} = I \cdot e^{-j\varphi} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{\,j\,0^\circ}}{I \cdot e^{-j\varphi^\circ}} = \frac{U}{I} \cdot e^{+j\varphi^\circ}$$

► Im **kapazitiven** Fall (d.h. **Z** mit **R** und **X_C**) **eilt der Strom voraus**:

$$\underline{I} = I \cdot e^{+j\varphi} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{\,j\,0^\circ}}{I \cdot e^{+j\varphi^\circ}} = \frac{U}{I} \cdot e^{-j\varphi^\circ}$$

● **Exponentialform** des Scheinwiderstandes

► Im **induktiven** Fall ist:

$$\boxed{\underline{Z} = Z \cdot e^{+j\varphi}}$$

$Z = \sqrt{R^2 + X_L^{\,2}}$

$\varphi = \arctan \frac{X_L}{R}$

► Im **kapazitiven** Fall ist:

$$\boxed{\underline{Z} = Z \cdot e^{-j\varphi}}$$

$Z = \sqrt{R^2 + X_C^{\,2}}$

$\varphi = \arctan \frac{X_C}{R}$

● **Komponentenform** des Scheinwiderstandes

► Im **induktiven** Fall ist:

$$\boxed{\underline{Z} = R + j\,X_L}$$

$R = Z \cdot \cos\varphi$

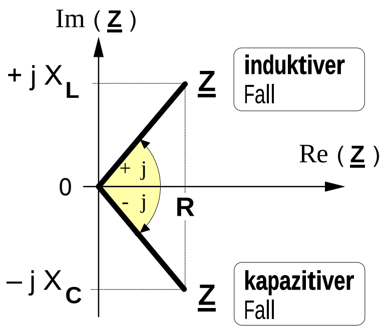
$X_L = Z \cdot \sin\varphi$

► Im **kapazitiven** Fall ist:

$$\boxed{\underline{Z} = R - j\,X_C}$$

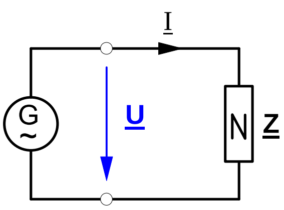
$R = Z \cdot \cos\varphi$

$X_C = Z \cdot \sin\varphi$



Operatoren des **Scheinwiderstandes** in der Gaußschen Ebene

5. Der **Operator** des **Scheinleitwertes** (allgemeiner Wechselstromleitwert)

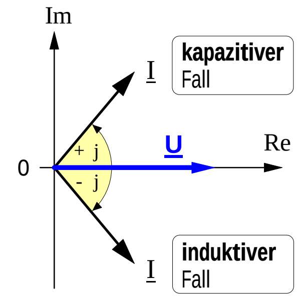


Ohmsches Gesetz:

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}}$$

► Annahme: $\underline{U} = U \cdot e^{\,j\,0°}$

► Als allgemeiner Wechselstromleitwert kann der Scheinleitwert *außer* dem **ohmschen** Leitwertanteil **G** *entweder* einen **induktiven** Leitwert B_L *oder* einen **kapazitiven** Leitwert B_C enthalten. Demnach sind prinzipiell **zwei Fälle** zu unterscheiden:



► Im **induktiven** Fall (d.h. $\underline{Y}$ mit **G** und B_L) **eilt der Strom nach**:

$$\underline{I} = I \cdot e^{-j\varphi} \quad \Rightarrow \quad \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I \cdot e^{-j\varphi°}}{U \cdot e^{\,j\,0°}} = \frac{I}{U} \cdot e^{-j\varphi°}$$

► Im **kapazitiven** Fall (d.h. $\underline{Y}$ mit **G** und B_C) **eilt der Strom voraus**:

$$\underline{I} = I \cdot e^{+j\varphi} \quad \Rightarrow \quad \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I \cdot e^{+j\varphi°}}{U \cdot e^{\,j\,0°}} = \frac{I}{U} \cdot e^{+j\varphi°}$$

• **Exponentialform** des Scheinleitwertes

► Im **induktiven** Fall ist:

$$\boxed{\underline{Y} = Y \cdot e^{-j\varphi}} \qquad Y = \sqrt{G^2 + B_L{}^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{B_L}{G}$$

► Im **kapazitiven** Fall ist:

$$\boxed{\underline{Y} = Y \cdot e^{+j\varphi}} \qquad Y = \sqrt{G^2 + B_C{}^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{B_C}{G}$$

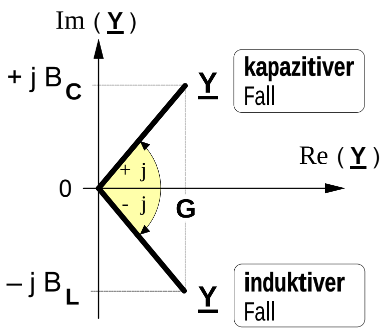
• **Komponentenform** des Scheinleitwertes

► Im **induktiven** Fall ist:

$$\boxed{\underline{Y} = G - j\,B_L} \qquad G = Y \cdot \cos\varphi \qquad B_L = Y \cdot \sin\varphi$$

► Im **kapazitiven** Fall ist:

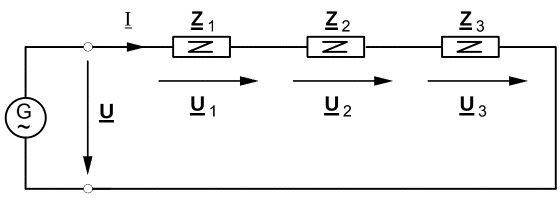
$$\boxed{\underline{Y} = G + j\,B_C} \qquad G = Y \cdot \cos\varphi \qquad B_C = Y \cdot \sin\varphi$$



Operatoren des **Scheinleitwertes** in der Gaußschen Ebene

6. Die **Grundschaltungen** mit **komplexen Wechselstromwiderständen**

a) Reihenschaltung



• **Maschenregel** (Zweites Kirchhoffsches Gesetz):

$$\boxed{\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \ldots}$$

• **Ohmsches Gesetz**:

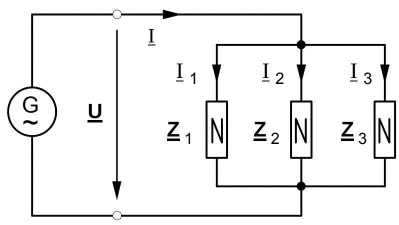
$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}}$$

$\underline{U}_1 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_1$	$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_2$	$\underline{U}_3 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_3$

• **Komplexer Gesamtwiderstand**:

$$\boxed{\underline{Z}_{ges} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \ldots}$$

b) Parallelschaltung



• **Knotenpunktregel** (Erstes Kirchhoffsches Gesetz):

$$\boxed{\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \ldots}$$

• **Ohmsches Gesetz**:

$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}}$$

$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1}$	$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2}$	$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3}$

• **Komplexer Gesamtleitwert**:

$$\boxed{\underline{Y}_{ges} = \frac{1}{\underline{Z}_{ges}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \ldots}$$

1. Von der Schaltung in **Bild 1** sind folgende Daten bekannt:

R_1 = 100 Ω **X_{L1} = 157** Ω **R_2 = 100** Ω **U = 220** V

Berechnen Sie

a) den komplexen Gesamtwiderstand $\underline{Z}$,
b) die Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}$ sowie
c) die Teilspannungen $\underline{U}_{R1}$ und $\underline{U}_{L1}$.
d) Zeichnen Sie ein maßstäbliches Strom- und Spannungszeigerdiagramm.

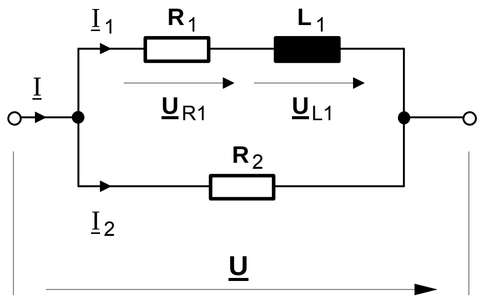


Bild 1 [$\underline{U}_{R1}$ = 118 V · $e^{-j\,57{,}5°}$; $\underline{U}_{L1}$ = 185 V · $e^{j\,32{,}5°}$]

---

2. Von der Schaltung in **Bild 2** sind folgende Daten bekannt:

R_1 = 6,1 Ω **X_C = 1,4** Ω **R_2 = 3,2** Ω **X_L = 7,4** Ω

Berechnen Sie den komplexen Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ in Exponential- und Komponentenform. [$\underline{Z}$ = 4,26 Ω + j1,63 Ω]

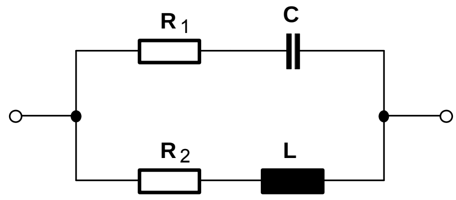


Bild 2

---

3. Von der Schaltung in **Bild 3** sind folgende Daten bekannt:

R_1 = 2 Ω **X_L = 4** Ω **R_2 = 10** Ω **X_C = 6** Ω
R_3 = 10 Ω **U = 60** V

a) Berechnen Sie sämtliche Ströme.
b) Zeichnen Sie ein maßstäbliches Stromzeigerdiagramm.

[$\underline{I}_1$ = 13,4 A · $e^{-j\,63{,}4°}$; $\underline{I}_2$ = 5,15 A · $e^{j\,31°}$; $\underline{I}_3$ = 6 A · $e^{j\,0°}$; $\underline{I}$ = 19,35 A · $e^{-j\,29{,}7°}$]

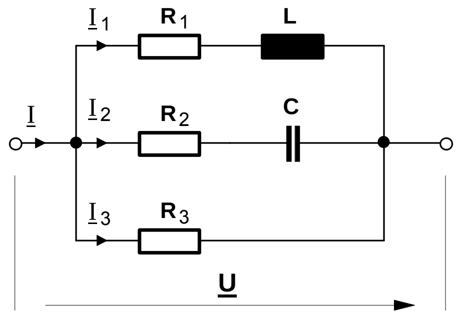


Bild 3

---

4. Von der Schaltung in **Bild 4** sind folgende Daten bekannt:

R = 200 Ω **C = 4** μF **L = 0,8** H **ω = 500** s^{-1}
U = 1000 V

Berechnen Sie

a) den komplexen Gesamtwiderstand $\underline{Z}$,
b) die Teilspannungen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ sowie
c) die Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}$.
d) Zeichnen Sie ein maßstäbliches Strom- und Spannungszeigerdiagramm.

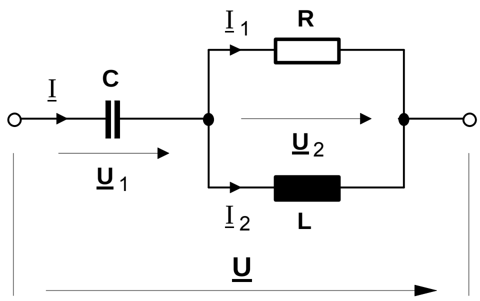


Bild 4 [$\underline{I}$ = 2,23 A · $e^{j\,69°}$; $\underline{I}_1$ = 2 A · $e^{j\,96°}$; $\underline{I}_2$ = 1 A · $e^{j\,6°}$]

---

5. Von der Schaltung in **Bild 5** sind folgende Daten bekannt:

R_1 = 150 Ω **L_1 = 10** mH **R_2 = 200** Ω
L_2 = 30 mH **C = 1** μF **R_3 = 350** Ω
U = 40 V **f = 1,2** kHz

a) Berechnen Sie sämtliche Teilströme.
b) Zeichnen Sie ein maßstäbliches Stromzeigerdiagramm.

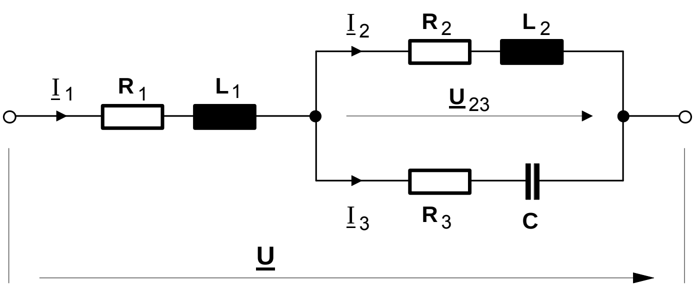
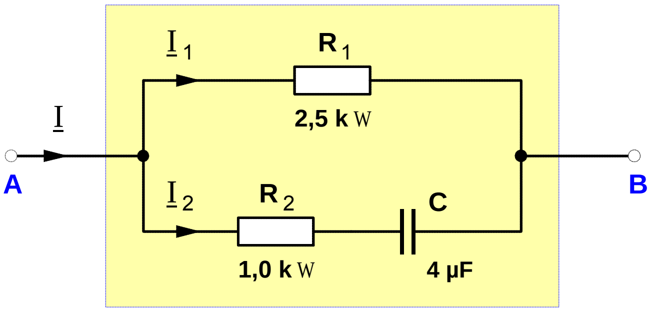
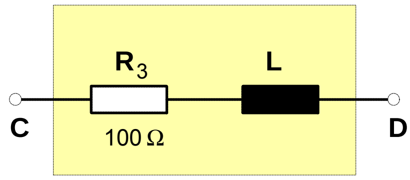


Bild 5 [$\underline{I}_1$ = 108 mA · $e^{-j\,22°}$; $\underline{I}_2$ = 72 mA · $e^{-j\,52{,}4°}$; $\underline{I}_3$ = 58 mA · $e^{j\,16{,}9°}$]

6. Die in der folgenden Abbildung links dargestellte **RC-Schaltung** soll zunächst gesondert und anschließend in Verbindung mit der danebenstehenden **Spule** als **Reihenschwingkreis** unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet werden.



RC-Schaltung



Spule

a) Berechnen Sie die **Reihenersatzschaltung** der **RC-Schaltung** zwischen den Klemmen **A** und **B** für eine Frequenz von **f** = **50** Hz. [R_R = 802 Ω ; C_R = 8,25 µF]

b) Wie groß sind die **Ströme** und **Teilspannungen** in der **RC-Schaltung**, wenn an die Klemmen **A** und **B** eine Spannung $\underline{U}_{AB}$ = **220** V · e $^{j\,0°}$ (f = 50 Hz) angeschlossen ist ? Zeichnen Sie dazu die **Zeigerdiagramme** der Ströme und Spannungen.
[$\underline{I}_1$ = 88 mA · e $^{j\,0°}$; $\underline{I}_2$ = 172 mA · e $^{-j\,38{,}5°}$; $\underline{U}_{R2}$ = 172 V · e $^{j\,38{,}5°}$ $\underline{U}_C$ = 136,9 V · e $^{-j\,51{,}5°}$]

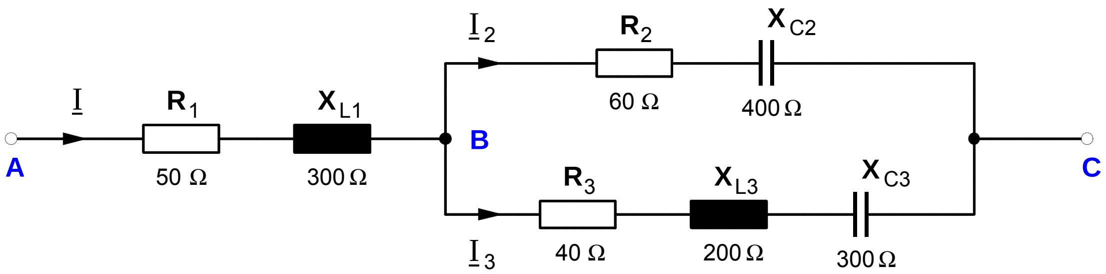
c) Die **RC-Schaltung** soll nun mit der **Spule** zu einem **Reihenschwingkreis** zusammengeschaltet und an eine Spannung $\underline{U}_{AD}$ = **220** V · e $^{j\,0°}$ (f = 50 Hz) angeschlossen werden. Wie groß muß die Induktivität **L** der Spule gewählt werden, um zwischen der Spannung $\underline{U}_{AD}$ und dem $\underline{I}$ in dem Reihenschwingkreis einen Phasenwinkel von **0°** zu erzielen (Resonanzfall) ? [L = 1,23 H]

d) Berechnen Sie die **Teilspannungen** $\underline{U}_{AB}$ und $\underline{U}_{CD}$ des **Reihenschwingkreises**, und zeichnen Sie das **Spannungszeigerdiagramm**. [$\underline{U}_{AB}$ = 217,2 V · e $^{-j\,25{,}7°}$ $\underline{U}_{CD}$ = 97,1 V · e $^{-j\,75{,}5°}$]

e) Durch Hinzuschalten einer weiteren **Kapazität** C_x soll der Reihenschwingkreis auf eine **Resonanzfrequenz** von f_o = **500** Hz abgestimmt werden. Berechnen Sie die dafür erforderliche Kapazität C_x .
[C_x = 83,2 nF]

---

7. An den Klemmen **A** und **C** der folgenden Wechselstromschaltung liegt eine Spannung $\underline{U}$ = **220** V · e $^{j\,0°}$ mit einer Frequenz **f** = **50** Hz .



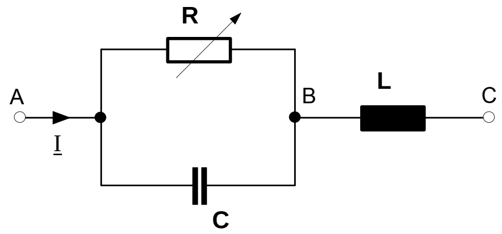
a) Berechnen Sie die Kennwerte jener Bauelemente, die für den Aufbau einer elektrisch gleichwertigen **Reihen-Ersatzschaltung** erforderlich sind. [R_R = 77,9 Ω ; L_R = 0,7 H]

b) Berechnen Sie sämtliche **Ströme**, und zeichnen Sie das **Stromzeigerdiagramm**.

c) Durch welche elektrisch gleichwertige **Parallel-Ersatzschaltung** ließe sich die Schaltung ersetzen? Berechnen Sie die **Kennwerte** der dazu erforderlichen **Bauelemente**. [R_P = 696,2 Ω ; L_P = 0,787 H]

Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name: WT-18.DOC - 31.05.03
Arbeitsblatt Nr. **18** : **Phasendrehung** in Wechselstromschaltungen (Übungen)	

1. Von der nebenstehenden Wechselstromschaltung sind bekannt:



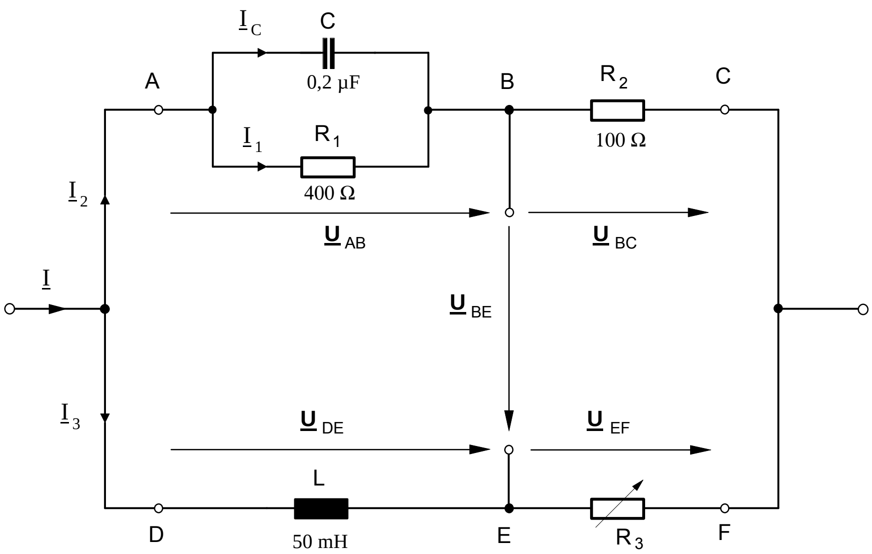
C = **5** µF **L** = **0,6** H **U**$_{AC}$ = **100** V ω = **500** s^{-1}

Auf welchen Wert muß der Potentiometerwiderstand **R** eingestellt werden, um zwischen der Spannung **U**$_{AC}$ und dem Strom I einen Phasenwinkel von

a) j = **0°** , **b)** j = **90°** und **c)** j = **45°** zu erzielen. [a) R = 693 Ω ; b) R = 0 Ω ; c) R = 258,3 Ω]

---

2. Die folgende Wechselstrom-Brückenschaltung ist an eine Spannung **U** = **120** V angeschlossen, die Frequenz beträgt **f** = **3** kHz und das Potentiometer ist auf den Wert **R**$_3$ = **500** Ω eingestellt.



a) Berechnen Sie den **Gesamtstrom** I in der Zuleitung. [I = 0,41 A · e$^{j\,24°}$]

b) Berechnen Sie die Kennwerte der **Reihen-Ersatzschaltung**. [R' = 268,2 Ω ; C' = 0,44 µF]

c) Berechnen Sie sämtliche **Teilspannungen**.
[U$_{AB}$ = 92,2 V · e$^{-j\,17°}$; U$_{BC}$ = 41,7 V · e$^{j\,39,6°}$; U$_{DE}$ = 105,5 V · e$^{j\,28,0°}$; U$_{EF}$ = 56 V · e$^{-j\,62°}$]

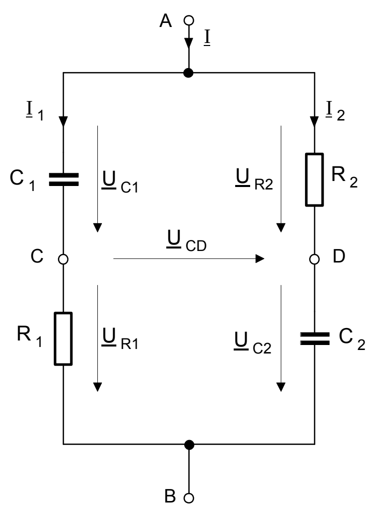
d) Zeichnen Sie ein maßstäbliches **Spannungszeigerdiagramm**.

e) Bestimmen Sie *graphisch* und *rechnerisch* die **Brückenspannung U**$_{BE}$. [U$_{BE}$ = 76,5 V ·e$^{j\,86,3°}$]

f) Auf welchen Wert **R'**$_3$ müßte der Potentiometerwiderstand eingestellt werden, damit der Phasenwinkel der Brückenspannung gegenüber der anliegenden Gesamtspannung **U** auf j = **90°** gedreht wird.

---

3. Von der nebenstehenden RC-Brückenschaltung sind folgende Daten bekannt:



R$_1$ = **200** Ω **R**$_2$ = **150** Ω
C$_1$ = **10** µF **C**$_2$ =**20** µF **U**$_{AB}$ = **80** V (f = 50 Hz)

a) Berechnen Sie sämtliche Teilspannungen und zeichnen Sie ein maßstäbliches **Spannungszeigerdiagramm**.

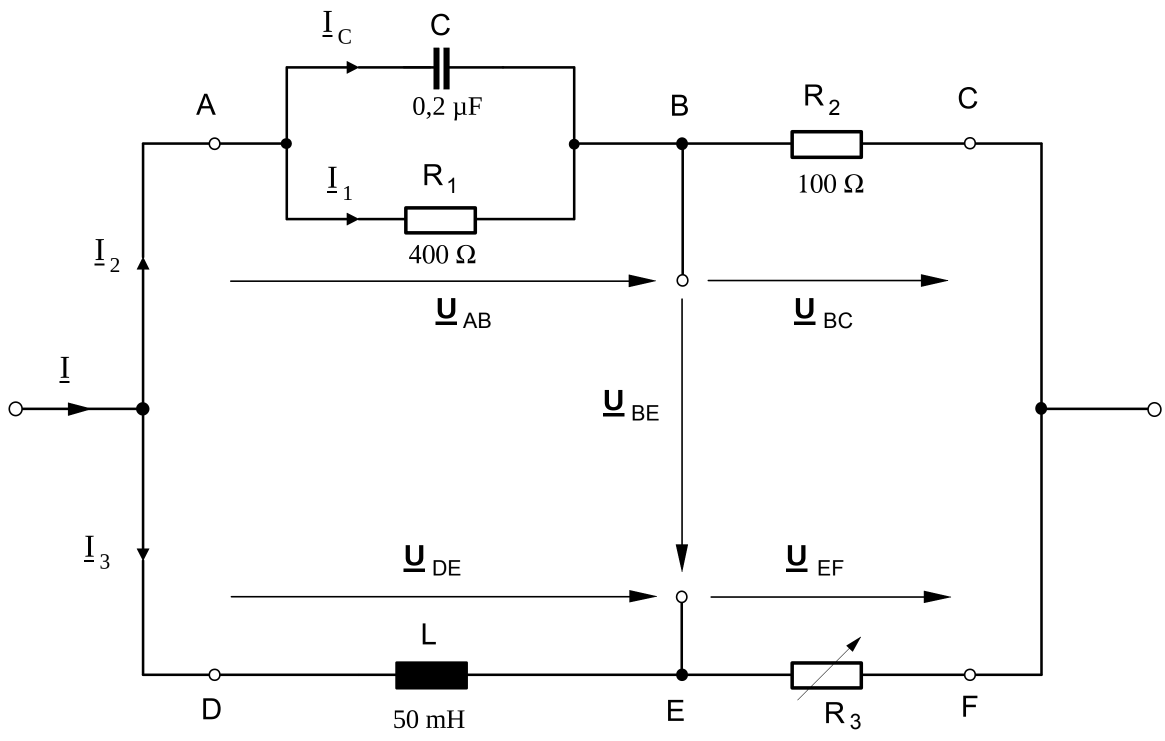
b) Berechnen Sie die **Brückenspannung U**$_{CD}$. [U$_{CD}$ = 78,5 V ·e $^{j\,104,5°}$]

c) Berechnen Sie die Kennwerte der **Reihen-Ersatzschaltung**.
[R = 87,8 Ω ; C = 29,6 µF]

d) Wie groß ist der **Gesamtstrom** I . [I = 0,576 A · e$^{j\,50,8°}$]

e) Auf welchen Wert muß der Widerstand **R**$_2$ geändert werden, damit der Phasenwinkel der Brückenspannung **U**$_{CD}$ gegenüber der Spannung **U**$_{AB}$ auf j$_{CD}$ = **90°** gedreht wird. [R$_2$ = 253,3 Ω]

Lösung zu Aufgabe 2. **Wechselstrom-Brückenschaltung**

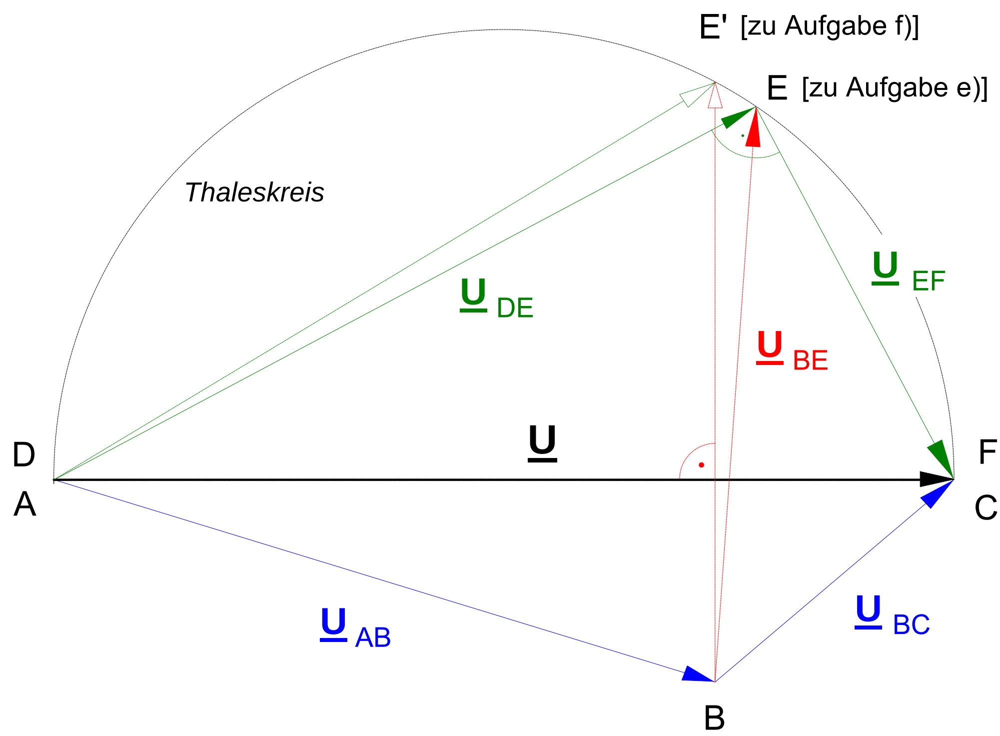


c) Ergebnis der Berechnung der **Teilspannungen**

$\underline{U}_{AB} = \mathbf{92{,}16}\ \text{V} \cdot e^{-j\,\mathbf{16{,}9°}}$ $\underline{U}_{BC} = \mathbf{41{,}7}\ \text{V} \cdot e^{j\,\mathbf{39{,}6°}}$

$\underline{U}_{DE} = \mathbf{105{,}5}\ \text{V} \cdot e^{j\,\mathbf{28{,}0°}}$ $\underline{U}_{EF} = \mathbf{56{,}0}\ \text{V} \cdot e^{-j\,\mathbf{62°}}$

d) Zeigerdiagramm der **Spannungen** und **e) Brückenspannung** $\underline{U}_{BE}$ (graphische Lösung)



f) **Phasendrehung** der Brückenspannung $\underline{\mathbf{U}}_{BE}$ auf φ_{BE} = **90°**

- gegeben : sämtliche Wechselstromwiderstände der Schaltung
- gesucht : Auf welchen Wert müßte **R**$_3$ eingestellt werden, damit die Brückenspannung $\underline{\mathbf{U}}_{BE}$ gegenüber der Gesamtspannung $\underline{\mathbf{U}}$ um φ_{BE} = **90°** vorauseilt **?**

$$\underline{U}_{BE} = \underline{U}_{DE} - \underline{U}_{AB} = \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_{DE} - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{AB}$$

$$= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{DF}} \cdot \underline{Z}_{DE} - \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{AC}} \cdot \underline{Z}_{AB}$$

$$= \underline{U} \cdot \left(\frac{\underline{Z}_{DE}}{\underline{Z}_{DF}} - \frac{\underline{Z}_{AB}}{\underline{Z}_{AC}} \right) \quad \text{mit} \quad \underline{Z}_{DE} = jX_L \quad \text{und} \quad \underline{Z}_{DF} = R_3 + jX_L$$

sowie $\underline{Z}_{AB} = 221\,\Omega \cdot e^{-j56{,}5°}$ und $\underline{Z}_{AC} = 288\,\Omega \cdot e^{-j39{,}6°}$ [gemäß Teilaufgabe a)]

Die Zahlenwerte für $\underline{\mathbf{Z}}_{AB}$ und $\underline{\mathbf{Z}}_{AC}$ werden hier schon eingesetzt, weil bei einer allgemeinen Darstellung die komplexen Ausdrücke sehr umfangreich werden würden. Zudem werden $\underline{\mathbf{Z}}_{AB}$ und $\underline{\mathbf{Z}}_{AC}$ durch **R**$_3$ ohnehin nicht beeinflußt, können hier also als konstant angenommen werden.

$$\underline{U}_{BE} = \underline{U} \cdot \left\{ \frac{jX_L}{(R_3 + jX_L)} \cdot \frac{(R_3 - jX_L)}{(R_3 - jX_L)} - \frac{221\,\Omega \cdot e^{-j56{,}5°}}{288\,\Omega \cdot e^{-j39{,}6°}} \right\} \qquad \text{konjugiert komplexe Erweiterung}$$

$$= \underline{U} \cdot \left\{ \frac{jX_L\,R_3 + X_L^2}{R_3^2 + X_L^2} - 0{,}767 \cdot e^{-j16{,}9°} \right\} \qquad \text{Nenner ist reell gemacht}$$

$$= \underline{U} \cdot \left\{ \left[\frac{X_L^2}{R_3^2 + X_L^2} + j\,\frac{X_L\,R_3}{R_3^2 + X_L^2} \right] - (0{,}734 - j0{,}223) \right\} \qquad \text{Real - und Imaginärteile trennen}$$

$$= \underline{U} \cdot \left\{ \left[\frac{X_L^2}{R_3^2 + X_L^2} - 0{,}734 \right] + j\left[\frac{X_L\,R_3}{R_3^2 + X_L^2} + 0{,}223 \right] \right\} \qquad \text{Addition der Real - und Imaginärteile}$$

$$\underline{U}_{BE} = \underbrace{\underline{U} \cdot \left[\frac{X_L^2}{R_3^2 + X_L^2} - 0{,}734 \right]}_{\mathrm{Re}(\underline{U}_{BE})} + \underbrace{j\,\underline{U} \cdot \left[\frac{X_L\,R_3}{R_3^2 + X_L^2} + 0{,}223 \right]}_{\mathrm{Im}(\underline{U}_{BE})} \qquad \text{Multiplikation der Real - und Imaginärteile mit } \underline{U}$$

Damit der Phasenwinkel φ_{BE} = **90°** wird, muß der Realteil Re($\underline{\mathbf{U}}_{BE}$) der Spannung $\underline{\mathbf{U}}_{BE}$ gleich Null werden. Wir setzen also :

$$\mathrm{Re}(\underline{U}_{BE}) = 0$$

$$\underline{U} \cdot \left[\frac{X_L^2}{R_3^2 + X_L^2} - 0{,}734 \right] = 0 \qquad \text{Da } \underline{U} = U \cdot e^{j0°} = U \neq 0 \text{ , muß der Klammerausdruck Null sein!}$$

$$\frac{X_L^2}{R_3^2 + X_L^2} - 0{,}734 = 0$$

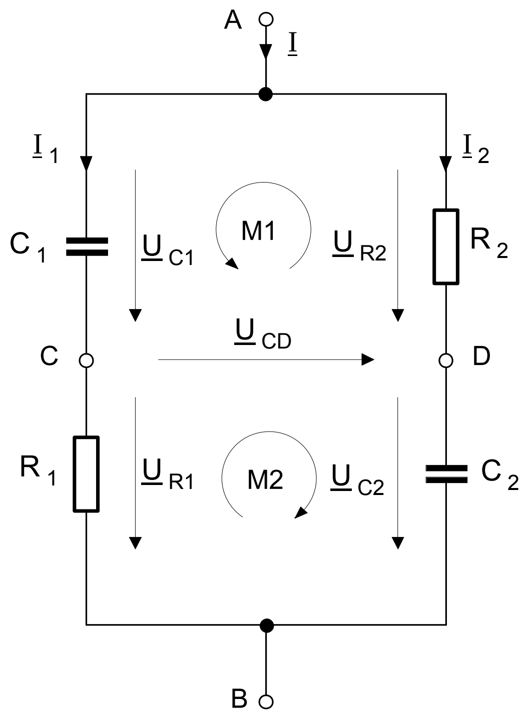
$$\frac{X_L^2}{R_3^2 + X_L^2} = 0{,}734$$

$$X_L^2 = 0{,}734 \cdot (R_3^2 + X_L^2)$$

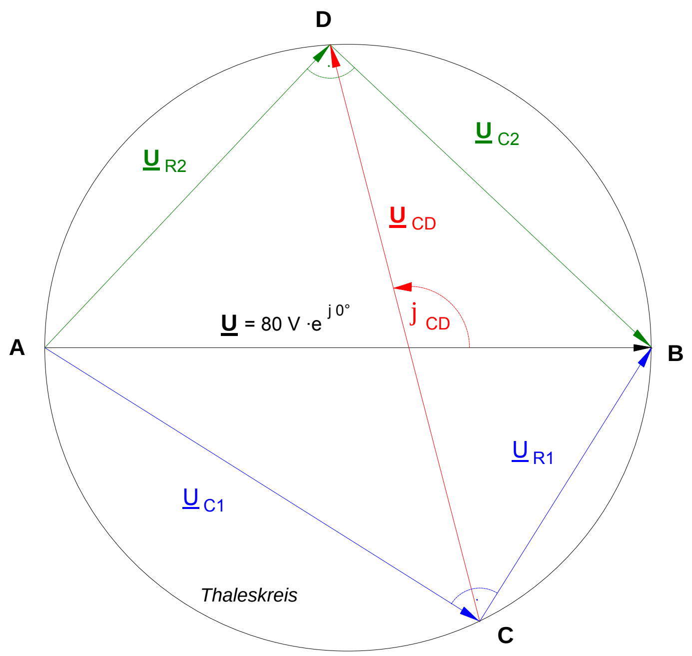
$$0{,}734 \cdot R_3^2 = X_L^2 - 0{,}734 \cdot X_L^2$$

$$R_3 = \sqrt{\frac{X_L^2 \cdot (1 - 0{,}734)}{0{,}734}} = \sqrt{\frac{(942\,\Omega)^2 \cdot (1 - 0{,}734)}{0{,}734}} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{R_3 = 567\,\Omega}}}$$

Lösung zu Aufgabe 3. Kapazitäts-Brückenschaltung



Spannungszeigerdiagramm



a) Teilströme und Teilspannungen

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}}{R_1 - jX_{C1}} = 213\,\text{mA} \cdot e^{\,j\,57{,}86°}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}}{R_2 - jX_{C2}} = 366\,\text{mA} \cdot e^{\,j\,46{,}7°}$$

$$\underline{U}_{C1} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{C1} = 67{,}74\,\text{V} \cdot e^{-j\,32{,}14°}$$

$$\underline{U}_{R1} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{R1} = 42{,}60\,\text{V} \cdot e^{+j\,57{,}86°}$$

$$\underline{U}_{R2} = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{R2} = 54{,}90\,\text{V} \cdot e^{+j\,46{,}70°}$$

$$\underline{U}_{C2} = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{C2} = 58{,}25\,\text{V} \cdot e^{-j\,43{,}30°}$$

b) Brückenspannung $\underline{U}_{CD}$

über **Masche M1** :

$$\underline{U}_{C1} + \underline{U}_{CD} - \underline{U}_{R2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{U}_{CD} = \underline{U}_{R2} - \underline{U}_{C1}$$

oder über **Masche M2** :

$$\underline{U}_{CD} + \underline{U}_{C2} - \underline{U}_{R1} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{U}_{CD} = \underline{U}_{R1} - \underline{U}_{C2}$$

Lösung : $\boxed{\underline{U}_{CD} = 78{,}5\,\text{V} \cdot e^{j104{,}5°}}$

c) Reihen-Ersatzschaltung

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Lösung : $\underline{Z}_{AB} = 87{,}76\,\Omega - j\,107{,}6\,\Omega$
wobei $C = 29{,}6\,\mu\text{F}$

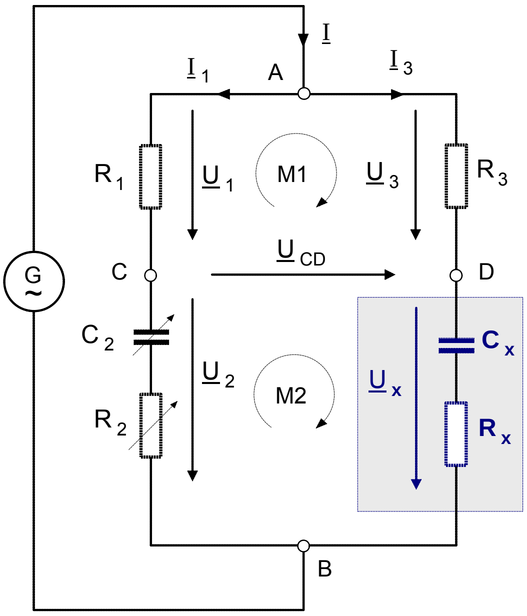
d) Gesamtstrom $\underline{I}$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad \text{oder} \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{AB}}$$

Lösung : $\boxed{\underline{I} = 576\,\text{mA} \cdot e^{j50{,}8°}}$

Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name:	WT-19.DOC - 30.05.03
Arbeitsblatt Nr. **19** : **Kapazitäts-Meßbrücke nach WIEN** (von Max Wien, um 1908)		

Die von Max **WIEN** entwickelte **Wechselstrom-Meßbrücke** dient der Messung der Kapazität, des Verlustwiderstandes und des Verlustfaktors eines **Kondensators**. Der unbekannte Kondensator wird zwischen die Klemmen **B** und **D** der Meßbrücke angeschlossen. Anschließend werden $\mathbf{C_2}$ und $\mathbf{R_2}$ solange verändert, bis die Brückenspannung $\underline{U}_{CD}$ gleich **Null** geworden und die Brücke damit »abgeglichen« ist. Mit den bekannten Werten von $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_3}$, $\mathbf{C_2}$ und $\mathbf{R_2}$ lassen sich dann die Kapazität $\mathbf{C_x}$ und der Verlustwiderstand $\mathbf{R_x}$ des unbekannten Kondensators mit Hilfe der im folgenden abgeleiteten Formeln berechnen.



- Anwendung der **Maschenregel** :

$$\text{M1:}\quad \underline{U}_3 - \underline{U}_{CD} - \underline{U}_1 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{U}_3 = \underline{U}_1 + \underline{U}_{CD} \qquad [1]$$

$$\text{M2:}\quad \underline{U}_{CD} + \underline{U}_x - \underline{U}_2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{U}_x = \underline{U}_2 - \underline{U}_{CD} \qquad [2]$$

- **Brückenabgleich** : $\mathbf{C_2}$ und $\mathbf{R_2}$ werden solange verändert, bis die Brückenspannung **Null** geworden ist, d.h. bis $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{CD}}\mathbf{ = 0}$ ist. Damit gilt dann:

$$\text{für M1:}\quad \underline{U}_3 = \underline{U}_1 \quad \text{bzw.} \quad R_3 \cdot \underline{I}_3 = R_1 \cdot \underline{I}_1$$

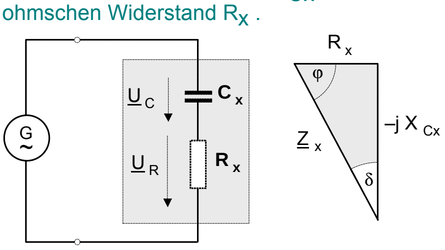
$$\Rightarrow \underline{I}_3 = \frac{R_1 \cdot \underline{I}_1}{R_3} \qquad [3]$$

$$\text{für M2:}\quad \underline{U}_x = \underline{U}_2 \quad \text{bzw.} \quad \underline{Z}_x \cdot \underline{I}_3 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_1$$

$$\Rightarrow \underline{I}_3 = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_1}{\underline{Z}_x} \qquad [4]$$

Reihen-Ersatzschaltung eines verlustbehafteten Kondensators:

Im Kondensator treten Verluste auf, weil die Metallfolien und Zuleitungen einen elektrischen Widerstand aufweisen, das Dielektrikum eine gewisse Leitfähigkeit besitzt und durch Umpolarisation der Molekulardipole im Dielektrikum eine Erwärmung auftritt. Insofern besitzt der reale Kondensator nicht nur einen rein kapazitiven Widerstand X_{Cx}, sondern auch einen ohmschen Widerstand R_x .



Als Maß für die Höhe der Verluste dient der Verlustwinkel δ bzw. der **Verlustfaktor tan**δ .

$$\boxed{\tan\delta = \frac{R_x}{X_{Cx}} = R_x \cdot \omega \cdot C_x}$$

- Durch Gleichsetzen der Gleichungen [3] und [4] ergibt sich für die **abgegeglichene** Kapazitäts-Meßbrücke :

$$\frac{R_1 \cdot \underline{I}_1}{R_3} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_1}{\underline{Z}_x}$$

$$R_1 \cdot \underline{Z}_x = R_3 \cdot \underline{Z}_2$$

$$\text{mit}\quad \underline{Z}_x = R_x - j\frac{1}{\omega \cdot C_x} \quad \text{und} \quad \underline{Z}_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega \cdot C_2}$$

$$R_1 \cdot \left(R_x - j\frac{1}{\omega \cdot C_x} \right) = R_3 \cdot \left(R_2 - j\frac{1}{\omega \cdot C_2} \right)$$

$$\underbrace{R_1 \cdot R_x - j\frac{R_1}{\omega \cdot C_x}}_{=\underline{Z}_{1x}} = \underbrace{R_3 \cdot R_2 - j\frac{R_3}{\omega \cdot C_2}}_{=\underline{Z}_{23}}$$

- Die komplexen Ausdrücke $\underline{Z}_{1x}$ und $\underline{Z}_{23}$ sind nur dann gleich, wenn sowohl die Realteile als auch die Imaginärteile gleich sind, d.h. wenn $\mathbf{Re}(\underline{Z}_{1x}) = \mathbf{Re}(\underline{Z}_{23})$ und $\mathbf{Im}(\underline{Z}_{1x}) = \mathbf{Im}(\underline{Z}_{23})$ ist.

- Setzen wir die **Realteile** gleich, so erhalten wir aus

$R_1 \cdot R_x = R_3 \cdot R_2$ für den **Verlustwiderstand** $\mathbf{R_x}$ des unbekannten Kondensators

$$\boxed{R_x = \frac{R_3 \cdot R_2}{R_1}}$$

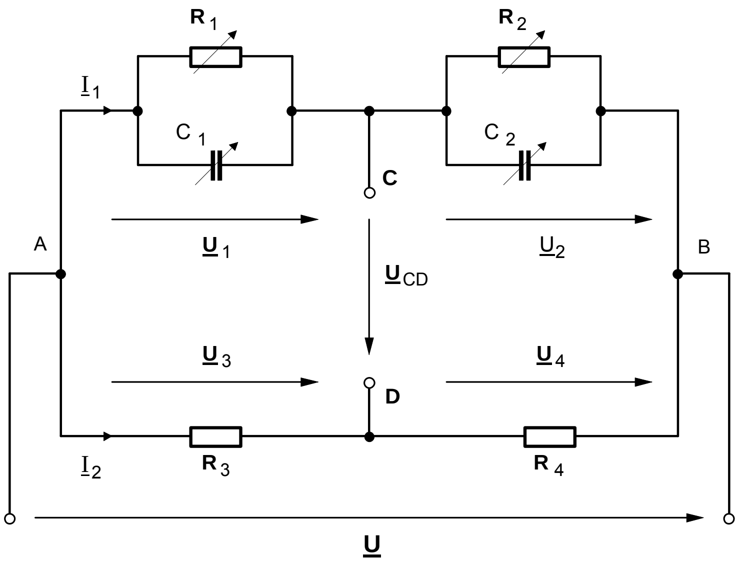
- Setzen wir die **Imaginärteile** gleich, so erhalten wir aus

$-j\dfrac{R_1}{\omega \cdot C_x} = -j\dfrac{R_3}{\omega \cdot C_2}$ für die **Kapazität** $\mathbf{C_x}$ des unbekannten Kondensators

$$\boxed{C_x = \frac{R_1}{R_3} \cdot C_2}$$

Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name: WT-19A.DOC - 30.05.03
Arbeitsblatt Nr. **19 a)** : **Weitere Wechselstrom-Meßbrücken** (Übungen)	

1. **Kapazitäts-**Meßbrücke (nach Max WIEN mit **Parallel**-Ersatzwiderständen)



Entwickeln Sie in **allgemeiner** Form

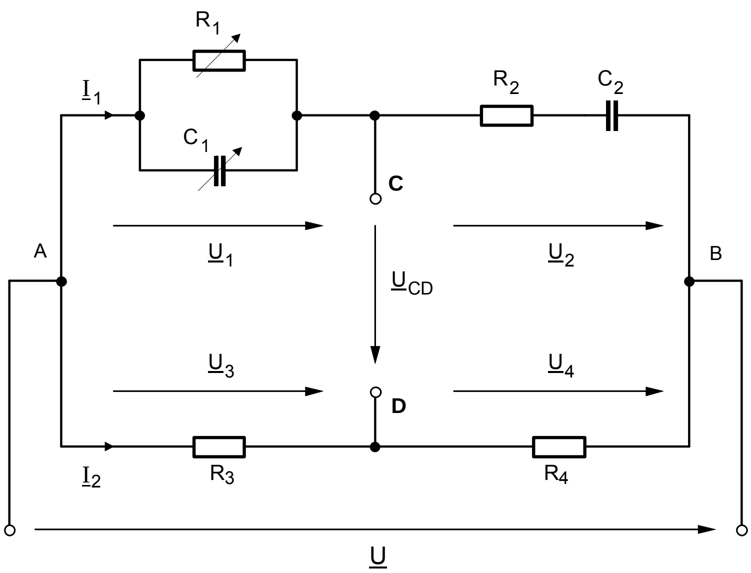
a) die **Abgleichbedingung** für die obige Kapazitätsmeßbrücke,

b) eine **Formel** zur Berechnung von $\mathbf{R_2}$ und $\mathbf{C_2}$ unter der Voraussetzung, daß die Brücke abgeglichen ist und die Kennwerte der übrigen Bauelemente bekannt sind, und

c) eine **Formel** zur Berechnung von $\mathbf{R_1}$ und $\mathbf{C_1}$ gemäß den unter **b)** genannten Voraussetzungen.

---

2. **Frequenz-**Meßbrücke nach WIEN und ROBINSON zur Bestimmung der Frequenz der Wechselspannung



Entwickeln Sie in **allgemeiner** Form

a) die **Abgleichbedingung** für die obige Frequenzmeßbrücke,

b) eine **Formel** zur Berechnung von $\mathbf{R_2}$ und $\mathbf{C_2}$ gemäß den unter **1. b)** genannten Voraussetzungen,

c) eine **Formel** zur Berechnung der **Frequenz f** der Wechselspannung **U** unter der Voraussetzung, daß die Brücke abgeglichen ist und für $\mathbf{R_4 = 2 \cdot R_3}$, für $\mathbf{R_1 = R_2 = R}$ und für $\mathbf{C_1 = C_2 = C}$ gewählt wurde, und

d) eine **Formel** zur Berechnung von $\mathbf{R_1}$ und $\mathbf{C_1}$ gemäß den unter **1. b)** genannten Voraussetzungen.

• **Zweck** der Schaltung

Der **Phasenwinkel** j_o zwischen der Brückenspannung $\underline{U}_o$ und der Betriebsspannung $\underline{U}$ soll mit Hilfe des Potentiometers R_1 eingestellt werden können, **ohne** daß sich der **Betrag** der Brückenspannung $\underline{U}_o$ ändert.

• Notwendige **Bedingung** (was im folgenden noch gezeigt wird):

$R_2 = R_3 = R$ Daraus folgt:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_3 = \frac{1}{2}\underline{U} = \frac{1}{2} U \cdot e^{j0°}$$

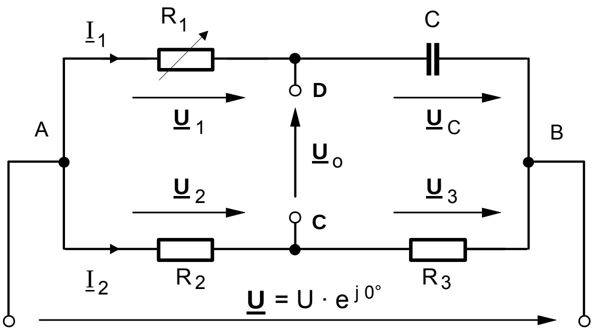


Bild 1: **Phasenschieberbrücke**

1. Wechselstromwiderstände der Brückenzweige

$$\underline{Z}_2 = R_2 + R_3 = R + R = 2 \cdot R \qquad \underline{Z}_1 = R_1 - jX_C = Z_1 \cdot e^{-j\varphi_1} \quad \text{wobei} \quad Z_1 = \sqrt{R_1^{\,2} + X_C^{\,2}}, \quad \varphi_1 = \arctan\frac{X_C}{R_1} = \arctan\frac{1}{\omega \cdot C \cdot R_1}$$

2. Zweigströme:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}}{R_1 - jX_C} \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}}{2 \cdot R}$$

3. Brückenspannung: $\underline{U}_1 - \underline{U}_0 - \underline{U}_2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\underline{U}_0 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2}$ Gleichung (**1**)

4. Teilspannungen:

$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot R_1$ mit $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}}{R_1 - jX_C}$ gilt: $\underline{U}_1 = \dfrac{\underline{U}}{R_1 - jX_C} \cdot R_1$ Gleichung (**2**)

$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot R_2$ mit $\underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}}{2 \cdot R}$ und $R_2 = R$ gilt : $\underline{U}_2 = \dfrac{\underline{U}}{2 \cdot R} \cdot R = \dfrac{\underline{U}}{2}$ Gleichung (**3**)

5. Zusammenfassung (Gleichungen (**2**) und (**3**) in Gleichung (**1**) eingesetzt):

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U} \cdot R_1}{R_1 - jX_C} - \frac{\underline{U}}{2} = \underline{U} \cdot \left(\frac{R_1}{R_1 - jX_C} - \frac{1}{2}\right) = \underline{U} \cdot \left(\frac{2 \cdot R_1 - (R_1 - jX_C)}{(R_1 - jX_C) \cdot 2}\right) = \underline{U} \cdot \left(\frac{2 \cdot R_1 - R_1 + jX_C}{2 \cdot (R_1 - jX_C)}\right)$$

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}}{2} \cdot \frac{R_1 + jX_C}{R_1 - jX_C} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} R_1 + jX_C &= Z_1 \cdot e^{+j\varphi_1} \\ R_1 - jX_C &= Z_1 \cdot e^{-j\varphi_1} \end{aligned} \quad \text{und} \quad \underline{U} = U \cdot e^{j0°}$$

$$\underline{U}_0 = \frac{U \cdot e^{j0°}}{2} \cdot \frac{Z_1 \cdot e^{+j\varphi_1}}{Z_1 \cdot e^{-j\varphi_1}} = \frac{U}{2} \cdot e^{+j\varphi_1} \cdot e^{+j\varphi_1} = \frac{U}{2} \cdot e^{j2\varphi_1} \quad \text{mit} \quad \varphi_1 = \arctan\frac{X_C}{R_1}$$

$$\boxed{\underline{U}_0 = \frac{U}{2} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \arctan\frac{X_C}{R_1}}}$$

• Betrag von $\underline{U}_o$: $U_o = \frac{1}{2} U$

• Phasenwinkel von $\underline{U}_o$: $j_o = 2 \cdot \arctan \dfrac{X_C}{R_1} = 2 \cdot \arctan \dfrac{1}{\omega \cdot C \cdot R_1}$

• **Fazit**:

Damit konnte gezeigt werden, daß unter der Bedingung $R_2 = R_3$ der ***Betrag*** der **Brückenspannung** $\underline{U}_o$ von dem Widerstand R_1 **unabhängig** ist und allein durch die Betriebsspannung $\underline{U}$ bestimmt wird, während der ***Phasenwinkel*** der Brückenspannung $\underline{U}_o$ bei konstanter Frequenz f und Kapazität C nur noch von R_1 **abhängt** und somit mit dem Potentiometer R_1 zwischen $j_o = 0°$ (bei $R_1 = \infty$), $j_o = 2 \cdot 45° = 90°$ (bei $R_1 = X_C$) und $j_o = 2 \cdot 90° = 180°$ (bei $R_1 = 0$) nahezu stetig verändert werden kann.

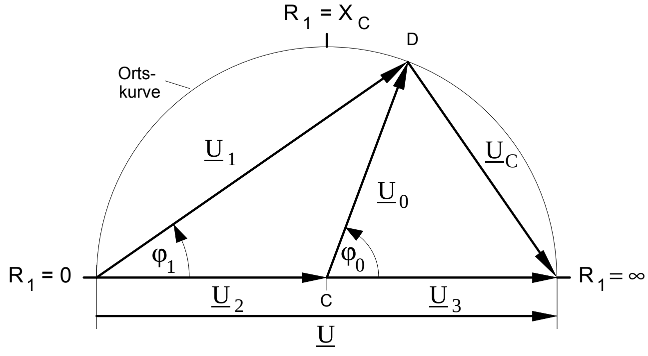


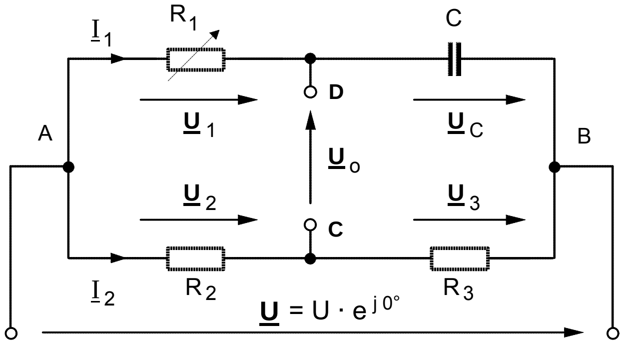
Bild 2: **Ortskurve** der Brückenspannung

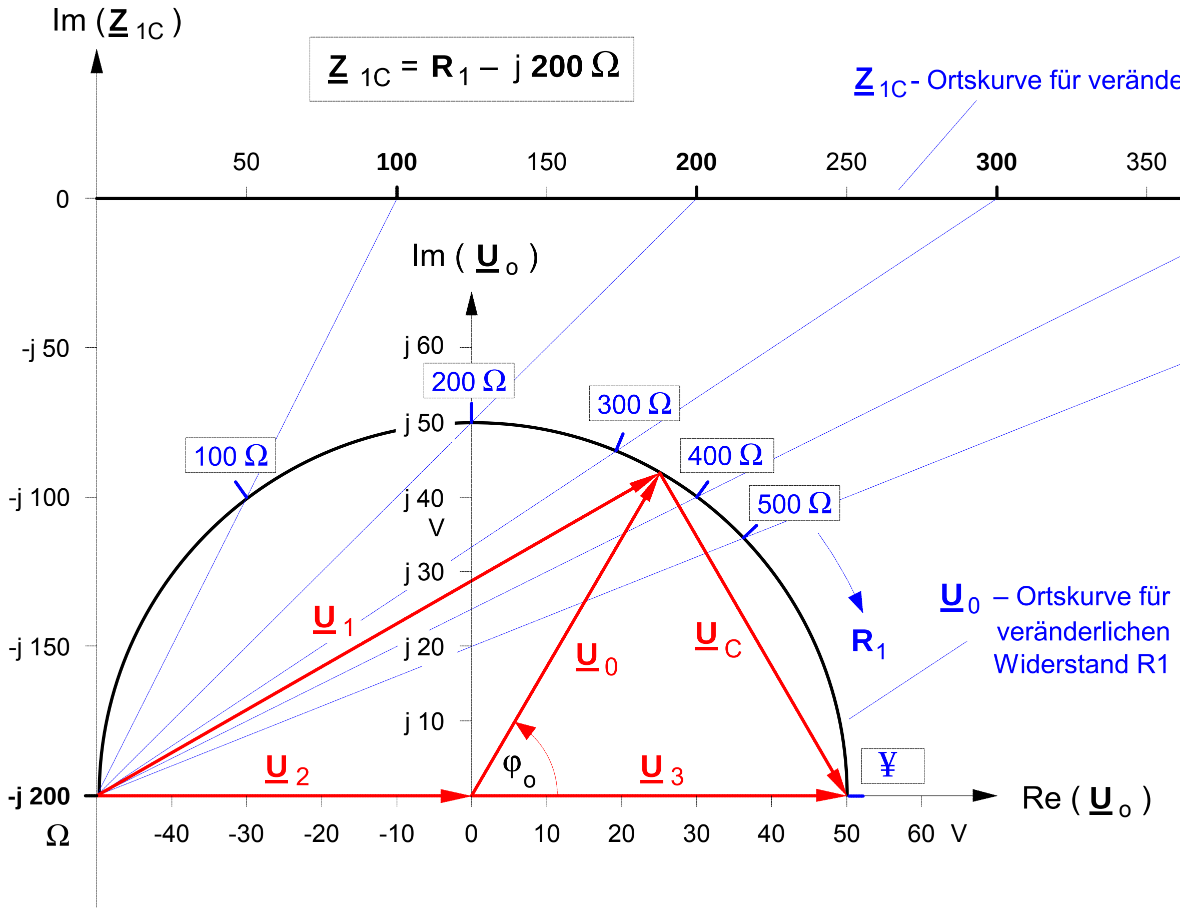
Konstruktion der Ortskurve $\underline{U}_o = f(R_1)$ der Brückenspannung in der Phasenschieberbrücke

Von der nebenstehenden **Phasenschieberbrücke** sind folgende Daten bekannt:

$\underline{U} = 100\ \text{V} \cdot e^{j\,0°}$ $\quad$ $R_2 = R_3 = 1\ \text{k}\Omega$ $\quad$ $X_C = 200\ \Omega$ $\quad$ $R_1 = 0\ ...\ 500\ \Omega$

Aufgabe: Stellen Sie den Verlauf der **Brückenspannung** $\underline{U}_o$ in Abhängigkeit von der Einstellung des Widerstandes R_1 in Form einer Ortskurve $\underline{U}_o = f(R_1)$ dar.



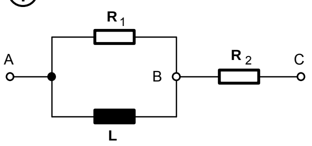
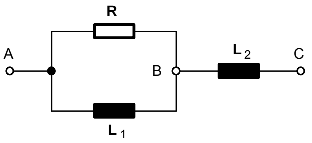
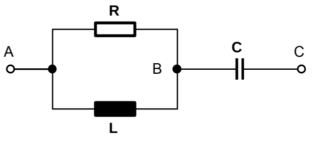
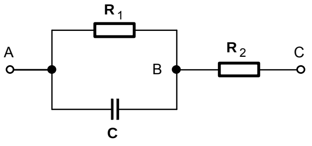
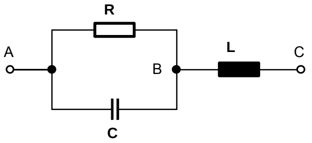
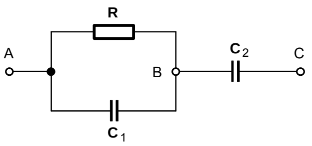
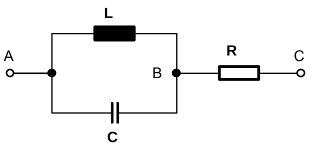
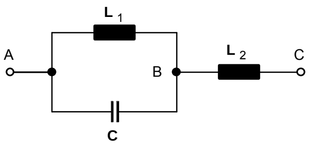
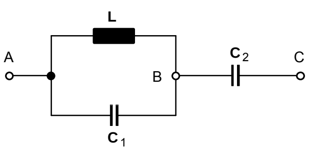


Verfahren zur Konstruktion der Ortskurve:

1. Halbkreis um den 0-Punkt des komplexen Koordinaten-Systems von $\underline{U}_0$ mit dem Radius $U_0 = 50$ V
2. Konstruktion der $\underline{Z}_{1C}$ – Ortskurve im komplexen Koordinatensystem von $\underline{Z}_{1C}$
3. Einzeichnen der $\underline{Z}_{1C}$ – Operatoren zur Markierung der R_1 – Werte auf der $\underline{U}_0$ – Ortskurve

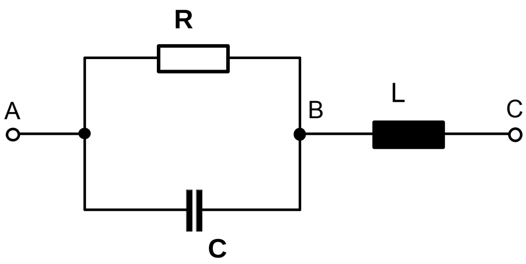
Lehrgang : **WECHSELSTROMTECHNIK**	Name:	WT-21-1.DOC - 30.05.03

Arbeitsblatt Nr. **21** :	**Komplexe Scheinwiderstände – Übersicht**	Seite **1**

Schaltung	**Ansatz:** $\underline{Z}_{AC} = \underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC}$	Scheinwiderstand $\underline{Z}_{AC}$ in **Komponentenform**
① 	$\underline{Z}_{AC} = \frac{R_1 \cdot jX_L}{R_1 + jX_L} + R_2$ mit $X_L = \omega \cdot L$	$\underline{Z}_{AC} = \left(R_2 + \frac{R_1 \cdot (\omega \cdot L)^2}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2}\right) + j\,\frac{R_1^2 \cdot (\omega \cdot L)}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2}$
② 	$\underline{Z}_{AC} = \frac{R \cdot jX_{L_1}}{R + jX_{L_1}} + jX_{L_2}$ mit $X_{L1} = \omega \cdot L_1$ und $X_{L2} = \omega \cdot L_2$	$\underline{Z}_{AC} = \frac{R \cdot (\omega \cdot L_1)^2}{R^2 + (\omega \cdot L_1)^2} + j\left(\frac{R^2 \cdot (\omega \cdot L_1)}{R^2 + (\omega \cdot L_1)^2} + \omega \cdot L_2\right)$
③ 	$\underline{Z}_{AC} = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} + (-jX_C)$ mit $X_L = \omega \cdot L$ und $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$	$\underline{Z}_{AC} = \frac{R \cdot (\omega \cdot L)^2}{R^2 + (\omega \cdot L)^2} + j\left(\frac{R^2 \cdot (\omega \cdot L)}{R^2 + (\omega \cdot L)^2} - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)$
④ 	$\underline{Z}_{AC} = \frac{R_1 \cdot (-jX_C)}{R_1 + (-jX_C)} + R_2$ mit $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$	$\underline{Z}_{AC} = \left(R_2 + \frac{R_1}{R_1^2 \cdot (\omega \cdot C)^2 + 1}\right) - j\,\frac{R_1^2 \cdot (\omega \cdot C)}{R_1^2 \cdot (\omega \cdot C)^2 + 1}$
⑤ 	$\underline{Z}_{AC} = \frac{R \cdot (-jX_C)}{R + (-jX_C)} + jX_L$ mit $X_L = \omega \cdot L$ und $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$	$\underline{Z}_{AC} = \frac{R}{R^2 \cdot (\omega \cdot C)^2 + 1} + j\left(\omega \cdot L - \frac{R^2 \cdot (\omega \cdot C)}{R^2 \cdot (\omega \cdot C)^2 + 1}\right)$
⑥ 	$\underline{Z}_{AC} = \frac{R \cdot \left[-jX_{C_1}\right]}{R + \left[-jX_{C_1}\right]} - jX_{C_2}$ mit $X_{C1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1}$ und $X_{C2} = \frac{1}{\omega \cdot C_2}$	$\underline{Z}_{AC} = \frac{R}{R^2 \cdot (\omega \cdot C_1)^2 + 1} - j\left(\frac{R^2 \cdot (\omega \cdot C_1)}{R^2 \cdot (\omega \cdot C_1)^2 + 1} + \frac{1}{\omega \cdot C_2}\right)$
⑦ 	$\underline{Z}_{AC} = \frac{(+jX_L) \cdot (-jX_C)}{(+jX_L) + (-jX_C)} + R$ mit $X_L = \omega \cdot L$ und $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$	$\underline{Z}_{AC} = R + j\,\frac{\omega \cdot L}{1 - \omega^2 \cdot L \cdot C}$
⑧ 	$\underline{Z}_{AC} = \frac{\left[+jX_{L_1}\right] \cdot (-jX_C)}{\left[+jX_{L_1}\right] + (-jX_C)} + jX_{L_2}$ mit $X_L = \omega \cdot L$ und $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$	$\underline{Z}_{AC} = j\left(\frac{\omega \cdot L_1}{1 - \omega^2 \cdot L_1 \cdot C} + \omega \cdot L_2\right)$
⑨ 	$\underline{Z}_{AC} = \frac{(+jX_L) \cdot \left[-jX_{C_1}\right]}{(+jX_L) + \left[-jX_{C_1}\right]} - jX_{C_2}$ mit $X_L = \omega \cdot L$ und $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$	$\underline{Z}_{AC} = j\left(\frac{\omega \cdot L}{1 - \omega^2 \cdot L \cdot C_1} - \frac{1}{\omega \cdot C_2}\right)$

Beispiel **5.** von Seite **1**

An diesem Beispiel soll exemplarisch die Herleitung der komplexen Darstellung des Scheinwiderstandes in Komponentenform aus dem jeweils angegebenen Ansatz aufgezeigt werden.



$$\underline{Z}_{AC} = \frac{\underline{Z}_R \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} + \underline{Z}_L \qquad \text{(Ansatz)}$$

$$= \frac{R \cdot (-jX_C)}{R - jX_C} + jX_L$$

$$= \frac{R \cdot (-jX_C)}{R_1 - jX_C} \cdot \underbrace{\frac{(R_1 + jX_C)}{(R_1 + jX_C)}}_{\text{konjugiert komplexe Erweiterung}} + jX_L$$

$$\underline{Z}_{AC} = \frac{-jX_C \cdot R^2 - j \cdot jX_C{}^2 \cdot R}{R^2 + X_C{}^2} + jX_L$$

$$= \frac{-jX_C \cdot R^2 + X_C{}^2 \cdot R}{R^2 + X_C{}^2} + jX_L$$

$$= \frac{X_C{}^2 \cdot R}{R^2 + X_C{}^2} - j\frac{X_C \cdot R^2}{R^2 + X_C{}^2} + jX_L \quad \text{mit} \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad \text{und} \quad X_L = \omega \cdot L$$

$$= \frac{\frac{1}{(\omega \cdot C)^2} \cdot R}{R^2 + \frac{1}{(\omega \cdot C)^2}} - j\frac{\frac{1}{(\omega \cdot C_1)} \cdot R^2}{R^2 + \frac{1}{(\omega \cdot C)^2}} + j\omega \cdot L$$

$$= \frac{\frac{1}{(\omega \cdot C)^2} \cdot R}{R^2 + \frac{1}{(\omega \cdot C)^2}} \cdot \frac{(\omega \cdot C)^2}{(\omega \cdot C)^2} - j\frac{\frac{1}{(\omega \cdot C)} \cdot R^2}{R^2 + \frac{1}{(\omega \cdot C)^2}} \cdot \frac{(\omega \cdot C)^2}{(\omega \cdot C)^2} + j\omega \cdot L$$

$$\underline{Z}_{AC} = \frac{R}{R^2 \cdot (\omega \cdot C)^2 + 1} - j\frac{R^2 \cdot (\omega \cdot C)}{R^2 \cdot (\omega \cdot C)^2 + 1} + j\omega \cdot L$$

$$\boxed{\underline{Z}_{AC} = \frac{R}{R^2 \cdot (\omega \cdot C)^2 + 1} + j\left(\omega \cdot L - \frac{R^2 \cdot (\omega \cdot C)}{R^2 \cdot (\omega \cdot C)^2 + 1}\right)}$$

Schwerpunktfach

Elektrotechnik in der Fachoberschule

Klassen 11 + 12 – Organisationsform **A**

Technik kommt ohne Physik aus, wie der Filmstar ohne Lehrzeit und der faschistische Staatsmann ohne Bildung.

(Max Horkheimer)

Coulomb Oersted Ampére Ohm Kirchhoff Gauß Faraday Maxwell

Themenfeld ET **1** : **Elektrisches Feld und GS-Netzwerke**

A. Mechanik
B. Elektrische Ladung
C. Potential und Spannung
D. Strömungsfeld
E. Arbeit und Leistung
F. Grundschaltungen
G. Gleichstrom-Netzwerke
Laborübungen

Themenfeld ET **2** : **Elektrisches und magnetisches Feld**

A. Elektrisches Feld
B. Kapazität und Kondensator
C. Laden und Entladen
D. Magnetische Kraft
E. Grundgrößen des Magnetfeldes
F. Stoffe im Magnetfeld
G. Magnetischer Kreis

Themenfeld ET **3** : **Induktion und Wechselstrom**

A. Induktionsvorgänge und deren Gesetze
B. Selbstinduktion und RL-Schaltvorgänge
C. Sinusförmige Wechselgrößen
D. Mathematischer Exkurs: Komplexe Zahlen
E. Komplexe Wechselstromkreise

Themenfeld ET **4** : **Elektrische Messtechnik**

A. Oszilloskop
B. Strom- und Spannungsmesser
C. Leistungsmesser

E-Mail: sicars@hems.de – © **Jochen Sicars**

Heinrich-Emanuel-Merck-Schule Darmstadt

Fachoberschule – Schwerpunkt Elektrotechnik

Themenfelder des Schwerpunktfaches »Elektrotechnik« für die Organisationsform **A**

Themenfeld »Elektrotechnik **4**«: **Einführung in die Elektrische Messtechnik**

Das Themenfeld »Einführung in die elektrische Messtechnik ist in der im folgenden dargestellten Form nur für die Organisationsform A der Fachoberschule entwickelt worden und grundsätzlich jahrgangsübergreifend konzipiert. Nach der Behandlung der ersten Grundlegungen zum elektrischen Feld in der Jahrgangsstufe 11 sind die physikalischen Voraussetzungen zum Verständnis des Oszilloskops geschaffen. Damit kann bereits im 2. Halbjahr der Klasse 11 mit der Behandlung dieses Messgerätes begonnen werden. Die Laborübungen zum Oszilloskop lassen sich dann anschließend im 1. Halbjahr der Jahrgangsstufe 12 durchführen. Nachdem gegen Ende des 1. Halbjahres im Rahmen des Themenfeldes »Elektrotechnik 2« die Grundbegriffe des magnetischen Feldes erarbeitet worden sind, kann etwa zu Beginn des 2. Halbjahres die Behandlung der elektromagnetischen Messwerke in Angriff genommen werden.

A. Elektronenstrahl-Oszilloskop

1. Elektronenstrahl-**Oszilloskopröhre** (Arbeitsblatt Nr. **1**)
2. **Zeitablenkung** im Oszilloskop (Arbeitsblatt Nr. **2**)
3. **Blockschaltbild** des Oszilloskops (Ein- und Zweikanal-Oszilloskop – Arbeitsblatt Nr. **3**)
4. **Bedienungselemente** eines Zweikanal-Oszilloskops (HAMEG 203-5 – Arbeitsblatt Nr. **4**)
5. **Messverfahren** mit dem Oszilloskop (Arbeitsblatt Nr. **5**)
   - Spannungsmessung und absolute Frequenzmessung
   - Relative Frequenzmessung mit Hilfe von Lissajous-Figuren
   - Phasenwinkelmessung mit Zweikanal- und Einkanal-Oszilloskop (Lissajous-Figuren)
6. **Laborübungen** mit dem Oszilloskop (Arbeitsblatt Nr. **6**)
   - Erste Spannungs- und Frequenzmessungen
   - Aufnahme der Lade- und Entladekurven eines Kondensators
   - RC-Schaltungen als Integrier- und Differenzierglied

B. Elektromagnetische Strom- und Spannungsmesser

7. Das **Magnetnadelgalvanometer** – Ein historisches Messgerät (Arbeitsblatt Nr. **7**)
8. Das **Drehmagnetmesswerk** (Arbeitsblatt Nr. **8**)
   - Aufbau und Wirkungsweise
   - Sinnbilder und Schaltzeichen für Meßgeräte
9. Das **Drehspulmeßwerk** (Arbeitsblatt Nr. **9**)
   - Stromdurchflossene Drehspule im Magnetfeld
   - Aufbau und Wirkungsweise des Drehspulmesswerks
   - Lagerung, Dämpfung und Eigenschaften von Drehspulmesswerken
10. Das **Dreheisenmesswerk** (Arbeitsblatt Nr. **10**)
    - Vorversuch: Zwei Eisenkörper im Magnetfeld einer Spule
    - Aufbau, Wirkungsweise und Eigenschaften des Dreheisenmesswerkes

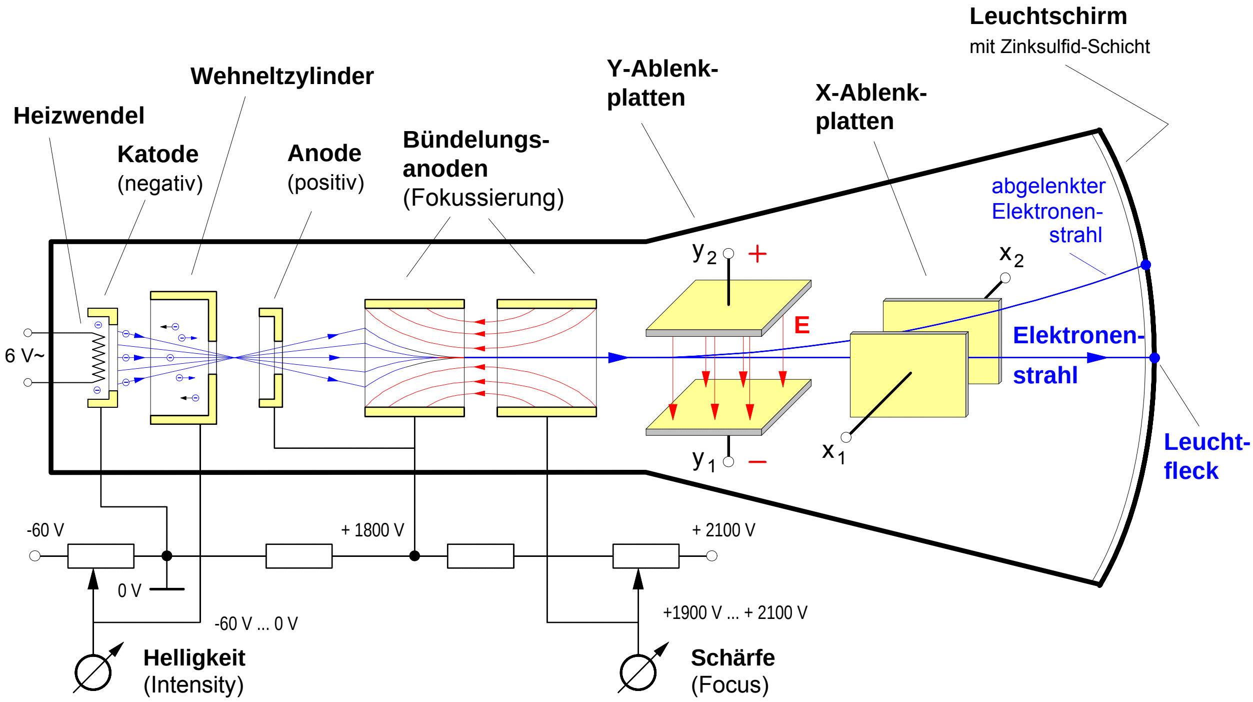
C. Elektromagnetische Leistungssmesser

11. Das **Elektrodynamische Messwerk** als Leistungsmesser (Arbeitsblatt Nr. **11**)
12. Das **Induktionsmesswerk** als Wechselstromzähler
13. **Blindleistungsmessung** mit dem elektrodynamischen Messwerk

Die Arbeitsblätter Nr. **12** und **13** sind noch nicht digitalisiert. Sie werden demnächst nachgereicht.

Lehrgang : **ELEKTRISCHE MESSTECHNIK**	Name: MESS1-1L.DOC - 03.09.02
Arbeitsblatt Nr. **1** : **Elektronenstrahl-Oszilloskopröhre** (Braunsche Röhre)	

1. Aufbau der Oszilloskopröhre (schematische Darstellung)



2. Vertikal-Ablenkung (Y-Ablenkung) und Horizontal-Ablenkung (X-Ablenkung) des Elektronenstrahls

Legt man an die Ablenkplatten eine Spannung, so entsteht zwischen den Platten ein elektrisches Feld. Von diesem Feld wird der negativ geladene Elektronenstrahl gegen die Feldrichtung abgelenkt. Die Feldstärke E und damit auch die Ablenkweite läßt sich mit der Spannung U an den Ablenkplatten steuern.

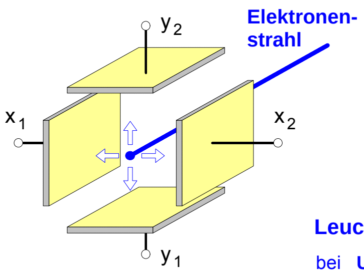


Bild 1: **Ablenkplatten**

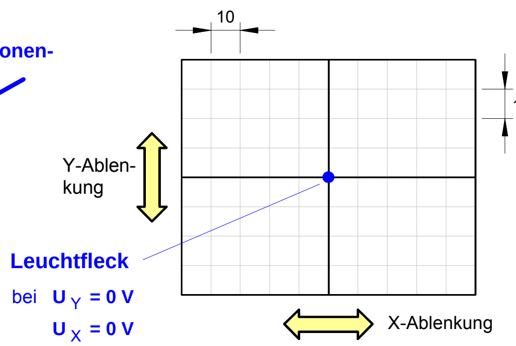


Bild 2: **Bildschirmraster**

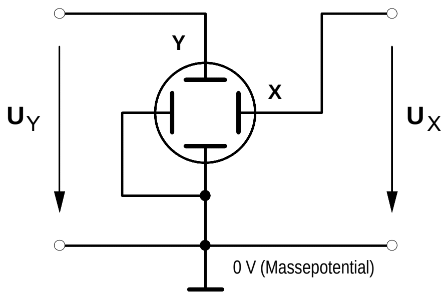
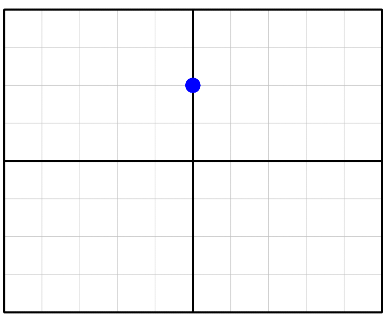


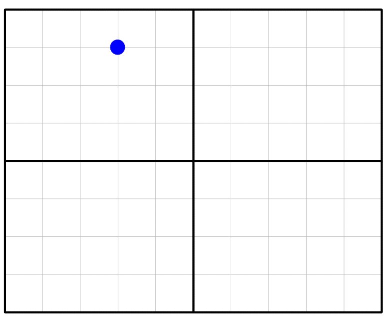
Bild 3: **Schaltzeichen**

3. Ablenkung des Elektronenstrahls bei verschiedenen Gleichspannungen an den Ablenkplatten

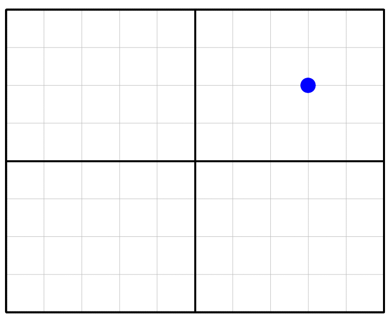
Der an dem Drehschalter "VOLTS/DIV." einstellbare Ablenkfaktor **A** gibt an, welche Spannung an den Y- oder X-Eingang gelegt werden muß, um auf dem Bildschirm eine Ablenkweite von **1 cm** zu bewirken.



a) A_Y = **1** V/cm U_Y = **+ 2** V
A_X = **1** V/cm U_X = **0** V

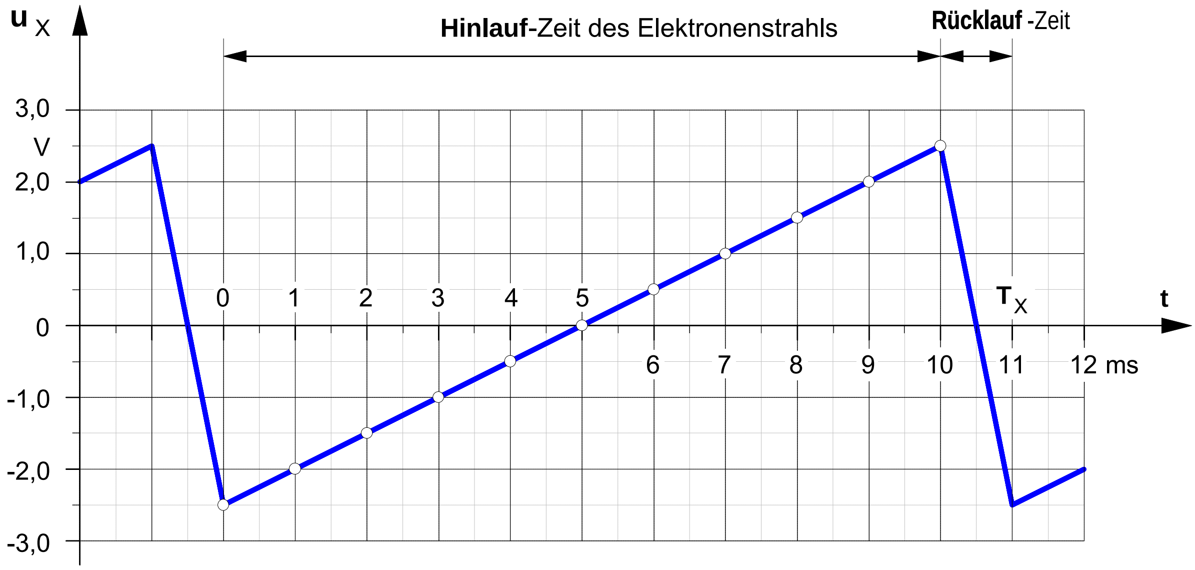


b) A_Y = **1** V/cm U_Y = **+ 3** V
A_X = **1** V/cm U_X = **– 2** V



c) A_Y = **2** V/cm U_Y = **+ 4** V
A_X = **5** V/cm U_X = **+ 15** V

1. **Zeitverlauf** einer **Sägezahnspannung** (als »Zeitablenkspannung« an den **X**-Platten eines Oszilloskops)



2. Einfluß einer **Sägezahnspannung** an den **X**-Platten auf die **Position** des **Leuchtflecks**

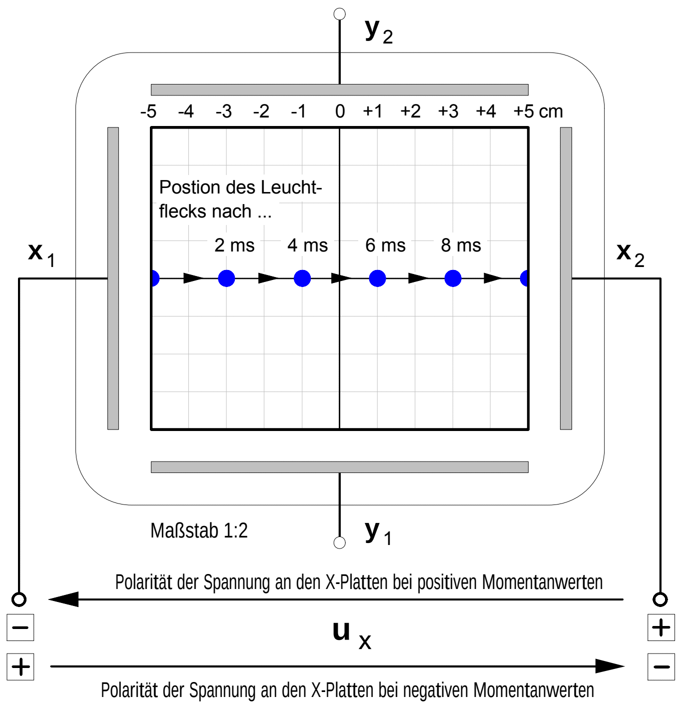
Legt man die oben dargestellte Sägezahnspannung an die **X**-Platten eines Oszilloskop, so verändert sich die Position des Leuchtflecks in Abhängigkeit von der **Zeit** in der im folgenden angegebenen Weise. Wegen dieser Zeitabhängigkeit wird die Sägezahnspannung auch als »Zeitablenkspannung« bezeichnet.

Zur Erinnerung: Der an dem Drehschalter "VOLTS/DIV." einstellbare **Ablenkfaktor A** gibt an, welche Spannung an den Y- oder X-Eingang gelegt werden muß, um auf dem Bildschirm eine **Ablenkweite** von **1 cm** zu bewirken.

Annahme: Der Ablenkfaktor sei A_X = **0,5** V/cm.

t	**u_X**	**s**
0 ms	**-2,5** V	**-5** cm
2 ms	**-1,5** V	**-3** cm
4 ms	**-0,5** V	**-1** cm
6 ms	**+0,5** V	**+1** cm
8 ms	**+1,5** V	**+3** cm
10 ms	**+2,5** V	**+5** cm

t ... **Zeit** in ms u_X ... **Spannung** an den **X**-Platten in V
s ... **Ablenkweite** des Elektronenstrahls in cm



Fazit: Durch die gleichförmig sich ändernde Sägezahnspannung an den **X**-Platten wird der negative Elektronenstrahl in der Hinlaufphase gleichmäßig von links nach rechts abgelenkt; dadurch wandert der Leuchtfleck mit konstanter Geschwindigkeit vom linken zum rechten Bildschirmrand. Die Geschwindigkeit des Leuchtfleckes ist abhängig von der Periodendauer T_X und somit von der Frequenz f_x der Sägezahnspannung. Bei hohen Frequenzen bewegt sich der Fleck so schnell, daß dessen Bewegung wegen der Trägheit des menschlichen Auges nur noch als waagerechte Leuchtlinie wahrgenommen werden kann. Während des sehr schnellen Rücklaufs zum linken Bildschirmrand wird der Elektronenstrahl durch eine negative Spannung am Wehneltzylinder abgeschaltet, um störende Rücklauflinien zu vermeiden.

3. **Darstellung** des **Zeitverlaufs** von **Wechselspannungen** mit dem **Oszilloskop**

Mit der folgenden Aufgabe soll gezeigt werden, welche Bedeutung die an die **X**-Ablenkplatten eines Oszilloskops angeschlossene **Sägezahn**spannung für die Bildschirm-Darstellung einer an die **Y**-Ablenkplatten angeschlossene Wechselspannung hat. Dabei wird angenommen, daß an die **Y**-Platten eines Oszilloskops eine **Sinus-Wechselspannung** (im folgenden kurz *Sinusspannung* genannt) gemäß Bild **2** angeschlossen sei.

Bezüglich der Spannung an den **X**-Platten sollen **zwei Fälle** untersucht werden (siehe Bild **3**) .

- Fall **a)**: Zunächst soll angenommen werden, an die **X**-Platten sei eine **Sägezahn**-Wechselspannung mit gleicher Frequenz angeschlossen.
- Fall **b)**: Anschließend soll davon ausgegangen werden, daß an die **X**-Platten ebenfalls eine **Sinus**-Wechselspannung mit gleicher Frequenz und Amplitude angeschlossen sei.

Aufgabe: Konstruieren Sie für beide Fälle das auf dem Bildschirm sich jeweils ergebende Oszillogramm.

Bild 1: **Oszillogramme auf dem Bildschirm**

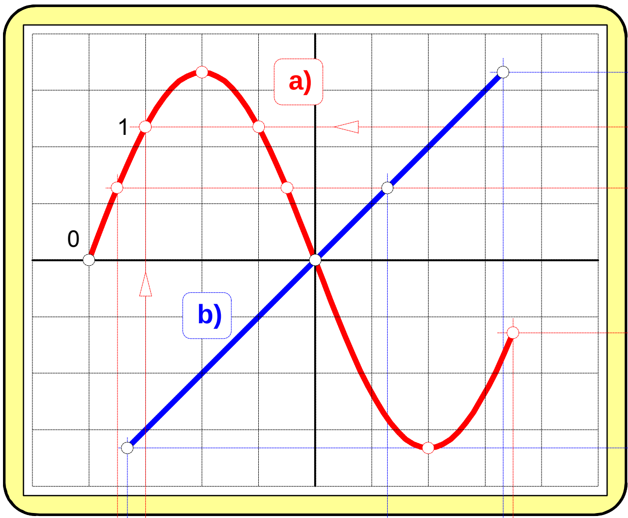
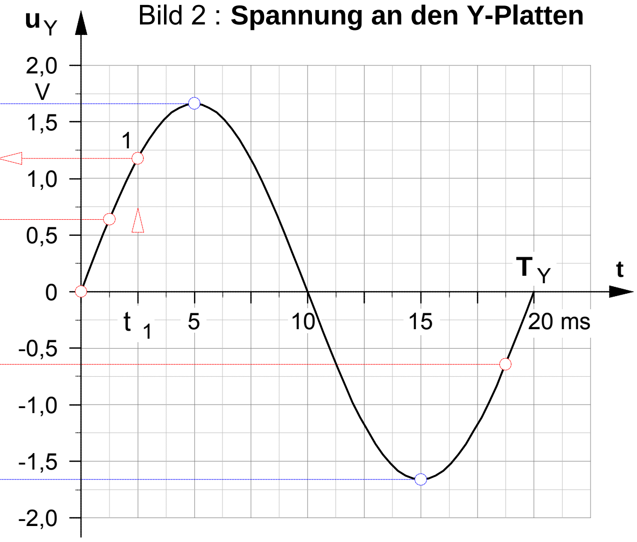


Bild 2 : **Spannung an den Y-Platten**



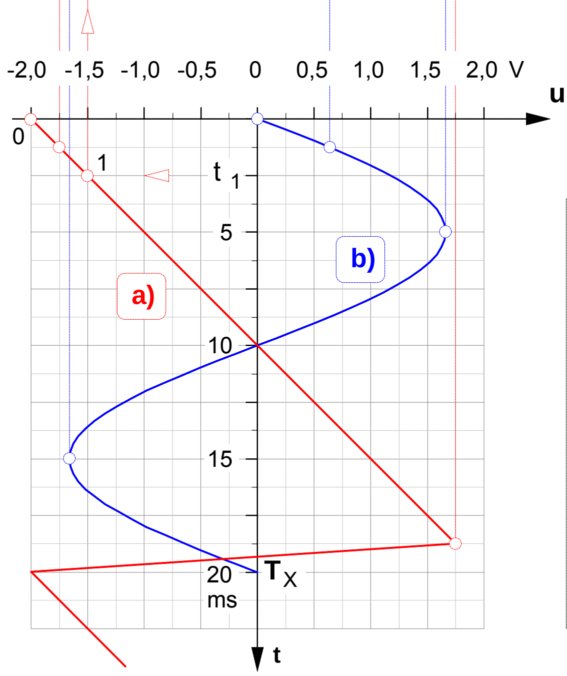
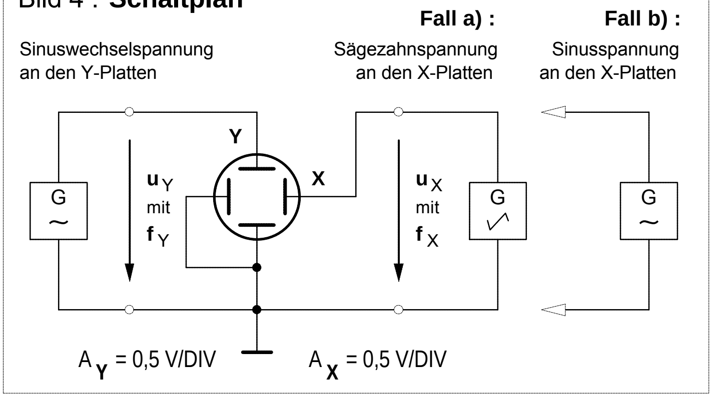


Bild 3: **Spannung an den X-Platten**

Überlagerung zweier senkrecht zueinander verlaufender Wechselspannungen mit g l e i c h e r Frequenz

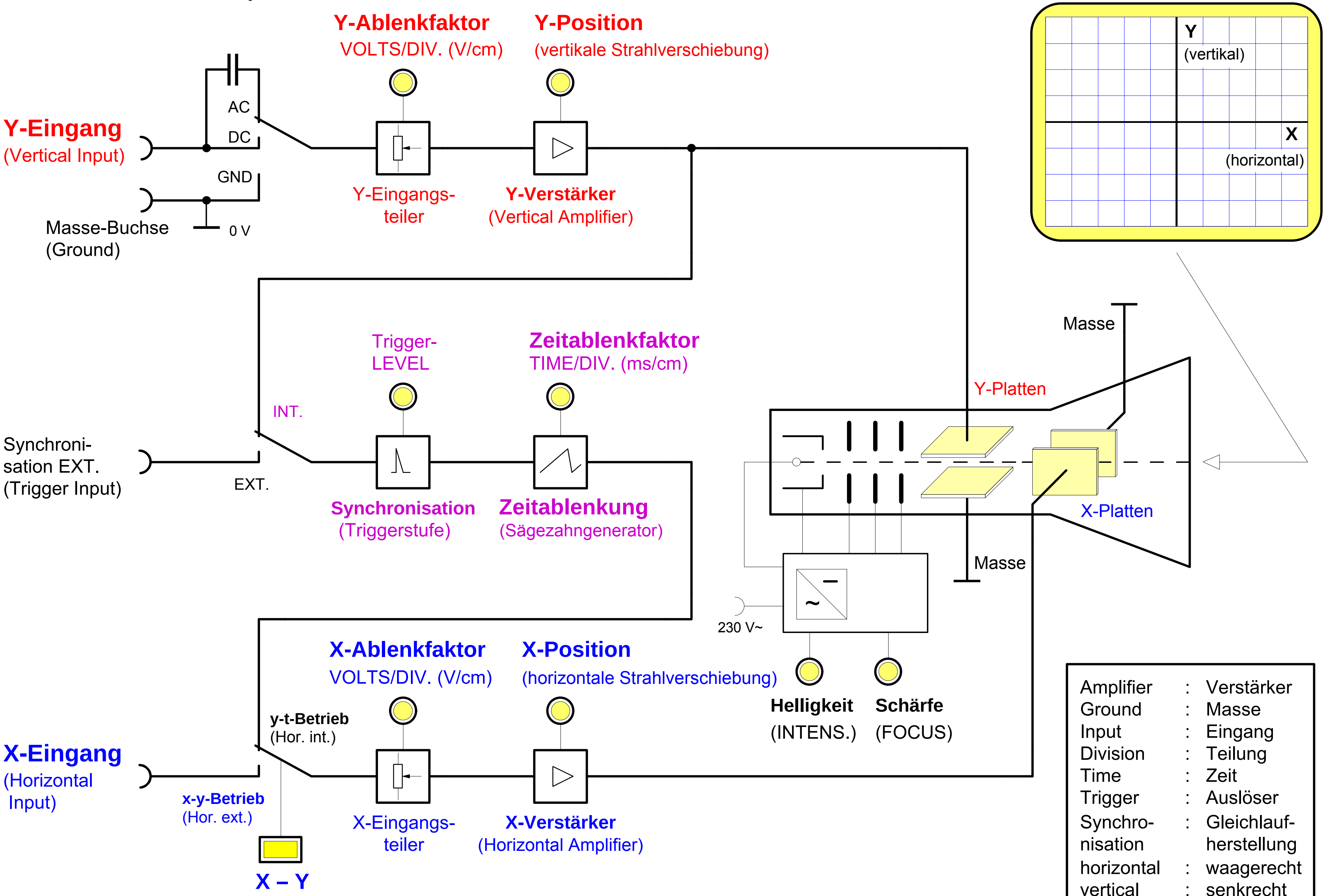
f_Y = 50 Hz $\quad$ f_X = 50 Hz

Bild 4 : **Schaltplan**



Fazit: Nur wenn an den **X**-Platten eine **Sägezahnspannung** angeschlossen ist, wird auf dem Bildschirm der Zeitverlauf der an die **Y**-Platten angeschlossenen Wechselspannung (z.B. Sinusspannung, Dreieckspannung, Rechteckspannung usw.) dargestellt.

Das Einkanal-Oszilloskop



Amplifier	:	Verstärker
Ground	:	Masse
Input	:	Eingang
Division	:	Teilung
Time	:	Zeit
Trigger	:	Auslöser
Synchro-nisation	:	Gleichlauf-herstellung
horizontal	:	waagerecht
vertical	:	senkrecht

1. Das **Zweikanal–Oszilloskop** – Ein **Einstrahl–**Oszilloskop mit elektronischem **Umschalter**

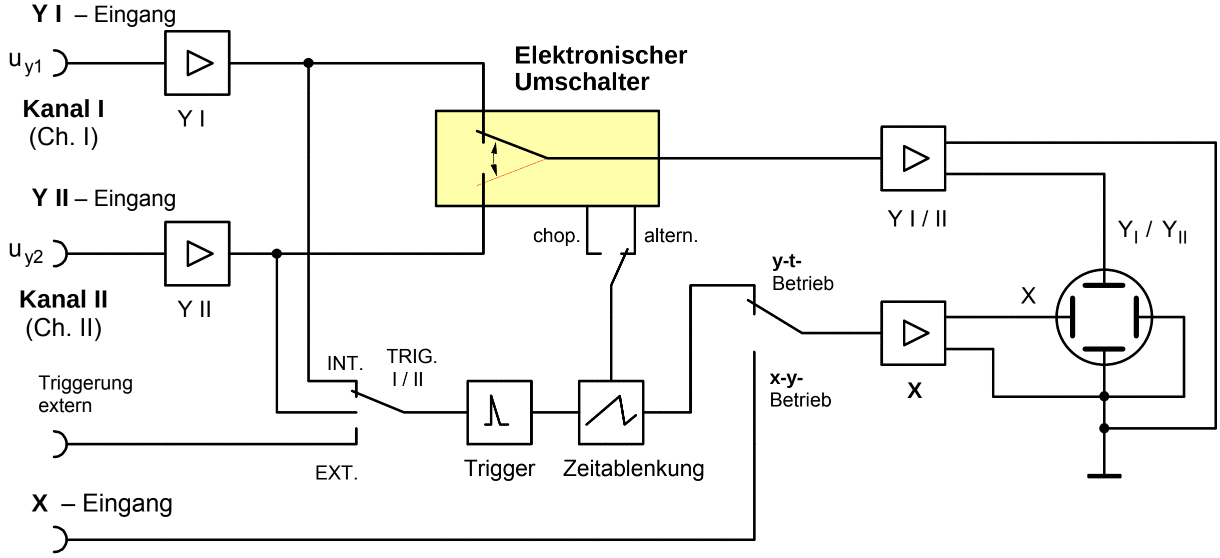


Bild 1 : Zweikanal - Oszilloskop

Die preiswerteste Lösung, um zwei Signale synchron abbilden zu können, bietet ein Einstrahl-Oszilloskop mit zwei Eingangskanälen und einem schnellen elektronischen Umschalter (Bild **1**). Die beiden Signale an den Kanal-Eingängen **Y I** und **Y II** werden von dem Umschalter in raschem Wechsel nacheinander über den Vertikalverstärker an die **Y**-Platten angeschlossen. Durch den sehr schnellen Ablauf der Umschaltvorgänge und den Nachleuchteffekt des Schirmes nimmt das menschliche Auge aufgrund seiner Trägheit den Signalwechsel nicht wahr. Es wird der Eindruck erweckt, als ob die beiden Signale gleichzeitig durch zwei Elektronenstrahlen dargestellt würden.

In der Betriebsart **"Alternated"** (= abwechselnd, siehe Bild **2 a)**) wird abwechselnd von jedem Signal ein voller Schirmdurchlauf dargestellt. Der elektronische Umschalter und der Zeitablenkgenerator arbeiten also synchron. Bei niedriger Zeitablenkgeschwindigkeit macht sich der ständige Wechsel durch stärkeres Blinken bemerkbar (bei geringer Nachleuchtdauer des Schirmes). Daher ist diese Betriebsart insbesondere für **hohe Frequenzen** geeignet.

In der Betriebsart **"Chopped"** (= zerhackend, siehe Bild **2 b)**) wird mit gleichbleibender hoher Frequenz zwischen den beiden Kanälen hin- und hergeschaltet. Bei geringer Ablenkgeschwindigkeit tritt hierbei kein stärkeres Blinken als im Einkanalbetrieb auf. Bei höherer Ablenkgeschwindigkeit werden die fehlenden Kurvenstücke sichtbar, die Linien sind zerhackt. Daher ist diese Betriebsart insbesondere für **niedrige Frequenzen** geeignet.

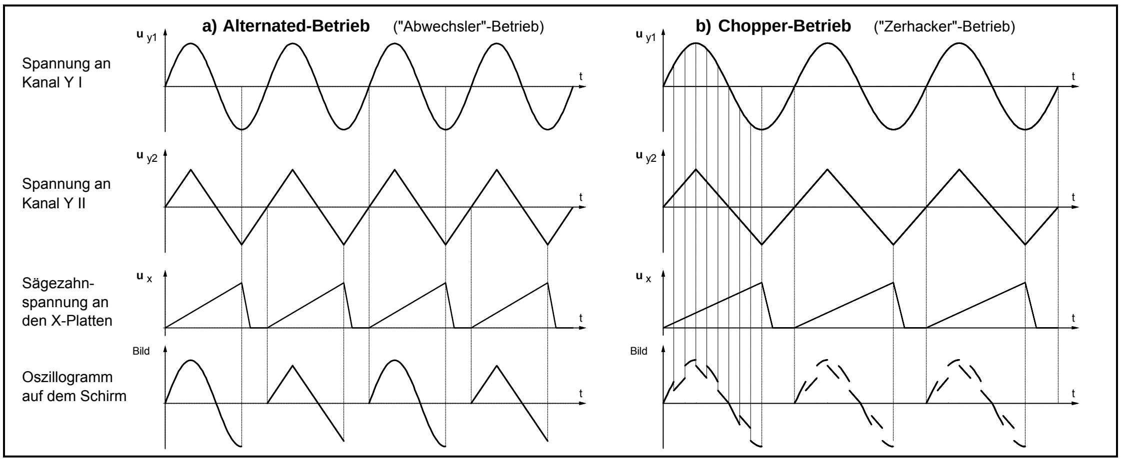


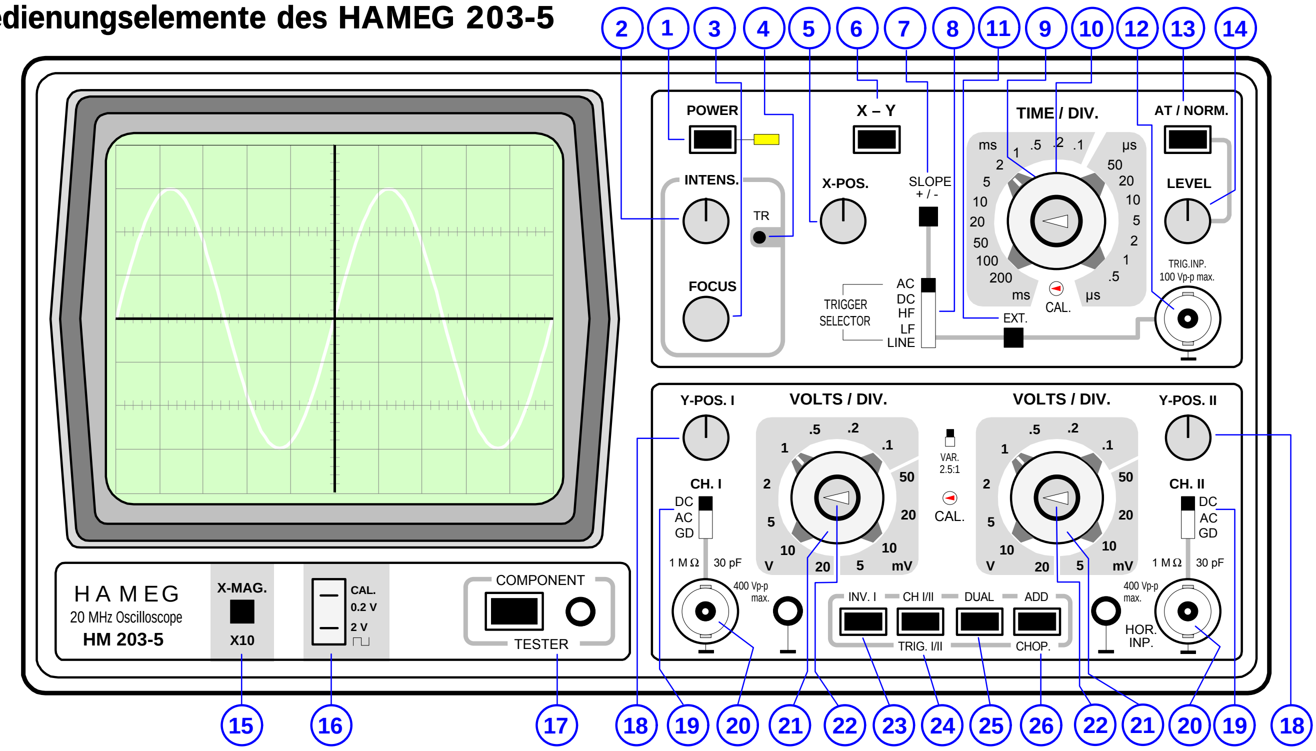
Bild 2 : Zweikanal-Betrieb mit den Betriebsarten **a)** "alternated" und **b)** "chopped"

2. Das **"echte" Zweistrahl – Oszilloskop**

Das Zweistrahl-Oszilloskop, auch "echtes" Zweistrahl-Oszilloskop genannt, besitzt eine spezielle Elektronenstrahlröhre mit **zwei getrennten Elektronenstrahlsystemen**. Lediglich die Horizontalablenkung erfolgt für beide Strahlen gemeinsam. Auch die Vertikalverstärker sind in doppelter Ausführung vorhanden. Dieses teuere Oszilloskop bietet vor allem bei der Untersuchung hochfrequenter Vorgänge entscheidende Vorteile.

Lehrgang : **ELEKTRISCHE MESSTECHNIK**	Name:	MESS-4-L.DOC - 14.07.01
Arbeitsblatt Nr. **4** :	**Das Zweikanal-Oszilloskop HAMEG 203-5**	

Bedienungselemente des HAMEG 203-5



	Element	Funktion (Kurzbeschreibung)
1	**POWER on/off** (Drucktaste und LED-Anzeige)	Netzschalter; Leuchtdiode zeigt den Betriebszustand an
2	**INTENS.** (Drehknopf)	Helligkeitseinstellung für den Kathodenstrahl.
3	**FOCUS** (Drehknopf)	Schärfeeinstellung für den Kathodenstrahl. (Muß bei veränderter Helligkeitseinstellung nachgestellt werden).
4	**TR** Trimmpotentiometer (Einst. m. Schraubenzieher)	Trace Rotation (Strahldrehung). Dient zur Kompensation des Erdmagnetfeldes. Der horizontale Strahl wird damit waagerecht gestellt.
5	**X-POS.** (Drehknopf)	Zur Strahlverschiebung in horizontaler Richtung.
6	**X-Y** (Drucktaste)	XY-Betrieb. Bei gedrückter Taste X-Y wird die interne Zeitablenkung abgeschaltet. Die externe Horizontalablenkung erfolgt über CH II-Eingang. ***Achtung! Bei fehlender Zeitablenkung Einbrenngefahr.***
7	**SLOPE+/–** (Drucktaste)	Signaldarstellung beginnt mit steigender Flanke (Taste nicht gedrückt) oder mit fallender Flanke (Taste gedrückt).
8	**TRIG.** AC-DC-HF-LF-LINE (Schiebeschalter)	Triggerankopplung: AC und DC bis 10 MHz, HF oberhalb 10 MHz, LF unterhalb 1 kHz, LINE mit Netzfrequenz.
9	**TIME/DIV.** (18stufiger Drehschalter)	Bestimmt Zeitkoeffizienten (Zeitablenkgeschwindigkeit) der Zeitbasis von 0.5 µs/cm bis 200 ms/cm.
10	**Variable Zeitbasiseinstellung** (Drehknopf)	Feineinstellung der Zeitbasis. Für calibrierte Zeitmessungen auf CAL. (Linksanschlag) stellen.
11	**EXT.** (Drucktaste)	Triggerung über externes Signal. Signalzuführung über Buchse TRIG.INP.
12	**TRIG.1NP.** (BNC-Buchse)	Eingang für externes Triggersignal. Taste EXT. gedrückt.
13	**AT/NORM.** (Drucktaste)	Automatische Triggerung (Taste nicht gedrückt) oder Normal-Triggerung (Taste gedrückt).
14	**LEVEL** (Drehknopf)	Einstellen des Triggerpunktes bei gedrückter Taste AT/NORM.
15	**X-MAG.X10.** (Drucktaste)	Dehnung der X-Achse um den Faktor 10. Max. Auflösung = 50 ns/cm.
16	**CALIBRATOR** 0.2V-2V	Rechteckspannung 0.2 Vpp bzw. 2 Vpp zum Kalibrieren
17	**COMPONENT TESTER** (Drucktaste)	Komponententester. Das zu prüfende Bauteil wird an die Testbuchse und eine Massebuchse angeschlossen.
18	**Y-POS. I, Y-POS. II** (Drehknöpfe)	Einstellung der vertikalen Position des Strahles für Kanal I und II.
19	**CH. I – DC, AC, GD** (Schiebeschalter)	Eingangssignalankopplung: Kanal I und II. DC = direkte Ankopplung, AC = Ankopplung über einen Kondensator, GD = Oszilloskop-Eingang kurzgeschlossen; Eingangssignal offen.
20	**CH. I, CH. II** (BNC-Buchsen u. Massebuchsen)	Signaleingänge: Kanal I (links) bzw. Kanal II oder horizontaler X-Eingang (rechts). Eingangsimpedanz 1MΩ II 30pF.
21	**Y-Verstärkung** (12stufig. Drehschalter)	Y-Eingangsteiler. Bestimmt den Y-Verstärkungsfaktor in 1–2–5 Schritten und gibt den Umrechnungsfaktor an (V/cm, mV/cm).
22	**Variable Y-Verstärkung** (Drehknopf)	Feineinstellung der Y-Amplitude (Kanal I bzw. II). Erhöht die Verstärkung max. um den Faktor 2,5 (Rechtsanschlag). Muß für Amplitudenmessungen in Stellung CAL. stehen (Linksanschlag)
23	**INV.I** (Drucktaste)	Bei gedrückter Taste wird die Polarität von Kanal I umgedreht. (In Verbindung mit ADD-Taste = Differenzdarstellung).
24	**CH I/II-TRIG. I/II** (Drucktaste)	Einkanalbetrieb (Taste DUAL nicht gedrückt): Taste nicht gedrückt = Darstellung von Kanal I. Taste gedrückt = Darstellung von Kanal II. Gleichzeitig Umschaltung der internen Triggerung.
25	**DUAL** (Drucktaste)	Bestimmt die Betriebsart EINKANAL (Taste nicht gedrückt) oder ZWEIKANAL (Taste gedrückt).
26	**ADD-CHOP.** (Drucktaste)	Wenn ADD allein gedrückt: Summe (I + II). Wenn ADD und INV. gedrückt: Differenz (– I + II). CHOP. nicht und DUAL gedrückt: altern. Kanalumschaltung. CHOP. und DUAL gedrückt: Chopper-Kanalumschaltung.

Lehrgang : **ELEKTRISCHE MESSTECHNIK**	Name: MESS-5A.DOC - 19.02.07
Arbeitsblatt Nr. **5 a)** :	**Spannungs-** und **Frequenzmessung** mit dem **Oszilloskop**

· **Aufgabenbeispiele** zur **Spannungs-, Strom- und Frequenzbestimmung** mit dem **Oszilloskop**

1. Auf dem Bildschirm eines Oszilloskops erscheint im Zeitablenkbetrieb ein Oszillogramm nach **Bild 1**. Der **Y**–Ablenkkoeffizient $\mathbf{A_Y}$ ist auf **5** V/cm eingestellt, der Zeitkoeffizient $\mathbf{A_t}$ auf **2** ms/cm.

a) Wie groß ist der **Effektivwert** der Sinus-Wechselspannung?

b) Bestimmen Sie die **Frequenz f** .

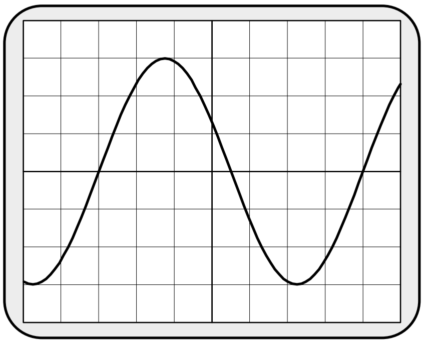


Bild 1

2. An den **Y**–Eingang eines Oszilloskops ist die Spannung an einem **10** kΩ–Widerstand angeschlossen. Auf dem Bildschirm erscheint das in **Bild 2** angegebene Oszillogramm. Der **Y**–Ablenkkoeffizient $\mathbf{A_Y}$ ist auf **2** V/cm eingestellt, der Zeitkoeffizient $\mathbf{A_t}$ auf **10** µs/cm.

a) Wie groß ist der **Scheitelwert** des Stromes durch den Widerstand?

b) Bestimmen Sie die **Frequenz f** .

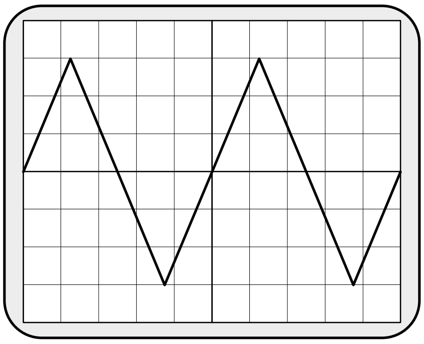


Bild 2

3. Bei der Messung mit einem Oszilloskop erscheint auf dem Bildschirm das in **Bild 3** angegebene Oszillogramm. Der **Y**–Ablenkkoeffizient $\mathbf{A_Y}$ ist auf **10** mV/cm eingestellt, der Zeitkoeffizient $\mathbf{A_t}$ auf **10** µs/cm.

a) Wie groß ist der **Scheitelwert** des Rechteckspannung?

b) Bestimmen Sie die **Frequenz f** .

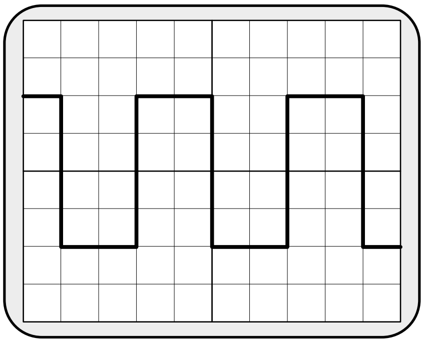


Bild 3

4. Bei der Untersuchung einer **RC-Reihenschaltung** mit dem Oszilloskop ist die Spannung an dem Widerstand **R** = **10** kΩ an den **Y**–Eingang angeschlossen. Auf dem Bildschirm erscheint das in **Bild 4** angegebene Oszillogramm. Der **Y**–Ablenkkoeffizient $\mathbf{A_Y}$ ist auf **0,5** V/cm eingestellt, der Zeitkoeffizient $\mathbf{A_t}$ auf **50** µs/cm.

a) Wie groß ist die **Kapazität C** des Kondensators?

b) Welche **Form** hat die **Eingangsspannung** an der RC-Schaltung? *Begründen* Sie Ihre Antwort!

c) Bestimmen Sie den **Scheitelwert** und die **Frequenz** dieser **Eingangsspannung**.

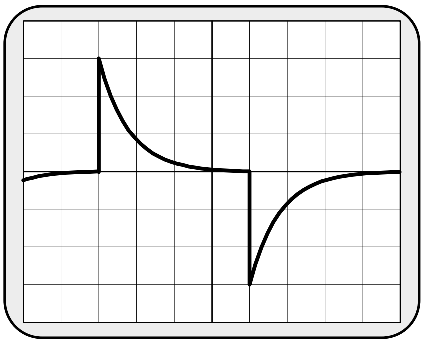
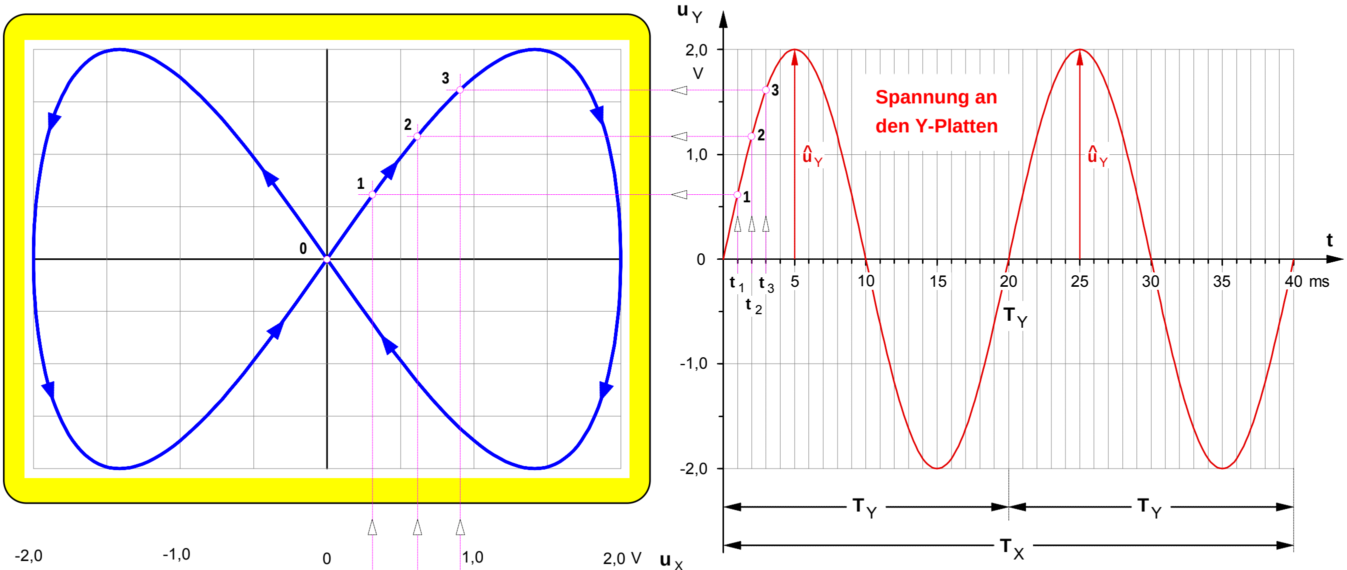


Bild 4

d) Wie würde sich die **Form der Spannung** an dem Widerstand **R** ändern, wenn die **Frequenz** der Eingangsspannung **um das Vierfache erhöht** würde?

1. Entstehung einer **Lissajous-Figur** auf dem Oszilloskop-Bildschirm (*Jules A. Lissajous*, franz. Physiker, 1822 – 1880)



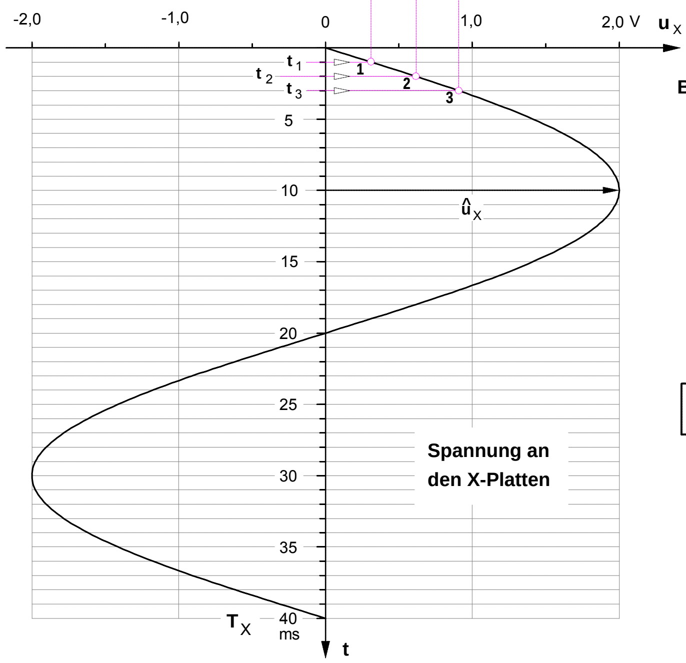


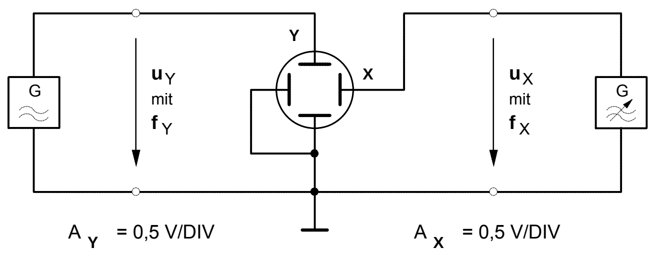
Bild 1 Überlagerung zweier senkrecht zueinander verlaufender Wechselspannungen, deren Frequenzen in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen

Beispiel:

Spannung an den Y-Platten: f_Y = 50 Hz

Spannung an den X-Platten: f_X = 25 Hz

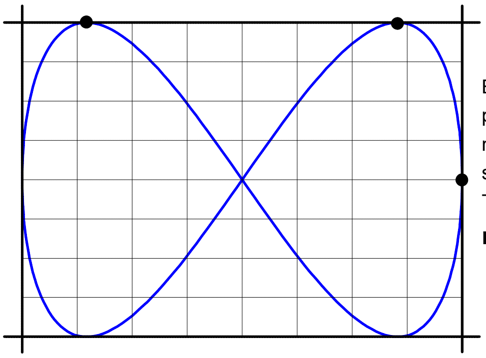
$$\frac{f_Y}{f_X} = \frac{2}{1}$$



Meßschaltung mit **Oszilloskop im X-Y-Betrieb**

Sofern die Frequenzen der Spannungen an den X- und Y-Platten des Oszilloskops in einem **ganzzahligen Verhältnis** zueinander stehen (z.B. 4:1 oder 2:3 usw.), läßt sich dieses Frequenzverhältnis aus dem Verhältnis der Anzahl der *Berührungspunkte* der Lissajous-Linie mit einer waagerechten und senkrechten Tangente an die Lissajous-Figur ermitteln. Denn die Anzahl ***m*** der Berührungspunkte an der *waagerechten* Tangente wird bestimmt durch die Anzahl der Maximalwerte $\hat{u}_Y$, die im Zeitverlauf der Spannung u_Y an den **Y**-Platten gemäß ihrer Frequenz f_Y während einer Zeit **T** auftreten, die ihrerseits ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer T_X der Spannung an den **X**-Platten ist (d.h.: $T = n \cdot T_X$). Hingegen wird die Anzahl ***n*** der Berührungspunkte an der *senkrechten* Tangente bestimmt von der Anzahl der Maximalwerte $\hat{u}_X$, die in der selben Zeit **T** im Zeitverlauf der Spannung u_X an den **X**-Platten gemäß deren Frequenz f_X erscheinen.

Berührungspunkte mit der waagerechten Tangente: **m = 2**



Berührungspunkte mit der senkrechten Tangente :

n = 1

- Frequenzverhältnis

$$\boxed{\frac{f_Y}{f_X} = \frac{m}{n}}$$

m ... Anzahl der Berührungspunkte an der *waagerechten* Tangente

n ... Anzahl der Berührungspunkte an der *senkrechten* Tangente

f_Y ... Frequenz der Spannung an den **Y**-Platten

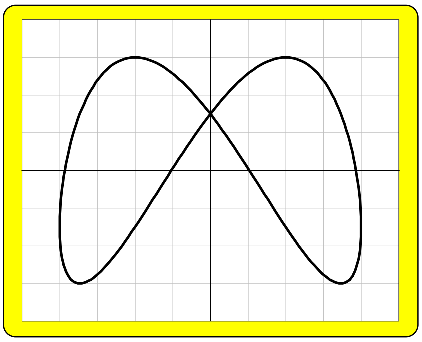
f_X ... Frequenz der Spannung an den **X**-Platten

2. **Bestimmung** einer **unbekannten Frequenz** durch **Frequenzvergleich** mit Hilfe von Lissajous-Figuren

Zur Ermittlung der Frequenz einer Wechselspannung durch relative Frequenzmessung muß die **unbekannte Frequenz** mit einer **bekannten Frequenz** verglichen werden. Dazu wird die Spannung mit der unbekannten Frequenz beispielsweise an die **Y**-Platten des Oszilloskops angeschlossen, während die Spannung mit der einstellbaren bekannten Frequenz an die **X**-Platten gelegt wird (siehe Meßschaltung auf Seite 1). Dadurch entsteht auf dem Bildschirm eine Lissajous-Figur. Um zu gewährleisten, daß die Vergleichsfrequenz $\mathbf{f}_X$ in einem ganzzahligen Verhältnis zu der unbekannten Frequenz $\mathbf{f}_Y$ steht, muß zunächst die Vergleichsfrequenz solange variiert werden, bis die Lissajous-Figur ruhig steht. Erst unter dieser Voraussetzung kann –wie bereits auf Seite 1 beschrieben– aus der Anzahl der Berührungspunkte an der wagerechten und senkrechten Tangente das Frequenzverhältnis bestimmt und daraus die unbekannte Frequenz $\mathbf{f}_Y$ der Spannung an den **Y**-Platten berechnet werden. Dazu einige Beispiele, bei denen wir annehmen wollen, daß die Vergleichsfrequenz jeweils $\mathbf{f}_X$ = **50** Hz betrage.

- Beispiel **a)**: $\mathbf{f}_X$ = **50** Hz **n = 1** **m = 2**

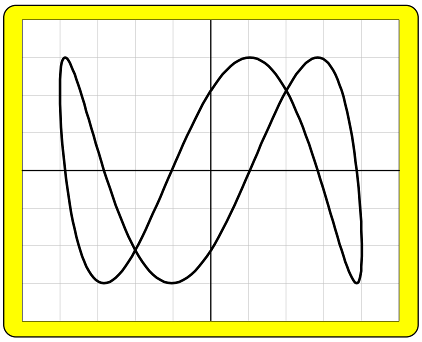
$$\boxed{\frac{f_Y}{f_X} = \frac{m}{n}} \Rightarrow f_Y = f_X \cdot \frac{m}{n} = 50\,\text{Hz} \cdot \frac{2}{1} \Rightarrow \underline{\underline{f_Y = 100\,\text{Hz}}}$$



Übrigens: Die nebenstehende Lissajous-Figur unterscheidet sich von der des Beispiels auf Seite 1, obwohl das Frequenzverhältnis gleich ist. Dies liegt darin begründet, daß hier die Spannung $\mathbf{u}_Y$ an den **Y**-Platten der Spannung $\mathbf{u}_X$ an den **X**-Platten um einen Phasenwinkel von φ = **30**° vorauseilt.

- Beispiel **b)**: $\mathbf{f}_X$ = **50** Hz **n = 1** **m = 3**

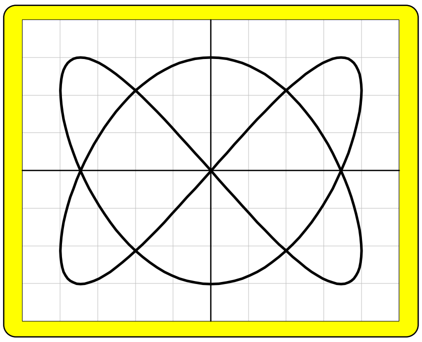
$$\boxed{\frac{f_Y}{f_X} = \frac{m}{n}} \Rightarrow f_Y = f_X \cdot \frac{m}{n} = 50\,\text{Hz} \cdot \frac{3}{1} \Rightarrow \underline{\underline{f_Y = 150\,\text{Hz}}}$$



Übrigens: Bei diesem Beispiel eilt die Spannung $\mathbf{u}_Y$ an den **Y**-Platten der Spannung $\mathbf{u}_X$ an den **X**-Platten um einen Phasenwinkel von φ = **45**° voraus.

- Beispiel **c)**: $\mathbf{f}_X$ = **50** Hz **n = 2** **m = 3**

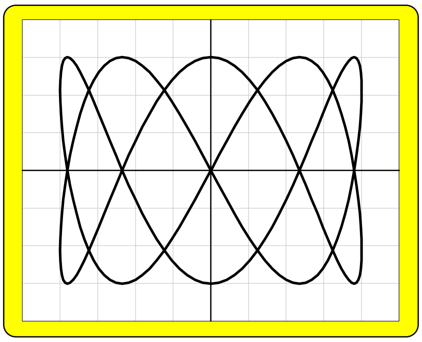
$$\boxed{\frac{f_Y}{f_X} = \frac{m}{n}} \Rightarrow f_Y = f_X \cdot \frac{m}{n} = 50\,\text{Hz} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{f_Y = 75\,\text{Hz}}}$$



Übrigens: Bei diesem Beispiel eilt die Spannung $\mathbf{u}_Y$ an den **Y**-Platten der Spannung $\mathbf{u}_X$ an den **X**-Platten um einen Phasenwinkel von φ = **90**° voraus.

- Beispiel **d)**: $\mathbf{f}_X$ = **50** Hz **n = 2** **m = 5**

$$\boxed{\frac{f_Y}{f_X} = \frac{m}{n}} \Rightarrow f_Y = f_X \cdot \frac{m}{n} = 50\,\text{Hz} \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow \underline{\underline{f_Y = 125\,\text{Hz}}}$$



Übrigens: Bei diesem Beispiel verläuft die Spannung $\mathbf{u}_Y$ an den **Y**-Platten **phasengleich** mit der Spannung $\mathbf{u}_X$ an den **X**-Platten, d.h. der Phasenwinkel beträgt φ = **0**° .

1. Bestimmung der Phasenverschiebung mit dem Zweikanal-Oszilloskop

Die beiden Sinus-Wechselspannungen, deren Phasenverschiebung bestimmt werden soll, sind über die Kanäle I und II an die **Y**-Platten des Oszilloskops anzuschließen (Bild **1**).

Zunächst müssen aus dem Oszillogramm (Bild **2**) die Längen X_0 und X_T bestimmt werden. Die Länge X_0 entspricht dem Phasenwinkel j und die Länge X_0 der Periodendauer **T** und damit einem Vollwinkel von 360°. Diese Längen verhalten sich wie der Phasenwinkel j zu einem Vollwinkel von 360°. Es gilt demnach folgende Verhältnisgleichung:

$$\frac{\varphi}{360°} = \frac{X_0}{X_T}$$

Daraus folgt für die Berechnung des Phasenwinkels:

$$\boxed{\varphi = \frac{X_0}{X_T} \cdot 360°}$$

Für das in Bild **2** angegebene Beispiel gilt :

X_0 = 1 cm $\qquad$ X_T = 8 cm

$$\varphi = \frac{1\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} \cdot 360° \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = 45°}}$$

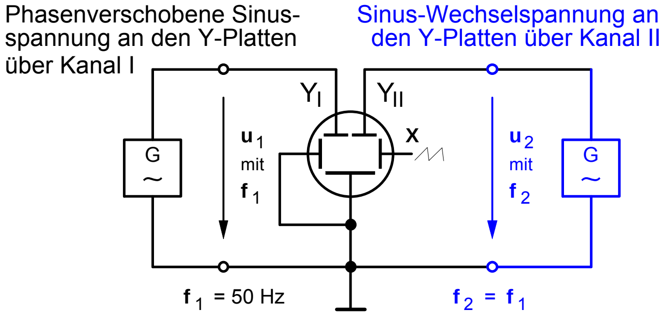


Bild **1** : Meßschaltung mit **Zweikanal**-Oszilloskop

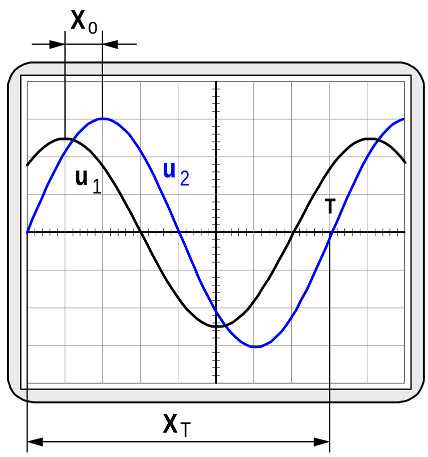


Bild **2** : Oszillogramm der phasenverschobenen Spannungen

2. Bestimmung der Phasenverschiebung mit dem Einkanal-Oszilloskop

Schließt man an die **Y**-Platten eines Oszilloskops eine sinusförmige Wechselspannung an und legt bei abgeschalteter Zeitablenkung (X-Y-Betrieb) an die **X**-Platten ebenfalls eine sinusförmige, aber um den Winkel j phasenverschobene Wechselspannung gleicher Frequenz, so entsteht auf dem Leuchtschirm als Lissajous-Figur eine **Ellipse**, deren Form von der Größe des Phasenwinkels abhängig ist (Die Konstruktion dieser Lissajous-Figur ist auf der Seite 2 dieses Arbeitsblattes dargestellt.).

Das Verhältnis der aus dem Oszillogramm (Bild **4**) zu entnehmenden Längen y_0 und $\hat{y}$ ist der Sinuswert des Phasenwinkels. Für den Phasenwinkel gilt demnach:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{y_0}{\hat{y}}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\varphi = \arcsin\frac{y_0}{\hat{y}}}$$

Sonderfälle: Bei j = 0° ergibt sich stets eine Gerade durch den Ursprung (Denn in diesem Fall muß ja y_0 = 0 sein.) und bei j = 90° eine Ellipse mit waagerechter Hauptachse (Denn in diesem Fall muß ja $y_0 = \hat{y}$ sein.). Bei j = 90° erscheint auf dem Schirm ein Kreis, sofern die Amplituden gleich sind und gleiche Ablenkfaktoren eingestellt sind. Bei allen anderen Winkeln zwischen 0° und 90° entsteht eine Ellipse mit schräg verlaufender Hauptachse.

Für das in Bild **4** angegebene Beispiel gilt:

y_0 = 4 cm $\qquad$ $\hat{y}$ = 8 cm

$$\varphi = \arcsin\frac{4\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = 30°}}$$

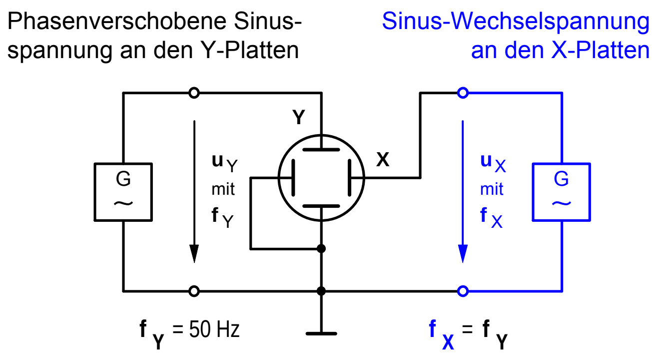


Bild **3** :Meßschaltung mit **Einkanal**-Oszilloskop

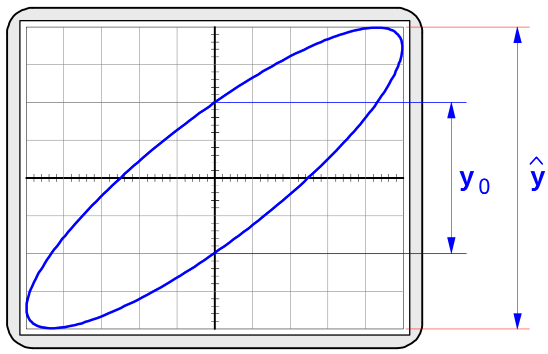


Bild **4** : Liegen zwei phasenverschobene Sinus-Spannungen an den Y- und X-Platten eines Einkanal-Oszilloskops, so entsteht als Lissajous-Figur das Bild eines auf einer Ellipse umlaufenden Leuchtpunktes.

3. **Erzeugung einer Lissajous-Figur** durch zwei phasenverschobene Wechselspannungen

Legt man an die um 90° versetzt angeordneten **X**– und **Y**–Platten eines Einkanal-Oszilloskops (im **X–Y**–Modus) zwei phasenverschobene Sinus-Spannungen gleicher Frequenz, so entsteht auf dem Leuchtschirm das Bild eines auf einer Ellipse umlaufenden Leuchtpunktes. Wie diese Lissajous-Figur durch Überlagerung erzeugt wird, soll mit dieser Aufgabe gezeigt werden. Dazu wird exemplarisch angenommen, daß die Frequenz 50 Hz betrage und die phasenverschobene Spannung an den **Y**-Platten gegenüber der an den **X**-Platten um den Phasenwinkel j = **45°** vorauseile.

Aufgabe: Konstruieren Sie das auf dem Leuchtschirm sich ergebende Oszillogramm.

Bild 1: **Oszillogramm auf dem Leuchtschirm**

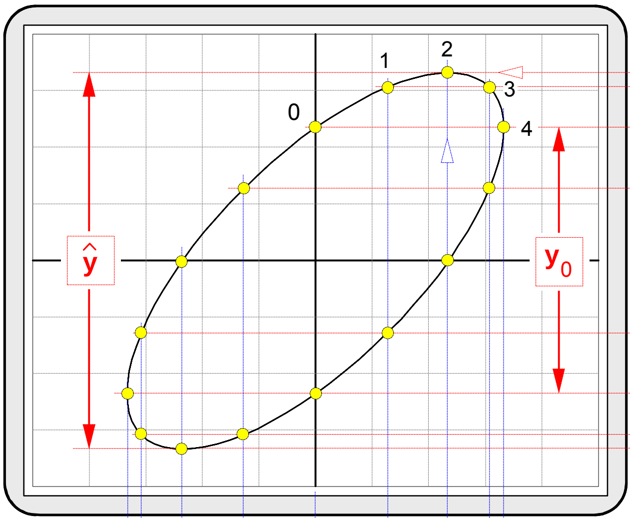
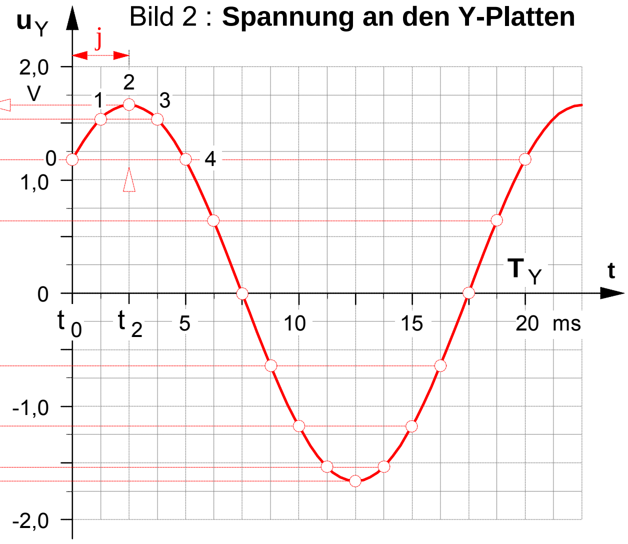


Bild 2 : **Spannung an den Y-Platten**



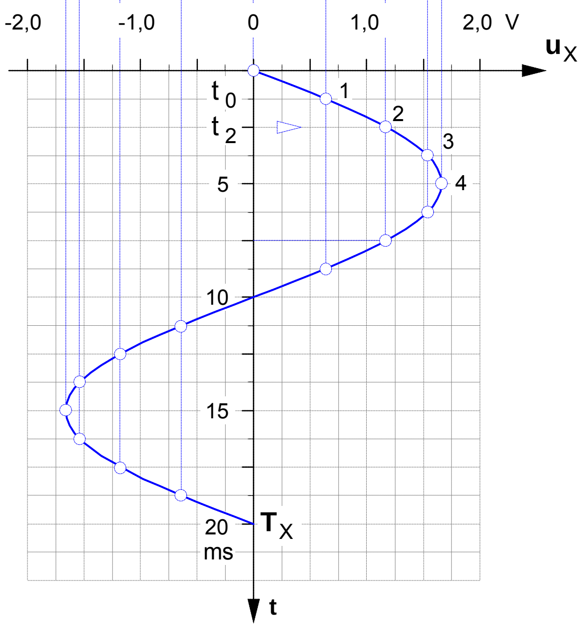


Bild 3: **Spannung an den X-Platten**

Berechnung des Phasenwinkels (siehe auch unten) *

$$\boxed{\varphi = \arcsin \frac{y_0}{\hat{y}}}$$

wobei

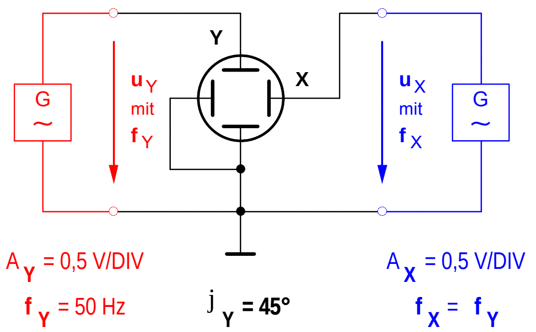
$y_0 = 2 \cdot u_0$

$\hat{y} = 2 \cdot \hat{u}$

Bild 4 : **Meßschaltung**

Phasenverschobene Sinus-spannung an den Y-Platten

Sinuswechselspannung an den X-Platten



* Daß die Berechnung des Phasenwinkels über eine Sinusfunktion erfolgt, liegt in der Beziehung zwischen Zeiger- und Liniendiagramm begründet (siehe Bild **5**). In dem rechtwinkligen Zeiger-Dreieck ist der Augenblickswert $\mathbf{u_0}$ im Zeitpunkt $\mathbf{t_0}$ = 0 die Gegenkathete zu dem Phasenwinkel φ und der Maximalwert **û** stellt die Hypotenuse dar.

rotierender Zeiger im Zeitpunkt $\mathbf{t}_0$

Liniendiagramm (Zeitdiagramm)

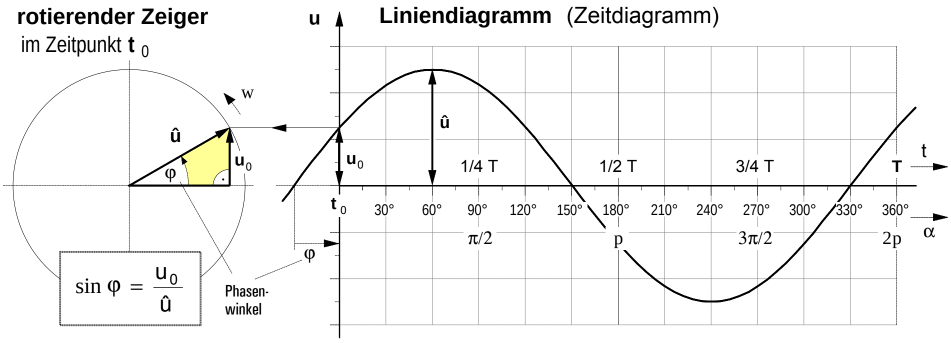


Bild **5**: Zeiger- und Liniendiagramm einer phasenverschobenen Sinus-Wechselspannung

Lehrgang : **ELEKTRISCHE MESSTECHNIK**	Name:	MESS-5-D.DOC - 19.02.07
Arbeitsblatt Nr. **5 d)** :	Darstellung von **Lissajous-Figuren** mit dem **Oszilloskop**	

Jules Antoine Lissajous
1822–1880

Vollzieht ein Massepunkt (oder der Leuchtpunkt auf einem Oszilloskopschirm) gleichzeitig zwei senkrecht zueinander verlaufende Schwingungen, so bewegt sich der jeweilige Punkt auf in sich geschlossenen Bahnkurven. Diese wurden 1857 erstmal von dem französischen Mathematiker und Physiker Jules Antoine Lissajous erforscht und beschrieben. Ihm zu Ehren hat man die Bahnen des umlaufenden Punktes als Lissajous-Figuren bezeichnet. Sie können auf mechanischem Wege erzeugt werden mit einem Doppelpendel gemäß Bild **1** oder mit Hilfe elektrischer Sinus-Wechselspannungen, die gemäß Bild **2** an die um 90° versetzt angeordneten Ablenkplatten eines Oszilloskops anschließt (siehe dazu auch die Arbeitsblätter **4 b)** und **4 c)**).

Mathematisch lassen sich die einzelnen Punkte einer Lissajous-Figur mit Hilfe der folgenden Funktionsgleichungen berechnen:

$$x = a_x \cdot \sin(n \cdot \alpha)$$
$$y = a_y \cdot \sin(m \cdot \alpha + \varphi)$$

wobei $\alpha = \omega \cdot t$ und $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

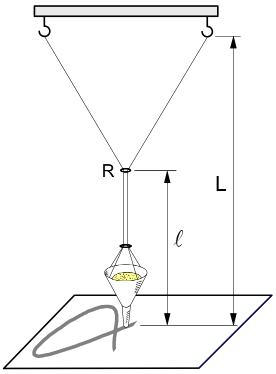


Bild **1** :
Mechanisches Doppelpendel zur Darstellung von Lissajous-Figuren

Die Formen von Lissajous-Figuren werden bei gleicher Amplitude zum einen durch die Phasenverschiebung j zwischen den beiden Schwingungen und zum anderen durch das Verhältnis **m : n** der Winkelfaktoren, das dem Frequenzverhältnis **f_Y : f_X** entspricht, denn bei einer zeitabhängigen Darstellung ist der Winkel als Produkt aus Kreisfrequenz und Zeit anzugeben (a = w · **t**) . Bei dem Doppelpendel in Bild **1** läßt sich das Frequenzverhältnis übrigens durch Verschieben des Ringes R einstellen.

Vgl. dazu: L. Bergmann, Cl. Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Berlin 1961, S. 157 ff.

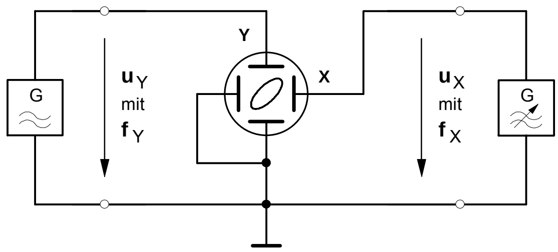


Bild **2** : Schaltung zur Darstellung von Lissajous-Figuren mit dem Oszilloskop

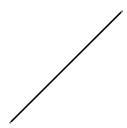
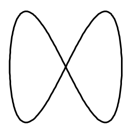
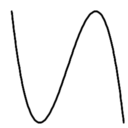
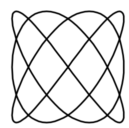
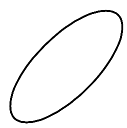
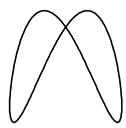
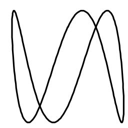
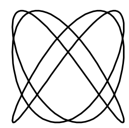
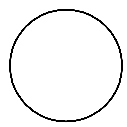
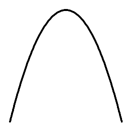
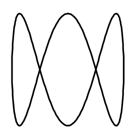
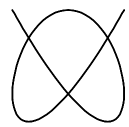
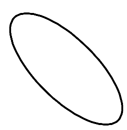
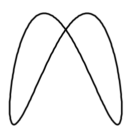
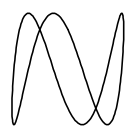
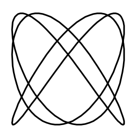
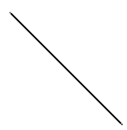
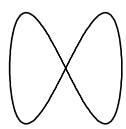
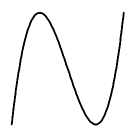
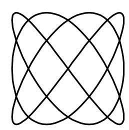
	m : n = 1 : 1	**m : n = 2 : 1**	**m : n = 3 : 1**	**m : n = 4 : 3**
φ = 0				
φ = 45° bzw. **φ = 1/4** p				
φ = 90° bzw. **φ = 1/2** p				
φ = 135° bzw. **φ = 3/4** p				
φ = 180° bzw. **φ =** p				

Bild **2** : Lissajous-Figuren bei verschiedenen Frequenzverhältnissen und Phasenwinkeln

Lehrgang : **ELEKTRISCHE MESSTECHNIK**	Name: MESS-6-1.DOC - 19.02.07	
Arbeitsblatt Nr. **6** (Laborübung **1**) :	**Erste Messungen mit dem Oszilloskop**	Seite **1**

1. Beobachtung der Zeitablenkung des Oszilloskops

a) Stellen Sie das Oszilloskop so ein, daß der Leuchtfleck im Ursprung des Bildschirmrasters erscheint.

Beachten Sie, daß die Leuchtschicht der Oszilloskopröhre zerstört wird, wenn der Elektronenstrahl nicht ständig abgelenkt wird! Stellen Sie deshalb im X-Y-Betrieb höchstens eine mittlere Helligkeit ein!

b) Schalten Sie die **Zeitablenkung** ein.

- Stellen Sie den Zeitkoeffizienten mit Hilfe des Drehschalters **TIME/DIV.** auf **200 ms** und beobachten Sie den Leuchtfleck.
- Welche **Zeit t** benötigt der Leuchtfleck für das einmalige Durchlaufen der **X**-Achse?

c) Was läßt sich beobachten, wenn der Zeitkoeffizient z.B. **auf 20 µs verringert wird**? Begründen Sie Ihre Beobachtung.

---

2. Messung einer Gleichspannung

Die **Ausgangsspannung U_a** des folgenden Spannungsteilers ist nach drei Verfahren zu bestimmen.

a) Sämtliche Einstellungen und Messungen sind zunächst mit Hilfe des **Oszilloskops** vorzunehmen.

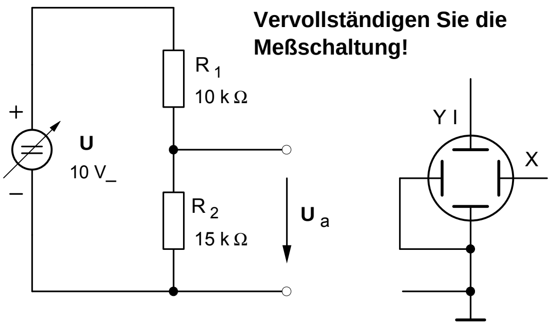
b) Wiederholen Sie anschließend die Einstellungen und Messungen mit einem **Vielfachmeßgerät**.

c) Schließlich soll der Wert von **U_a** durch eine entsprechende **Rechnung** theoretisch bestimmt werden.

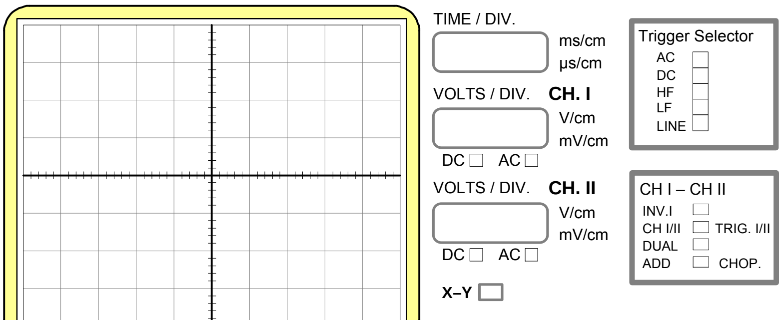
d) Vergleichen Sie die Ergebnisse. Abweichungen sind gegebenenfalls zu begründen.

▶ **Meßschaltung**

Vervollständigen Sie die Meßschaltung!



▶ **Oszilloskop– Messprotokoll**



Oszillogramm: **M 1:2**

---

3. Messung einer Wechselspannung

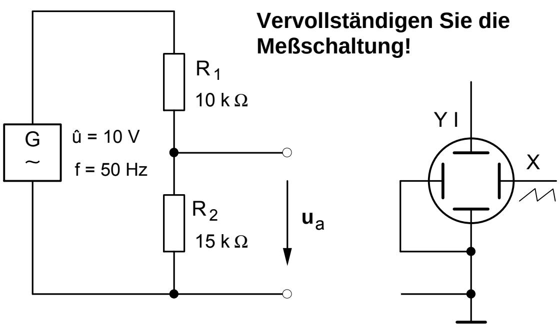
Der Spannungteiler soll jetzt mit einer **sinusförmigen Wechselspannung** (û = 10V / f = 50 Hz) betrieben werden. Als Wechselspannungsquelle soll der Funktionsgenerator dienen. Auch hier sind sämtliche Einstellungen und Messungen zunächst mit Hilfe des **Oszilloskops** vorzunehmen.

a) Messen Sie den **Scheitelwert $\hat{u}_a$** der **Ausgangsspannung** des Spannungsteilers mit dem **Oszilloskop**.

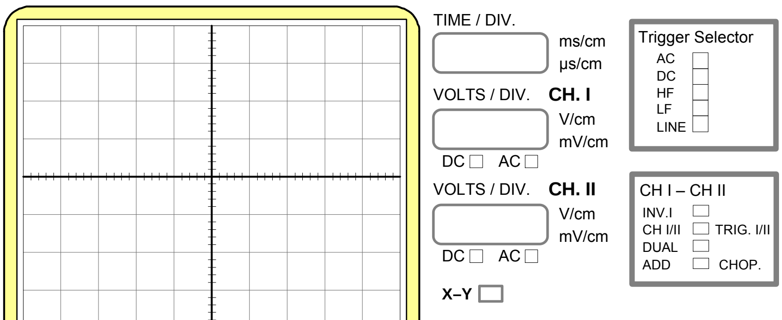
b) Messen Sie anschließend die **Ausgangsspannung** mit Hilfe eines **Vielfachmeßgeräts**. Begründen Sie die unterschiedlichen Meßergebnisse.

▶ **Meßschaltung**

Vervollständigen Sie die Meßschaltung!



▶ **Oszilloskop– Messprotokoll**



Oszillogramm: **M 1:2**

Beachten Sie bitte: Sämtliche Meßschaltungen müssen zunächst vervollständigt werden. Bis auf die Oszillo-skop-Messprotokolle sind die Meßergebnisse und Antworten auf einem gesonderten Blatt festzuhalten!

• **Aufnahme** der **Lade- und Entladekurven** eines Kondensators mit dem **Oszilloskop**

1. Stellen Sie zunächst mit Hilfe des Oszilloskops am Ausgang des Funktionsgenerators die unten dargestellte **Rechteck-spannung u_E** ein. Bauen Sie anschließend die folgende **RC-Schaltung** (**R = 10** kΩ ; **C = 2** nF) auf und schließen Sie die Rechteckspannung **u_E** an.

2. Auf dem Bildschirm des Oszilloskops sollen zunächst die **Spannungen u_E** (Kanal YI) und **u_c** (Kanal YII) dargestellt werden. Vervollständigen Sie den **Schaltplan** (**Bild 1**) und bauen Sie anschließend die **Meßschaltung** auf.

3. Die **Augenblickswerte** der Spannung **u_C** sind in Zeitabständen von 20 µs mit Hilfe des Oszilloskops zu messen und in das folgende **Zeitdiagramm** einzutragen. Zeichnen Sie mit Hilfe der eingetragenen Meßwerte den **Spannungs-**verlauf am Kondensator während des Ladens und Entladens.

4. Stellen Sie anschließend die **Spannungen u_E** (Kanal YI) und **u_R** (Kanal YII) auf dem Bildschirm dar. Vervollständigen Sie vorher den Schaltplan im **Bild 2** . Zeichnen Sie auf der Grundlage Ihrer Oszillogramme in das untenstehende Zeitdiagramm den **Strom**verlauf während des Ladens und Entladens.

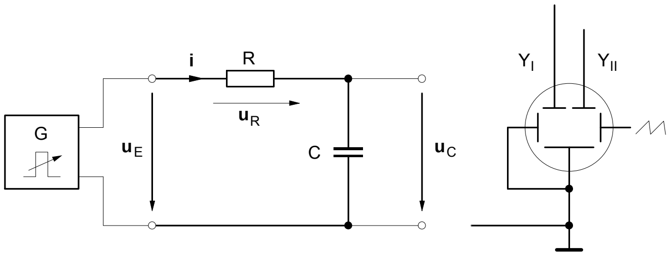


Bild 1: Meßschaltung zur Darstellung der **Kondensatorspannung**

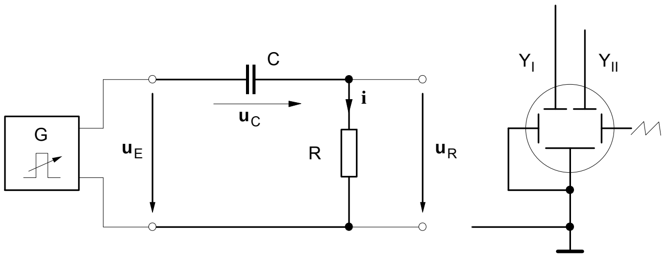


Bild 2: Meßschaltung zur Darstellung des **Kondensatorstromes**

Einstellwerte am Oszilloskop:

• **Y-Ablenkung**
(VOLTS/DIV.)

▶ Kanal YI :

____

▶ Kanal YII :

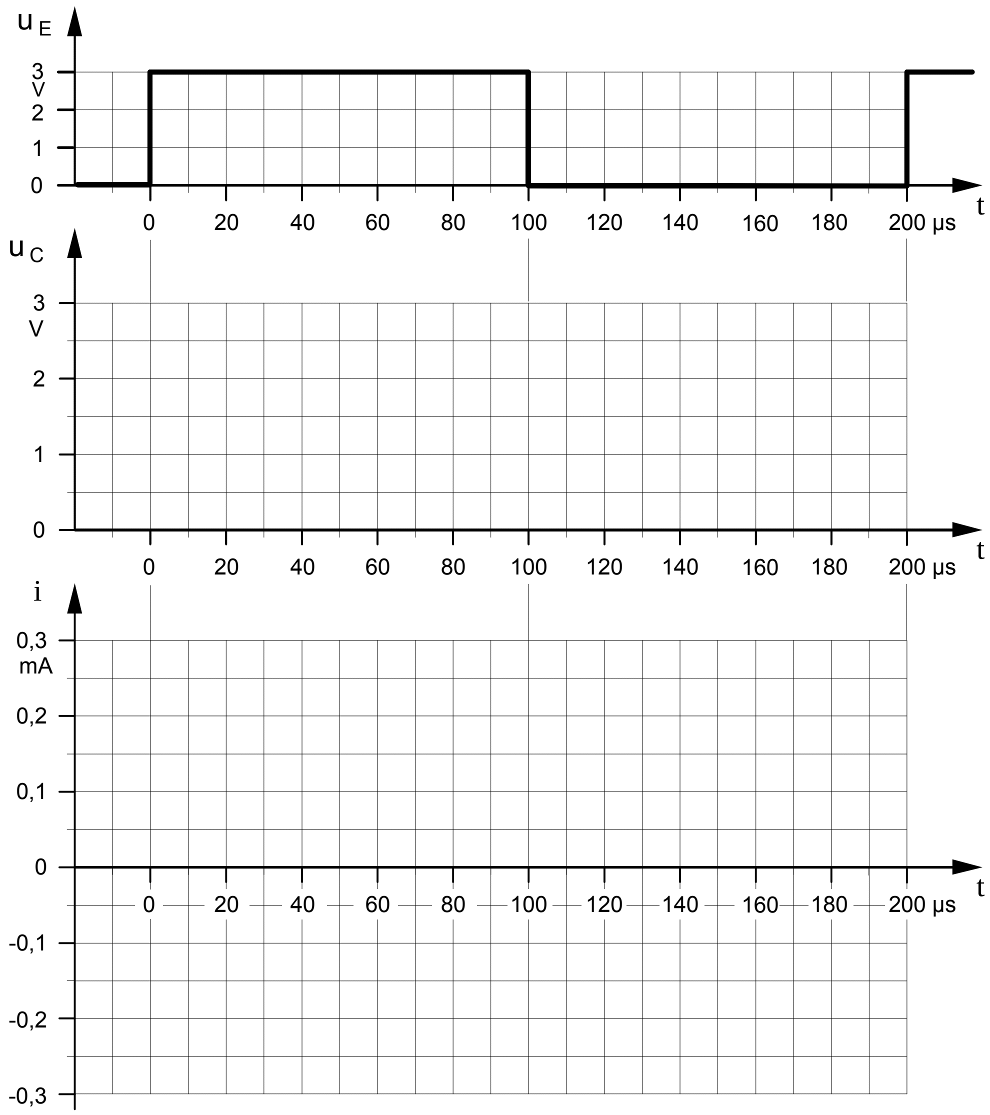
____

• **Zeit-Ablenkung**
(TIME/DIV.)

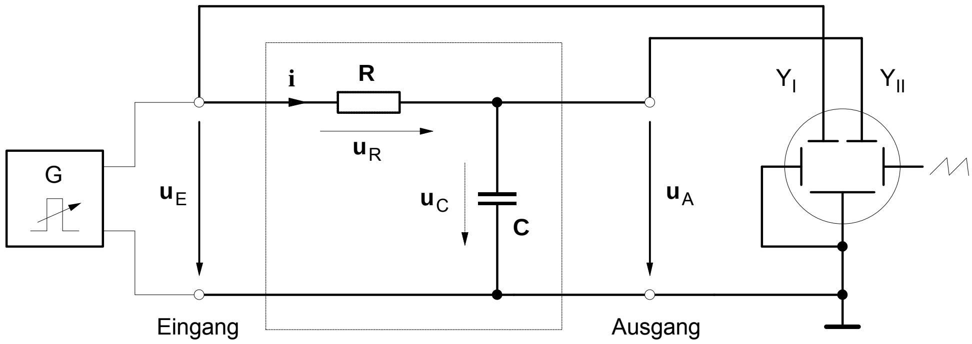
____

• Für die Augenblickswerte des **Stromes i** gilt in jedem Moment:

$$\boxed{i = \frac{u_R}{R}}$$



· Impulsformer: **RC-Schaltung** als **Integrierglied**



u_E = **2** V_{SS} **R** = **4,7** kΩ **C** = **2** nF

a) Spannungszeitdiagramme bei relativ **niedriger Frequenz** (f = 10 kHz)

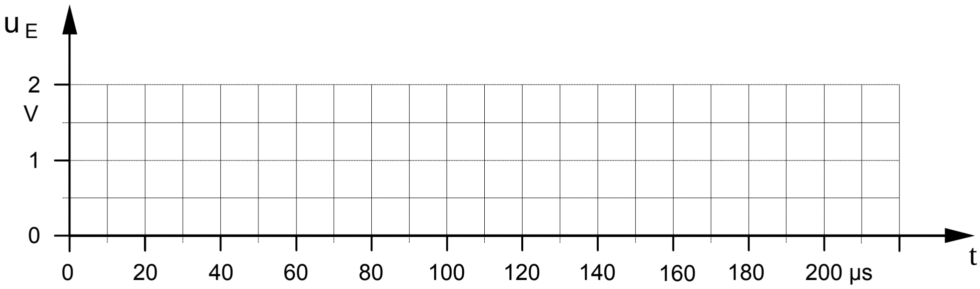
f = **10** kHz

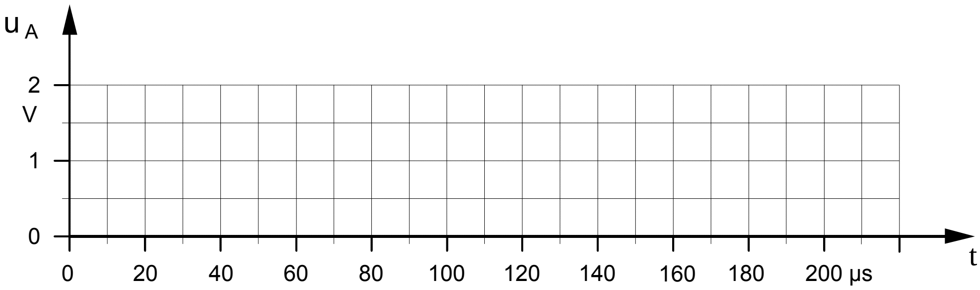
T = ______________

T/2 = ______________

t = ______________

5t = ______________





b) Spannungszeitdiagramme bei relativ **hoher Frequenz** (f = 100 kHz)

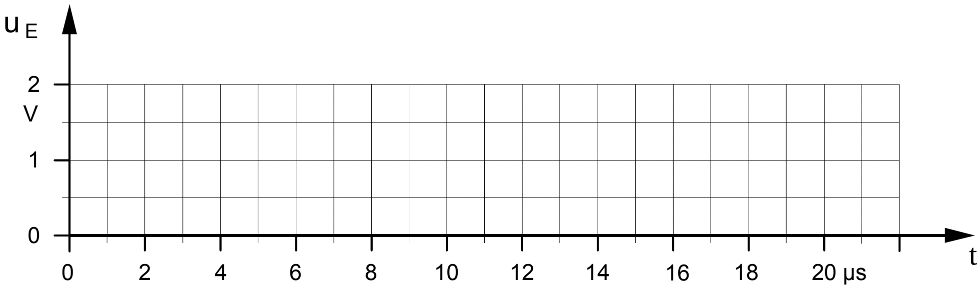
f = **100** kHz

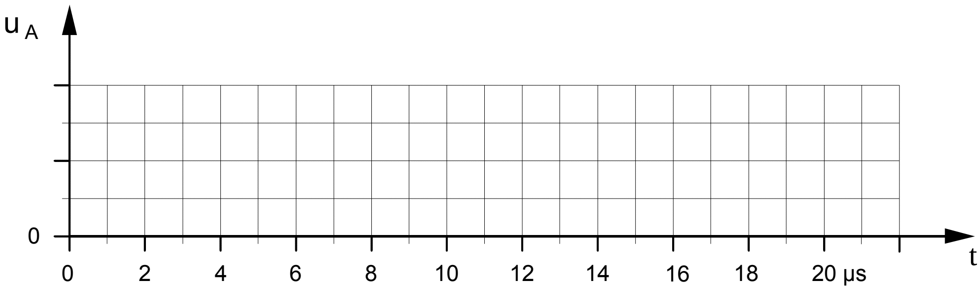
T = ______________

T/2 = ______________

t = ______________

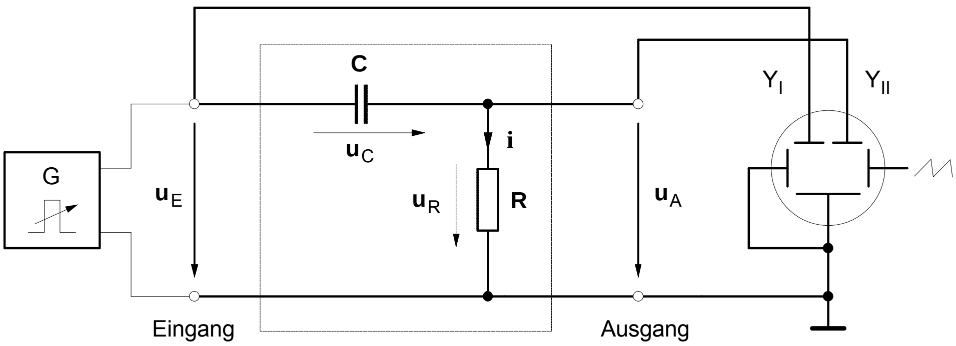
5t = ______________





1. Ermitteln Sie mit Hilfe des Oszilloskops die Zeitdiagramme der Eingangs- und Ausgangsspannung des Integriergliedes für die oben angegebenen Frequenzen.
2. Untersuchen, beschreiben und begründen Sie den Einfluß der Frequenz **f**, der Kapazität **C** und des Widerstandes **R** auf die Kurvenform der Ausgangsspannung $\mathbf{u}_A$.

· Impulsformer: **RC-Schaltung** als **Differenzierglied**



$\mathbf{u_E} = \mathbf{2}\ V_{SS}$ $\mathbf{R} = \mathbf{4{,}7}\ k\Omega$ $\mathbf{C} = \mathbf{2}\ nF$

a) Spannungszeitdiagramme bei relativ **niedriger Frequenz** (f = 10 kHz)

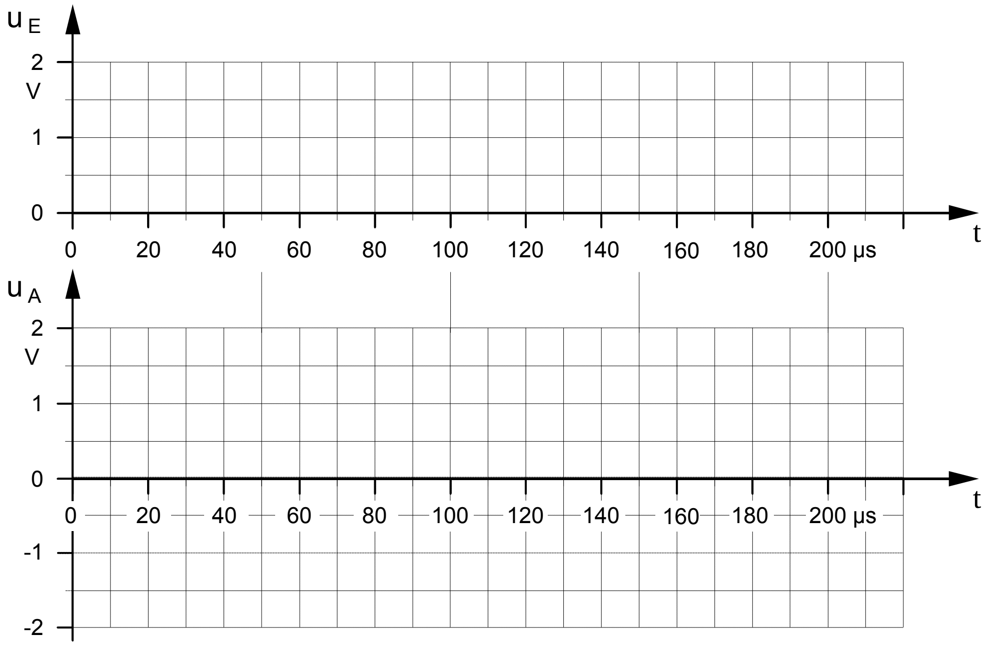
f = **10** kHz

T = ______________

T/2 = ______________

t = ______________

5t = ______________



b) Spannungszeitdiagramme bei relativ **hoher Frequenz** (f = 100 kHz)

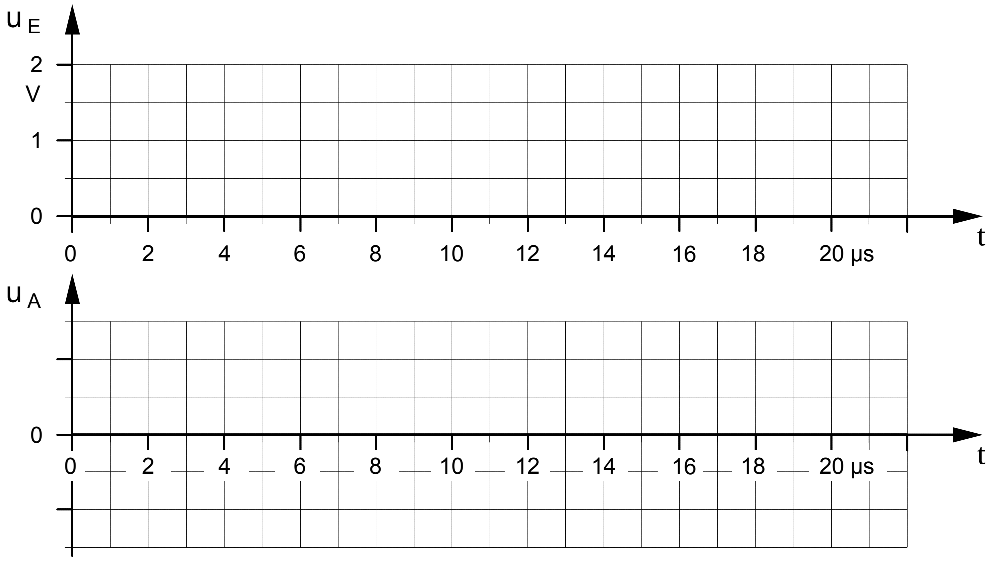
f = **100** kHz

T = ______________

T/2 = ______________

t = ______________

5t = ______________



1. Ermitteln Sie mit Hilfe des Oszilloskops die Zeitdiagramme der Eingangs- und Ausgangsspannung des Differenziergliedes für die oben angegebenen Frequenzen.
2. Untersuchen, beschreiben und begründen Sie den Einfluß der Frequenz **f**, der Kapazität **C** und des Widerstandes **R** auf die Kurvenform der Ausgangsspannung $\mathbf{u_A}$.

Lehrgang : **ELEKTRISCHE MESSTECHNIK**	Name:	MESS-6L1.DOC - 19.02.07
Arbeitsblatt Nr. **6** (Laborübung 1) : **Erste Messungen mit dem Oszilloskop**		Seite **1**

1. Beobachtung der Zeitablenkung des Oszilloskops

Lehrerexemplar mit Ergebnissen

a) Stellen Sie das Oszilloskop so ein, daß der Leuchtfleck im Ursprung des Bildschirmrasters erscheint.

Beachten Sie, daß die Leuchtschicht der Oszilloskopröhre zerstört wird, wenn der Elektronenstrahl nicht ständig abgelenkt wird! Stellen Sie deshalb im X-Y-Betrieb höchstens eine mittlere Helligkeit ein!

b) Schalten Sie die **Zeitablenkung** ein.

- Stellen Sie den Zeitkoeffizienten mit Hilfe des Drehschalters **TIME/DIV.** auf **200 ms** und beobachten Sie den Leuchtfleck.
- Welche **Zeit t** benötigt der Leuchtfleck für das einmalige Durchlaufen der **X**-Achse?

c) Was läßt sich beobachten, wenn der Zeitkoeffizient z.B. **auf 20 µs verringert wird**? Begründen Sie Ihre Beobachtung.

2. Messung einer Gleichspannung

Die **Ausgangsspannung U_a** des folgenden Spannungsteilers ist nach drei Verfahren zu bestimmen.

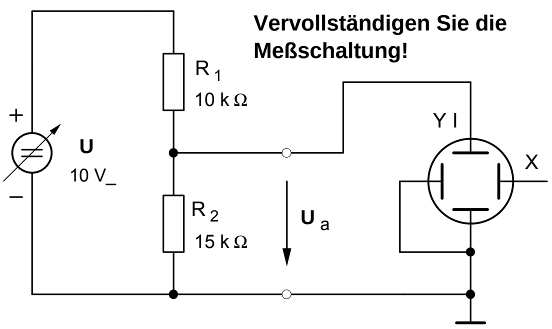
a) Sämtliche Einstellungen und Messungen sind zunächst mit Hilfe des **Oszilloskops** vorzunehmen.

b) Wiederholen Sie anschließend die Einstellungen und Messungen mit einem **Vielfachmeßgerät**.

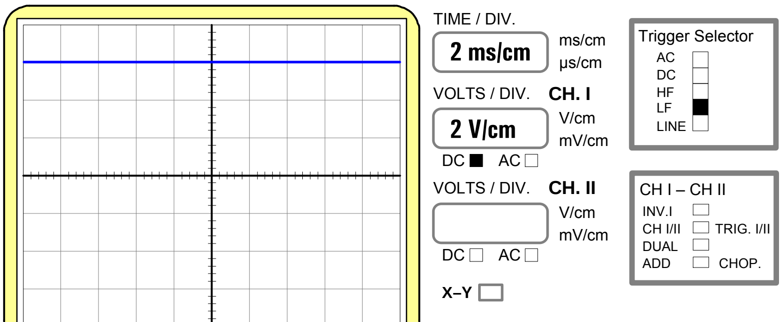
c) Schließlich soll der Wert von **U_a** durch eine entsprechende **Rechnung** theoretisch bestimmt werden.

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse. Abweichungen sind gegebenenfalls zu begründen.

▶ **Meßschaltung**



▶ **Oszilloskop– Messprotokoll**



Oszillogramm: **M 1:2**

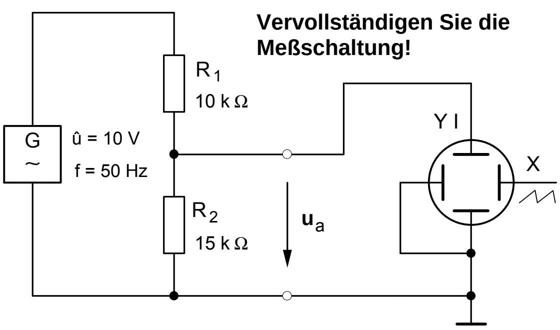
3. Messung einer Wechselspannung

Der Spannungteiler soll jetzt mit einer **sinusförmigen Wechselspannung** (û = 10V / f = 50 Hz) betrieben werden. Als Wechselspannungsquelle soll der Funktionsgenerator dienen. Auch hier sind sämtliche Einstellungen und Messungen zunächst mit Hilfe des **Oszilloskops** vorzunehmen.

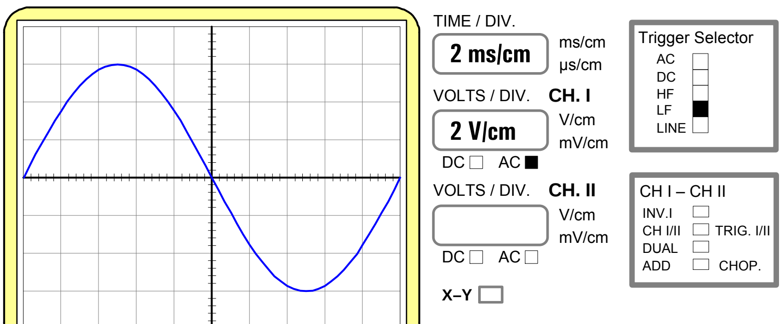
a) Messen Sie den **Scheitelwert $\hat{u}_a$** der **Ausgangsspannung** des Spannungsteilers mit dem **Oszilloskop**.

b) Messen Sie anschließend die **Ausgangsspannung** mit Hilfe eines **Vielfachmeßgeräts**. Begründen Sie die unterschiedlichen Meßergebnisse.

▶ **Meßschaltung**



▶ **Oszilloskop– Messprotokoll**



Oszillogramm: **M 1:2**

Beachten Sie bitte: Sämtliche Meßschaltungen müssen zunächst vervollständigt werden. Bis auf die Oszillo-skop-Messprotokolle sind die Meßergebnisse und Antworten auf einem gesonderten Blatt festzuhalten!

• **Aufnahme** der **Lade- und Entladekurven** eines Kondensators mit dem **Oszilloskop**

Lehrerexemplar mit Ergebnissen

1. Stellen Sie zunächst mit Hilfe des Oszilloskops am Ausgang des Funktionsgenerators die unten dargestellte **Rechteckspannung u_E** ein. Bauen Sie anschließend die folgende **RC-Schaltung** (**R = 10** kΩ ; **C = 2** nF) auf und schließen Sie die Rechteckspannung **u_E** an.

2. Auf dem Bildschirm des Oszilloskops sollen zunächst die **Spannungen u_E** (Kanal YI) und **u_c** (Kanal YII) dargestellt werden. Vervollständigen Sie den **Schaltplan** (**Bild 1**) und bauen Sie anschließend die **Meßschaltung** auf.

3. Die **Augenblickswerte** der Spannung **u_C** sind in Zeitabständen von 20 µs mit Hilfe des Oszilloskops zu messen und in das folgende **Zeitdiagramm** einzutragen. Zeichnen Sie mit Hilfe der eingetragenen Meßwerte den **Spannungs-**verlauf am Kondensator während des Ladens und Entladens.

4. Stellen Sie anschließend die **Spannungen u_E** (Kanal YI) und **u_R** (Kanal YII) auf dem Bildschirm dar. Vervollständigen Sie vorher den Schaltplan im **Bild 2** . Zeichnen Sie auf der Grundlage Ihrer Oszillogramme in das untenstehende Zeitdiagramm den **Strom**verlauf während des Ladens und Entladens.

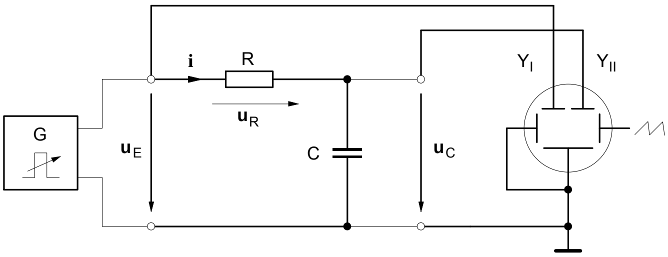


Bild 1: Meßschaltung zur Darstellung der **Kondensatorspannung**

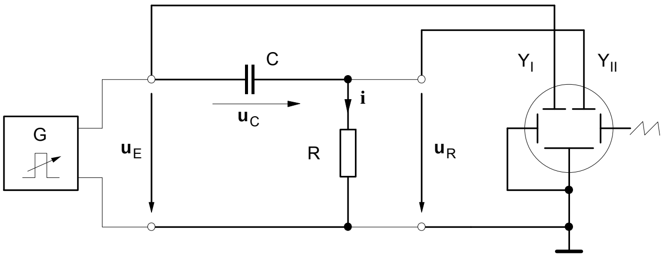


Bild 2: Meßschaltung zur Darstellung des **Kondensatorstromes**

Einstellwerte am Oszilloskop:

• **Y-Ablenkung** (VOLTS/DIV.)

▶ Kanal YI :

1 V / cm

▶ Kanal YII :

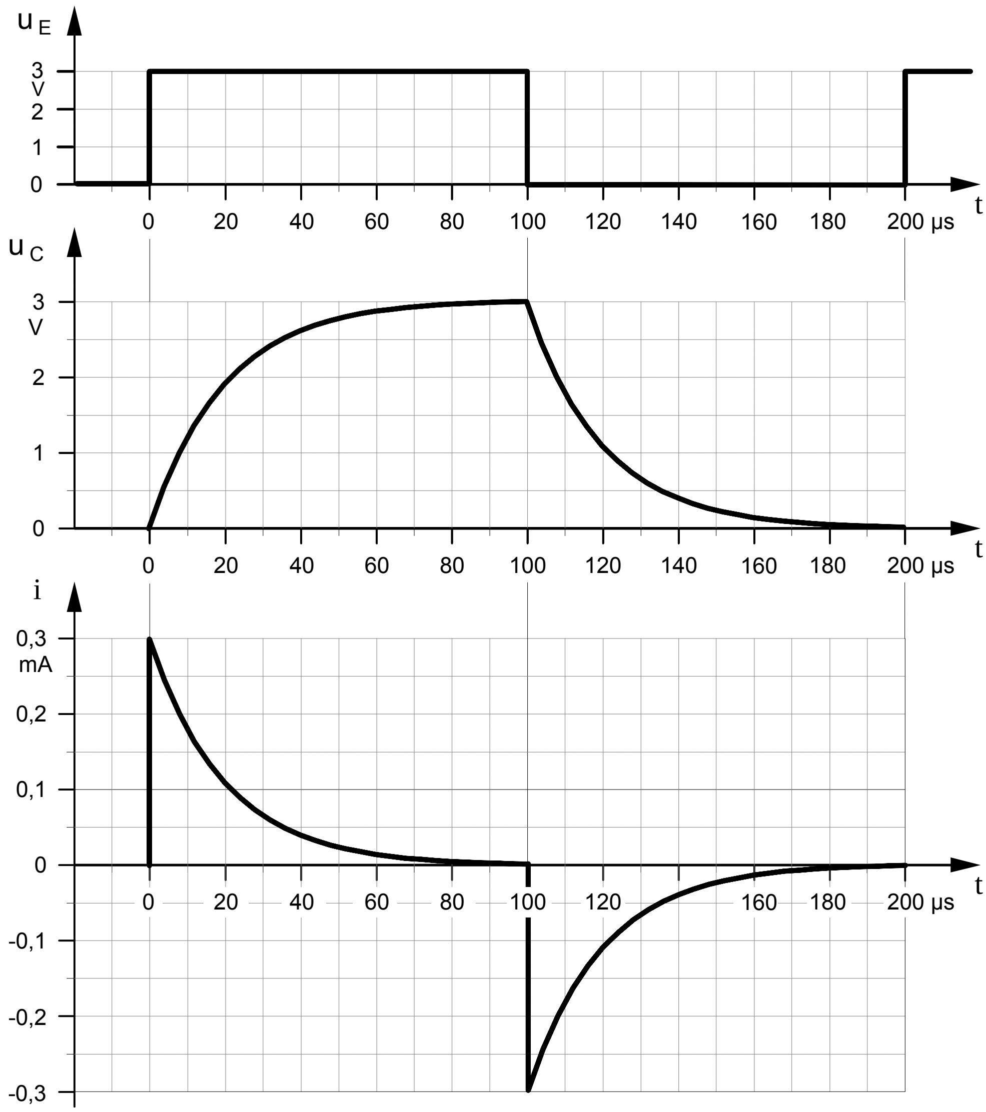
1 V / cm

• **Zeit-Ablenkung** (TIME/DIV.)

20 µs / cm

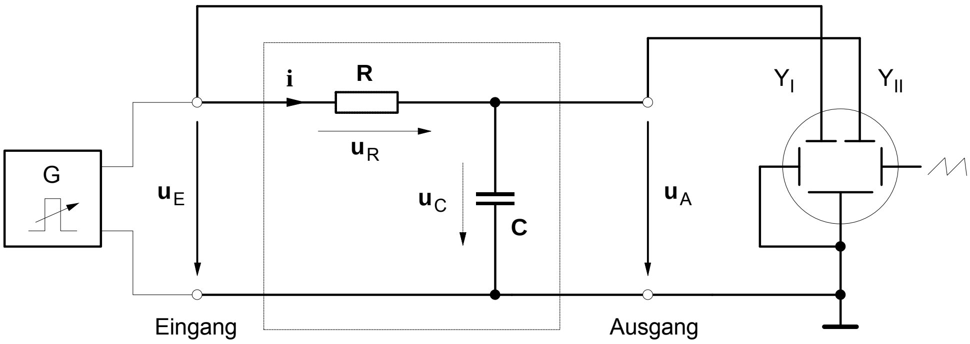
• Für die Augenblickswerte des **Stromes i** gilt in jedem Moment:

$$\boxed{i = \frac{u_R}{R}}$$



· Impulsformer: **RC-Schaltung** als **Integrierglied**

Lehrerexemplar mit Ergebnissen



u_E = **2** V_{SS} **R = 4,7** kΩ **C = 2** nF

a) Spannungszeitdiagramme bei relativ **niedriger Frequenz** (f = 10 kHz)

f = 10 kHz

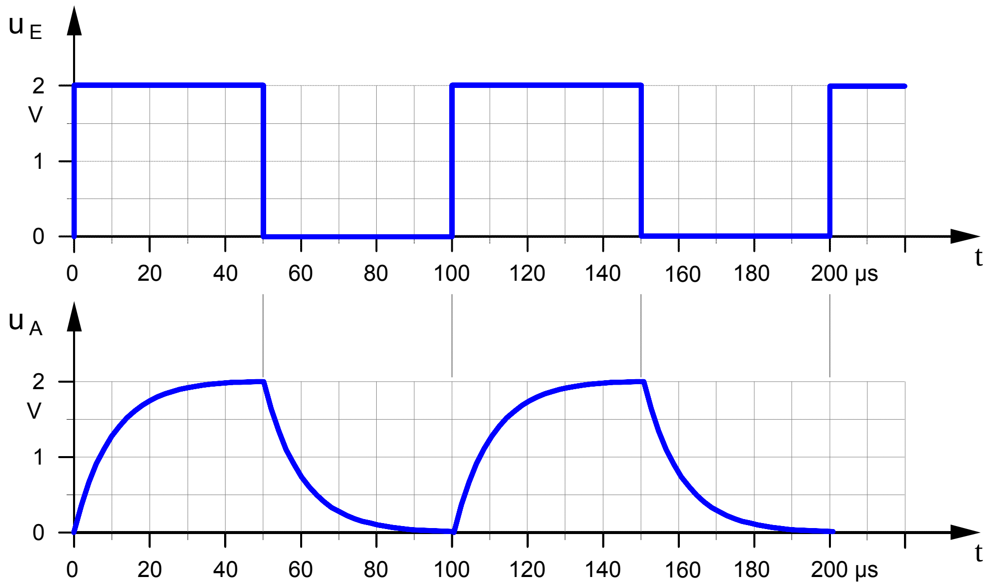
T = 100 µs

T/2 = 50 µs

t = **9,4** µs

5t = **47** µs

$$\boxed{\frac{T}{2} \approx 5 \cdot \tau}$$



b) Spannungszeitdiagramme bei relativ **hoher Frequenz** (f = 100 kHz)

f = 100 kHz

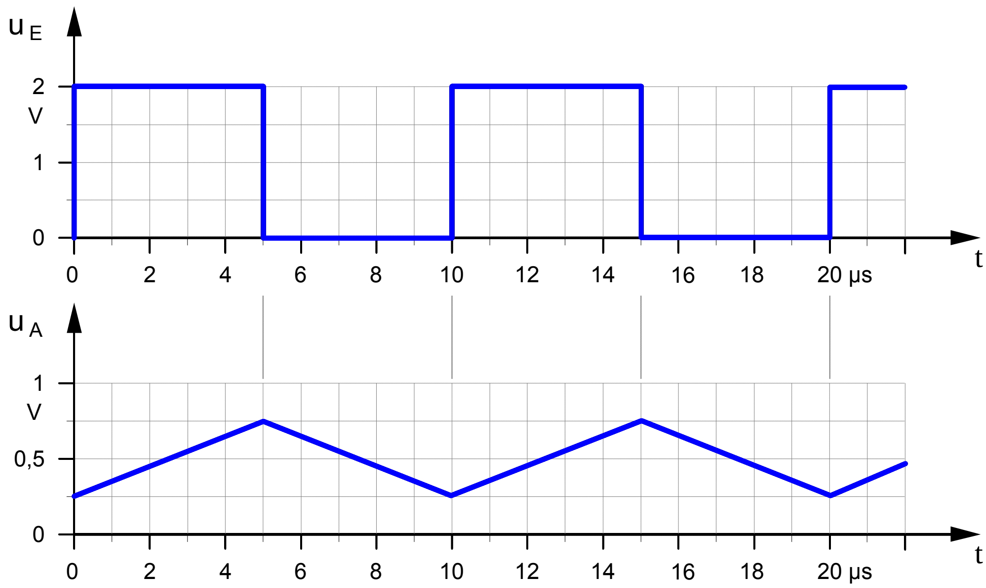
T = 10 µs

T/2 = 5 µs

t = **9,4** µs

5t = **47** µs

$$\boxed{\frac{T}{2} << 5 \cdot \tau}$$

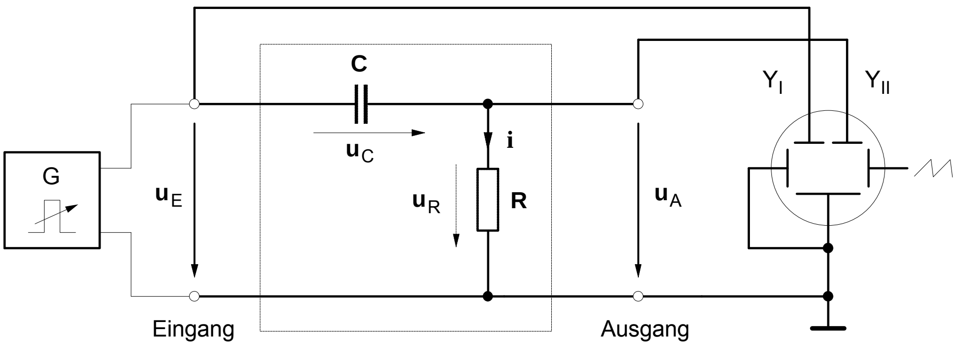


1. Ermitteln Sie mit Hilfe des Oszilloskops die Zeitdiagramme der Eingangs- und Ausgangsspannung des Integriergliedes für die oben angegebenen Frequenzen.

2. Untersuchen, beschreiben und begründen Sie den Einfluß der Frequenz **f**, der Kapazität **C** und des Widerstandes **R** auf die Kurvenform der Ausgangsspannung $\mathbf{u}_A$.

· Impulsformer: **RC-Schaltung** als **Differenzierglied**

Lehrerexemplar mit Ergebnissen



u_E = **2** V_{SS} **R = 4,7** kΩ **C = 2** nF

a) Spannungszeitdiagramme bei relativ **niedriger Frequenz** (f = 10 kHz)

f = 10 kHz

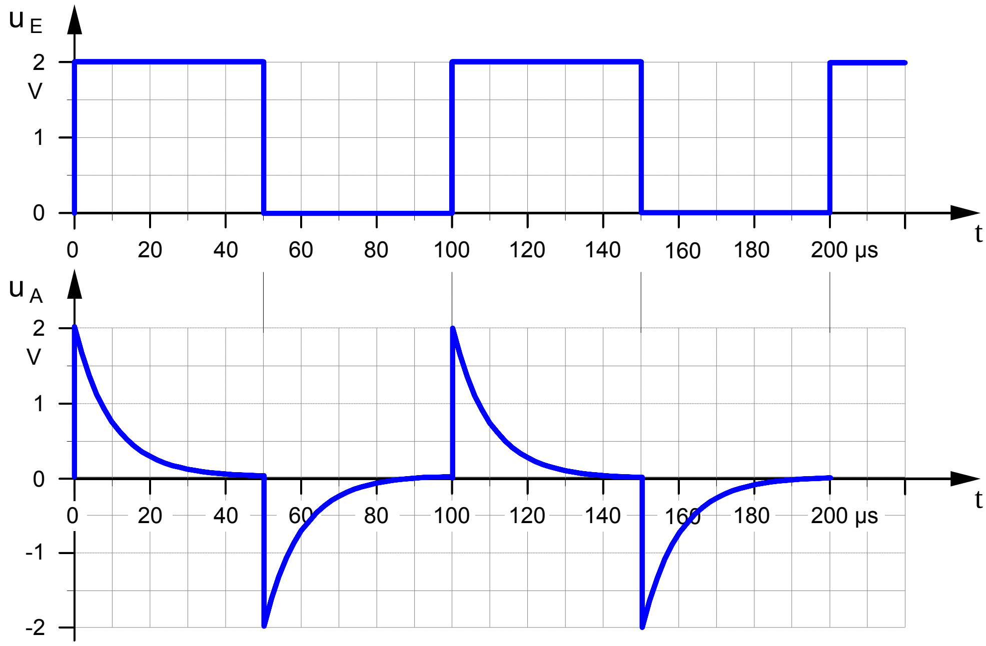
T = 100 µs

T/2 = 50 µs

t = **9,4** µs

5t = **47** µs

$$\boxed{\frac{T}{2} \approx 5 \cdot \tau}$$



b) Spannungszeitdiagramme bei relativ **hoher Frequenz** (f = 100 kHz)

f = 100 kHz

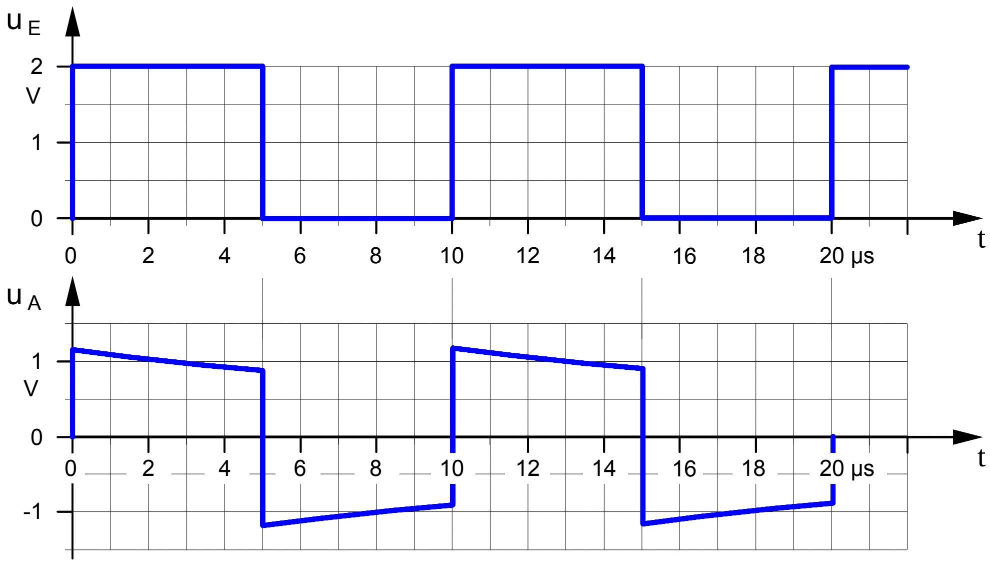
T = 10 µs

T/2 = 5 µs

t = **9,4** µs

5t = **47** µs

$$\boxed{\frac{T}{2} << 5 \cdot \tau}$$



1. Ermitteln Sie mit Hilfe des Oszilloskops die Zeitdiagramme der Eingangs- und Ausgangsspannung des Differenziergliedes für die oben angegebenen Frequenzen.
2. Untersuchen, beschreiben und begründen Sie den Einfluß der Frequenz **f**, der Kapazität **C** und des Widerstandes **R** auf die Kurvenform der Ausgangsspannung u_A.

Lehrgang : **ELEKTRISCHE MESSTECHNIK**	Name: MESS-7-L.DOC - 19.02.07
Arbeitsblatt Nr. **7** : Das **Magnetnadelgalvanometer** – Ein historisches Strom-Meßgerät	

• **Bauanleitung** eines **Magnetnadelgalvanometers** aus dem Jahre 1840

Von zentraler Bedeutung für die erste Entwicklungsphase der elektrischen Meßtechnik (1820 bis 1880) waren Meßgeräte, die auf der von ***H.Chr. Oersted*** im Jahre 1820 entdeckten magnetischen Wirkung des elektrischen Stromes auf eine Kompaßnadel beruhten. Dazu gehörte auch der im Jahre 1837 von dem französischen Physiker ***Cl.S.M. Pouillet*** konstruierte Strommesser. Er nannte ihn **Tangentenbussole** (Bussole = Kompaß), weil man die Stärke des Meßstromes aus dem Tangens des Ablenkwinkels der Kompaßnadel berechnen konnte. Auf der Grundlage der Vorarbeiten von ***Pouillet*** entwickelte drei Jahre später der deutsche Physiker ***Wilhelm Weber*** den folgenden Strommesser.

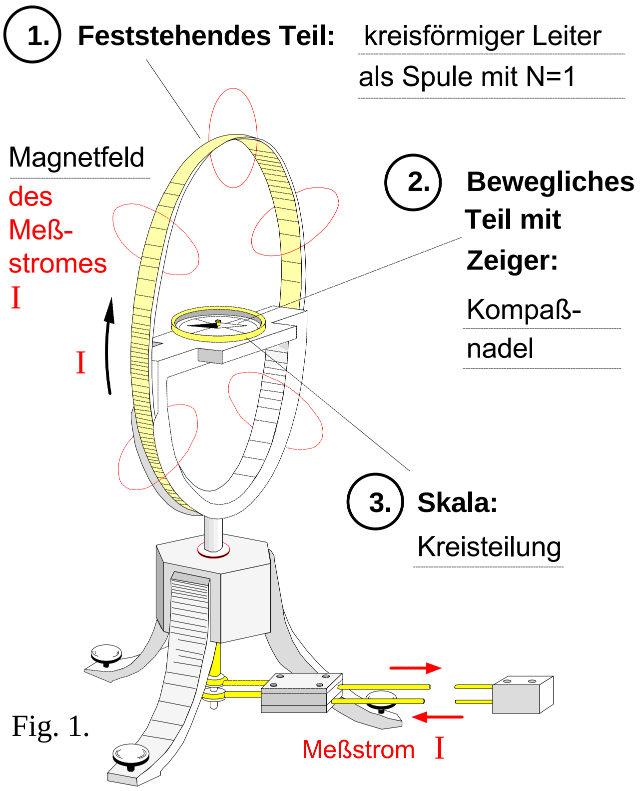


Fig. 1.

Auszug aus der Bauanleitung von Wilhelm Weber:

„Es ist dazu nur nötig, die beiden Teile, welche den Strom zu- und ableiten, recht nahe nebeneinander fortzuführen, wo ihre Wirkungen auf die Nadel sich aufheben. Das erste Stück vom Ringe an wird der Strom am besten durch zwei kupferne Röhren geleitet, deren eine die andere umschließt, jedoch isoliert von ihr gehalten wird, wie Fig. 1 bis 4 darstellt. Der Querschnitt des kreisförmigen Leiters muß so groß sein, daß sein Widerstand unmerklich ist.

Ich habe ein Instrument hiernach einrichten lassen, dessen Kupferring 198 ½ Millimeter Durchmesser hatte und dessen Querschnitt 30 Quadratmillimeter betrug. Dieser Reif war unten aufgeschnitten, und das eine Ende mit der einen Leitungsröhre, das andere Ende mit der anderen Leitungsröhre zusammengelötet. Diese ineinandergesteckten, aber isolierten Röhren führten den Strom 100 Millimeter abwärts zu zwei vier Millimeter dicken, ein Meter langen Leitungsdrähten, welche dicht untereinander zu zwei Quecksilbernäpfchen gingen, die mit den beiden Platten der galvanischen Kette in Verbindung gesetzt werden konnten. Die Magnetnadel stand in der Mitte des Kreises auf einer an dem Kreis befestigten Holzplatte. Der Kreis selbst stand auf einem hölzernen, mit Stellschrauben versehenen Dreifuß. Die Länge der Nadel betrug 50 Millimeter und bewegte sich auf einem in Grade geteilten Kreisbogen.“

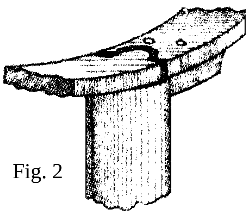


Fig. 2

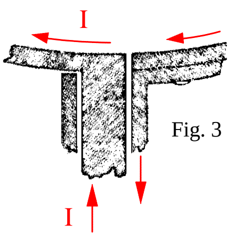


Fig. 3

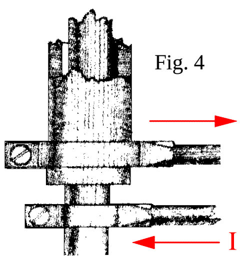


Fig. 4

Quelle: Wilhelm Weber, Messung starker galvanischer Ströme nach absolutem Maße, in: Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840, hrsg. von Carl Friedrich Gauß und Wilhelm Weber, Leipzig 1841, Nachdruck in: Wilhelm Weber / Rudolf Kohlausch, Über die Einführung absoluter elektrischer Maße, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Braunschweig 1968, S.23 f.

• **Wirkungsweise** des **Magnetnadelgalvanometers** von Wilhelm Weber

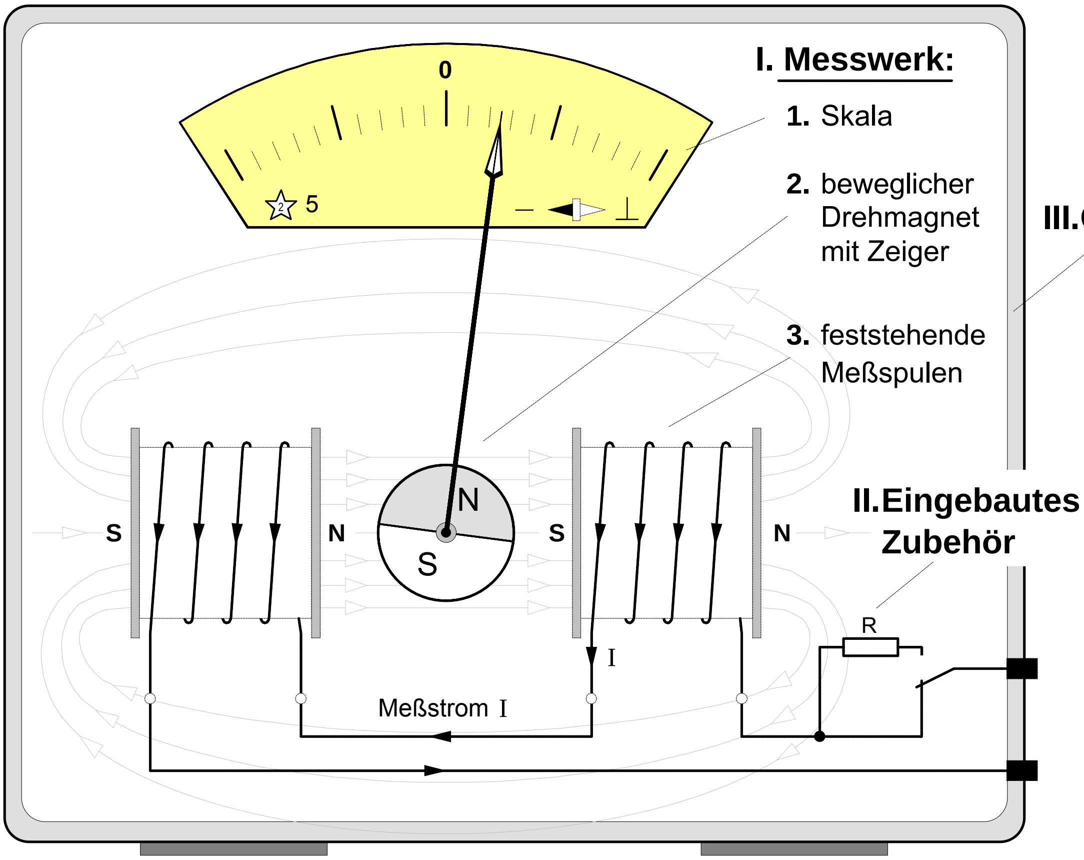
Sobald ein Meßstrom I durch die feststehende **Kreisspule (Windungszahl N = 1)** fließt, wird in deren Umgebung ein **Magnetfeld** erzeugt. Dadurch wird die bewegliche **Magnetnadel** abgelenkt. Die Größe des **Ausschlagwinkels** ist abhängig von der **Strom s t ä r k e I** , die **Ausschlagrichtung** hingegen von der **Strom r i c h t u n g** .

• **Aufgaben**

1. Ergänzen Sie die Abbildung (Fig. 1) und füllen Sie den Lückentext über die **Wirkungsweise** aus.
2. Unter welcher Voraussetzung könnte man mit dem oben beschriebenen Meßgerät einen elektrischen Strom direkt **messen**? Erklären Sie dazu zunächst den Begriff des **Messens**.
3. Welche **Vor-** und **Nachteile** hat das Magnetnadelgalvanometer von Wilhelm Weber?
4. Wäre dieses Instrument auch für **Wechselstrom**messungen geeignet?

Lehrgang : **ELEKTRISCHE MESSTECHNIK**	Name:	MESS-8-L.DOC - 19.02.07
Arbeitsblatt Nr. **8** : **Das Drehmagnetmeßwerk**		Sinnbild :

1. A u f b a u des Drehmagnetmeßwerks



2. Wirkungsweise

Sobald ein Meßstrom I durch die feststehenden Meßspulen fließt, entsteht in deren Umgebung ein **Magnetfeld**. Der beweglich gelagerte Drehmagnet wird in Richtung des **Magnetfeldes** abgelenkt und der Zeiger **schlägt aus**. Der Zeigerausschlag ist abhängig von der **Stärke** und der **Richtung** des Meßstromes. Fließt der Strom in der angegeben en Richtung, dann schlägt der Zeiger nach **rechts** aus. Wechselstrommessungen können mit dem Drehmagnetmeßwerk nicht durchgeführt werden, da ein Wechselstrom laufend seine **Richtung** wechselt und der Zeiger daher ständig **hin- und herpendeln** würde.

3. Eigenschaften

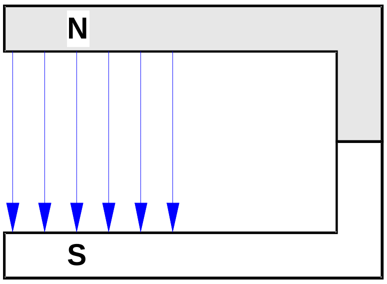
Vorteile	Nachteile
robust	hoher Eigenverbrauch 1... 10 W
billig	geringe Empfindlichkeit
keine bewegliche Spule	geringe Genauigkeit ± 5% ... ±10%
keine bewegliche Stromzuführung	fremdfeldempfindlich
hoch überlastbar	nur für Gleichstrom
keine Rückstellfeder	niedrigste Bereiche 0,5 mA bzw. 40 mV
direkte Bereiche bis 60 A	ungleichmäßiger Skalenverlauf

4. Anwendung

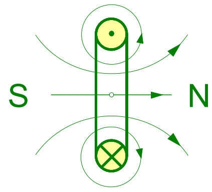
Drehmagnetmeßwerke werden hauptsächlich eingebaut in Ladekontrollgeräte, die der Überwachung der Ladevorgänge von Batterien in Fahrzeugen und Flugzeugen dienen.

Lehrgang: **ELEKTRISCHE MESSTECHNIK**	Name:	MESS-9F1.DOC - 19.02.07
Arbeitsblatt Nr. **9** :	Stromdurchflossene **Drehspule im Magnetfeld**	Seite **1**

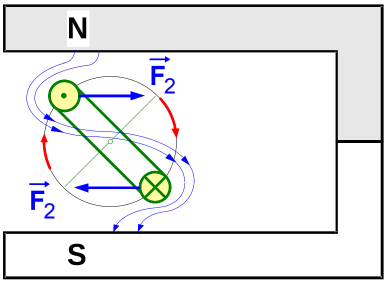
1. Stromdurchflossene **Drehspule** im **Magnetfeld** eines Dauermagneten



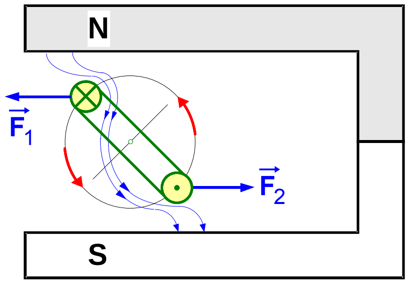
1. Magnetfeld der Pole des Dauermagneten (Polfeld)



2. Magnetfeld der stromdurchflossenen Drehspule (Spulenfeld)

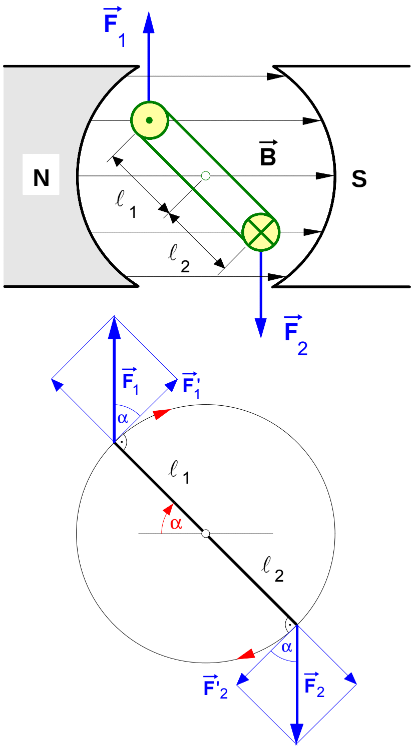


3. Gesamtfeld aus Polfeld und Spulenfeld
⇨ **Drehbewegung nach rechts**



4. Gesamtfeld bei umgekehrter Stromrichtung ⇨ **Drehbewegung nach links**

2. **Kräfte** und **Drehmomente** auf eine stromdurchflossene Drehspule im Magnetfeld



Kräfte und Hebelarme an der Drehspule

a) Magnetische Kräfte auf die Drehspule (senkrecht zum Polfeld)

$$\boxed{F_1 = F_2 = F = B \cdot \ell_w \cdot I \cdot N}$$

b) In Drehrichtung wirkende Kraftkomponenten (senkrecht zur Drehspule) :

$$\boxed{F_1' = F_2' = F \cdot \cos\alpha}$$

c) Drehmomente auf die Drehspule :

$$\boxed{\begin{aligned} M_1 &= F_1' \cdot \ell_1 \\ M_2 &= F_2' \cdot \ell_2 \end{aligned}}$$

d) Gesamtdrehmoment :

$$\boxed{M_{gesamt} = M_1 + M_2}$$

- Aufgabenbeispiel:

Eine Drehspule befindet sich in einem Magnetfeld mit der Feldstärke **B = 0,3 T**.

In der Spule fließt ein Strom von **5 A**. Ihre wirksame Länge im Magnetfeld beträgt **4 cm**, ihre Windungszahl ist **N = 10** und ihr Durchmesser **d** = $\ell_1 + \ell_2$ = **6 cm**.

Welches Drehmoment wirkt auf die Drehspule bei einem Drehwinkel von **55° ?** [M = 0,0206 Nm]

B magnetische Feldstärke des Polfeldes in **T**

ℓ_w wirksame Länge der Drehspule in **m**

N Windungszahl der Drehspule

I Strom in der Drehspule in **A**

F_1,F_2 magnet. Kräfte in **N** (senkrecht zum Polfeld)

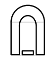
F_1',F_2' Kraftkomponenten der magnet. Kräfte, die zur Drehbewegung beitragen (senkrecht auf den Hebelarmen ℓ_1 und ℓ_2) in **N**

α Drehwinkel

M_1, M_2 Drehmomente in **Nm**

ℓ_1, ℓ_2 Hebelarmlängen in **m**

1. A u f b a u des **Drehspulmeßwerks**

Sinnbild : 

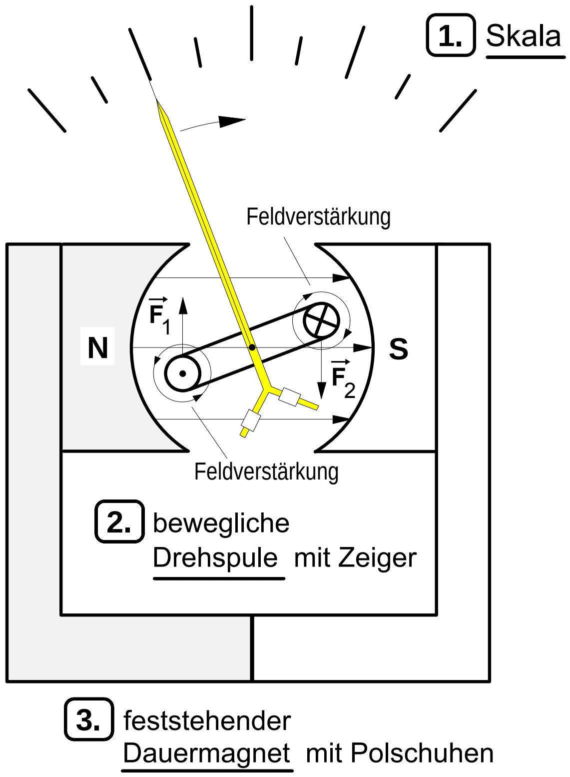


Bild 1 : **Modell** eines **Drehspulmeßwerks**

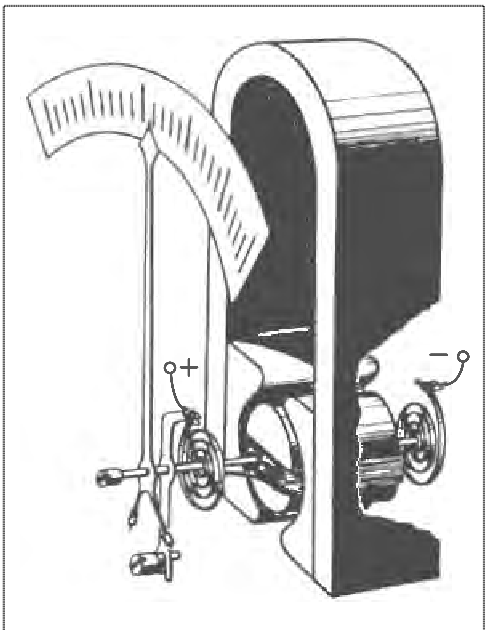


Bild 2 : **Drehspulmeßwerk**

2. W i r k u n g s w e i s e des **Drehspulmeßwerks**

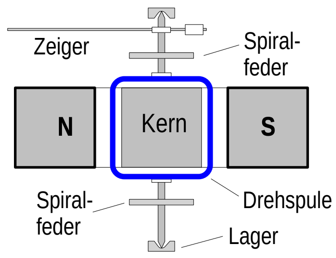
Die **Drehspule** ist beweglich in dem **Magnetfeld** des Dauermagneten ("Polfeld") gelagert. Sie wird bei den meisten Drehspulinstrumenten durch zwei Spiralfedern elastisch in ihrer Ruhelage gehalten (siehe Bild 2). Über die Federn wird der Drehspule zugleich auch der **Meßstrom** I zugeführt.

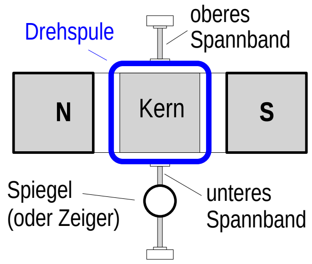
Sobald ein **Meßstrom** I durch die **Drehspule** fließt, entsteht in deren Umgebung ein weiteres Magnetfeld ("Drehspulenfeld"). Polfeld und Drehspulenfeld überlagern sich und bilden ein resultierendes **Gesamtfeld**. Die dadurch auf die Drehspule ausgeübten **magnetischen Kräfte** $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ erzeugen ein **Drehmoment** , das die Drehspule und den daran befestigten Zeiger solange dreht, bis sich das magnetische Drehmoment und das mechanische Gegendrehmoment der verformten Spiralfedern im **Gleichgewicht** befinden.

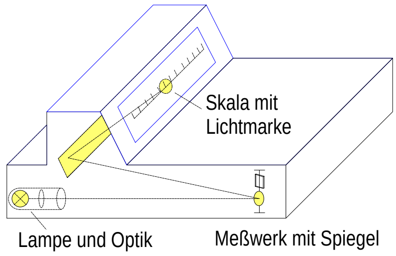
Der **Zeigerausschlag** (Drehwinkel und Drehrichtung) ist abhängig von der **Stärke** und der **Richtung** des Meßstromes. Bei der in Bild 1 angegebenen Stromrichtung in der Drehspule schlägt der Zeiger nach **rechts** aus. Würde man die Stromrichtung in der Drehspule umkehren, schlüge der Zeiger nach **links** aus. Deshalb können mit dem Drehspulmeßwerk auch keine Wechselstrommessungen durchgeführt werden, weil ein Wechselstrom ständig seine **Stärke** und seine **Richtung** ändert und die Drehspule periodisch hin und her pendeln würde. Bei höheren Frequenzen (z.B. bei 50 Hz) könnte die Drehspule diesen raschen Wechsel aufgrund ihrer **Trägheit** nicht mitvollziehen, der Zeiger bliebe **stehen** .

Fließt durch Drehspule ein **pulsierender** Gleichstrom, so zeigt das Drehspulmeßwerk den **arithmetischen Mittelwert** dieses Stromes an.

1. Lagerung von Drehspulen







a) Spitzenlagerung

Das Gegendrehmoment zur Zeigerrückstellung wird durch das Spannen der **Spiralfedern** erzeugt.
Nachteil: Reibungsfehler

b) Spannbandlagerung

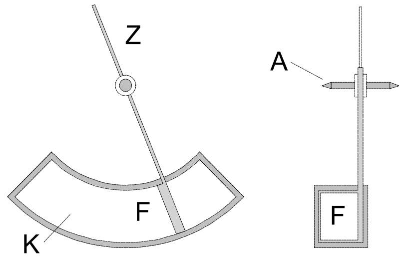
Das Gegendrehmoment wird durch die Verdrehung ("Torsion") des **Spannbandes** erzeugt.

Vorteil: keine Lagerreibung

c) Strahlengang in einem Drehspul-**Spiegelmeßwerk** mit Spannbandlagerung

2. Dämpfungsarten

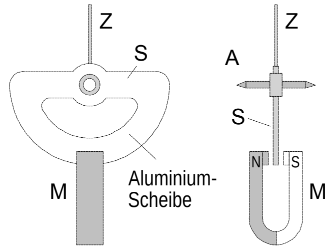
Bis auf die Spulendämpfung werden die folgenden Verfahren zur Dämpfung der Zeigerschwingungen auch bei anderen Meßwerken angewendet.



A Systemachse
K Dämpferkammer
F Dämpferflügel
Z Zeiger

a) Luftkammerdämpfung

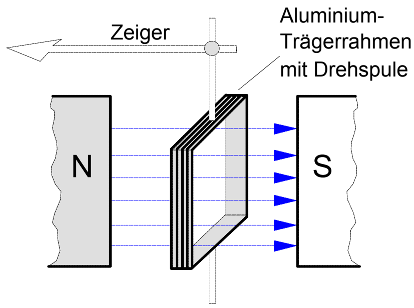
Die Zeigerschwingung wird durch den **Luftwiderstand** gedämpft.



A Systemachse
S Dämpferscheibe
M Magnet
Z Zeiger

b) Wirbelstromdämpfung

Die Aluminium-Dämpferscheibe wird durch Wirbelströme bei Drehbewegung im Feld des Dauermagneten abgebremst.



c) Spulendämpfung

Der Aluminium-Trägerrahmen der Drehspule dient als kurzgeschlossene Induktionsspule, die bei einer Drehbewegung im Feld des Dauermagneten abgebremst wird (Lenzsches Gesetz).

3. Eigenschaften und Anwendung des Drehspulmeßwerks

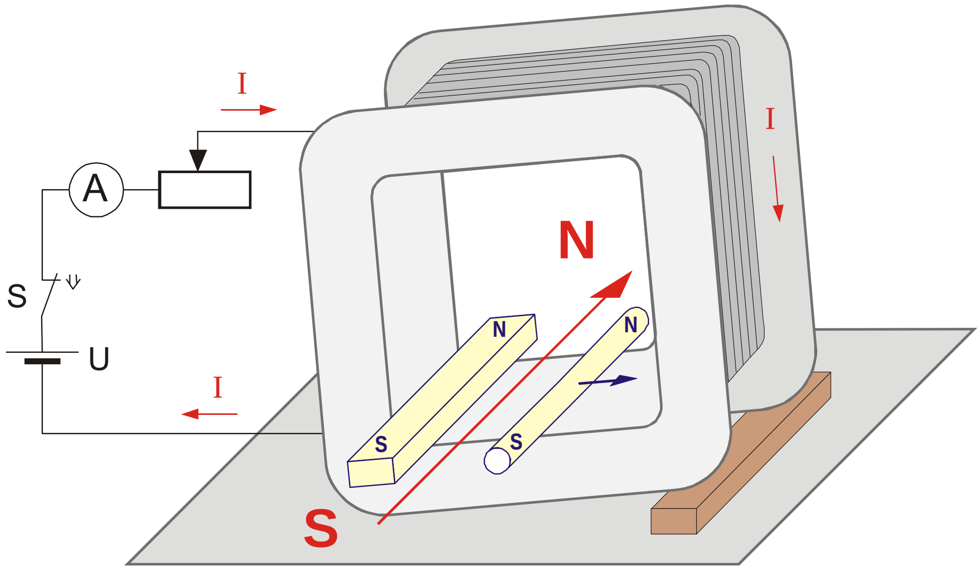
Vorteile	Nachteile
geringer Eigenverbrauch (1µW...1mW)	bewegliche Spule
hohe Empfindlichkeit (1 mm/µA)	bewegliche Stromzuführung
niedrigster Bereich ab 10 µA	Überlastempfindlich
Fremdfeldunempfindlich	Erschütterungsempfindlich
hohe Genauigkeit bis ± 0,1 %	teuer
gleichmäßige Skala	nur für Gleichstrom
Bereiche leicht zu erweitern	größter direkter Bereich 100mA

Das Drehspulmeßwerk ist das am meisten verwendete elektromagnetische Meßwerk.

Es wird in Betriebs- und Feinmeßgeräte sowie in Vielfachmeßgeräte für Strom- und Spannungsmessungen eingebaut.

Vorversuch zum Dreheisenmesswerk: **Zwei Eisenkörper im Magnetfeld einer Spule**

1. Versuchsaufbau



2. Beobachtungen während des Versuchs

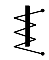
- Im Inneren der schräggestellten Spule liegen zwei unmagnetische Eisenkörper.
- Fließt nach Betätigung des Schalters S1 ein Strom I von ausreichender Stärke durch die Spule, so wird der runde Eisenstab abgestoßen und rollt in dem Spulenhohlraum nach rechts.
- Wird der Strom wieder abgeschaltet, so rollt der Eisenstab wieder zurück.
- Bei umgekehrter Stromrichtung, wird der runde Eisenstab ebenfalls abgestoßen.

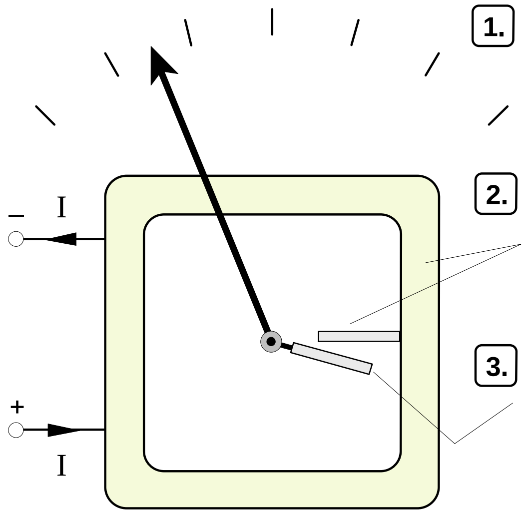
3. Erklärung der Beobachtungen

- Sobald ein Strom I durch die Spule fließt, wird in deren Umgebung ein Magnetfeld erzeugt.
- Bei der oben angegebenen Stromrichtung entsteht dabei an der vorderen Spulenöffnung der Südpol und an der hinteren Spulenöffnung der Nordpol der Spule.
- Durch das Magnetfeld der Spule werden beide Eisenkörper magnetisiert , wobei die Nordpole und die Südpole jeweils am gegenüberliegenden Stabende auftreten und deshalb einander abstoßen.
- Daher wird der runde Eisenkörper auch bei umgekehrter Stromrichtung und bei Wechselstrom abgestoßen.
- Die Stärke der abstoßenden Kraft ist abhängig von der Stärke des Magnetfeldes und diese wiederum von der Stärke des Stromes I in der Spule.

Lehrgang : **ELEKTRISCHE MESSTECHNIK**	Name:	MES-10F2.DOC - 19.02.07
Arbeitsblatt Nr. **10** :	**Das Dreheisenmeßwerk**	Seite **2**

1. **A u f b a u** des **Dreheisenmeßwerks**

Sinnbild : 



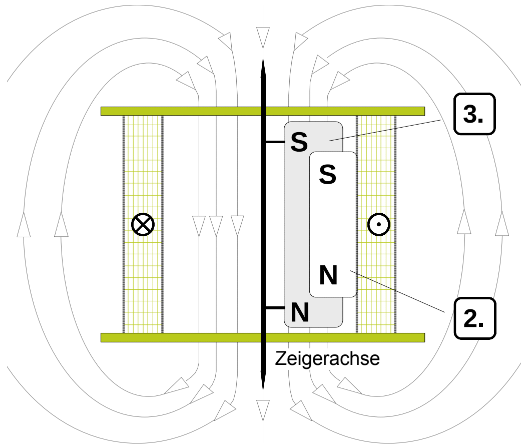
1. Skala

2. Spule mit **feststehendem** Eisenblech

3. drehbares Eisenblech mit Zeiger

Bild **1** : Aufbauprinzip (schematisch)

Bild **2** : Draufsicht im Schnitt



2. **Wirkungsweise**

Sobald ein **Meßstrom** I fließt, entsteht in der feststehenden **Spule** ein **Magnetfeld** . Dadurch werden die beiden weichmagnetischen **Eisenbleche** **gleichsinnig magnetisiert** . An den gegenüberliegenden Enden entstehen jeweils **gleiche** magnetische Pole. Dadurch wird das drehbar gelagerte Eisenblech **abgestoßen** und der Zeiger **schlägt aus** . Die Anzeige auf der Skala ist abhängig von der **Stärke des Meßstromes** . Bei umgekehrter Stromrichtung oder bei Wechselstrom wird das drehbare Eisenblech **ebenfalls abgestoßen und der Zeiger schlägt aus.** .

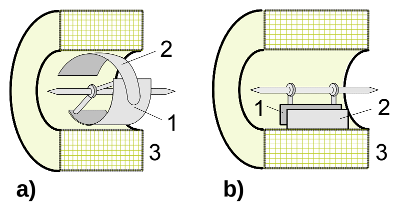


Bild **3** :

Rundspul-Dreheisenmeßwerke

a) für **lineare** Skalenteilung

b) für **quadratische** Skalenteilung

1 drehbares Eisenblech
2 feststehendes Eisenblech
3 Spule

3. **Eigenschaften**

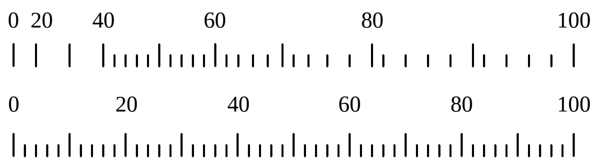
Vorteile	Nachteile
robust	hoher Eigenverbrauch
billig	geringe Empfindlichkeit
keine bewegliche Spule	Niedrigste Bereiche ca. 30 mA und 6 V
keine bewegliche Stromzuführung	Fremdfeldempfindlich
hoch überlastbar	Hysteresefehler bei Gleichstrom
für Gleich- und Wechselstrom	Keine Nebenwiderstände möglich
Direkte Bereiche bis 100 A	ungleichmäßiger Skalenverlauf
Anpassungsfähiger Skalenverlauf	

4. **Anwendung** des Dreheisenmeßwerks

Dreheisenmeßwerke sind die einfachsten und billigsten Meßwerke für Strom- und Spannungsmesser. Sie werden hauptsächlich in Betriebs- und Schalttafelinstrumente eingebaut.

Dreheisenmeßwerke sind sowohl für **Gleichstrom-** strommessungen als auch für **Wechselstrom-** strommessungen geeignet. Bei Wechselstrommessungen wird der **Effektivwert** angezeigt.

Grundsätzlich ist der **Skalen**verlauf quadratisch, jedoch kann durch entsprechende Formgebung der Eisenbleche eine gleichmäßige Teilung der Skala erzielt werden (siehe dazu Bild **3**).



Quadratische Skalenteilung

Lineare Skalenteilung

Lehrgang : **ELEKTRISCHE MESSTECHNIK**	Name:	MESS-1~2.DOC - 05.05.09
Arbeitsblatt Nr. **11** : **Das elektrodynamische Messwerk als Leistungsmesser**		

1. **A u f b a u** des **elektrodynamischen Messwerks** (eisengeschlossen)

Sinnbilder:
eisengeschlossen
eisenlos

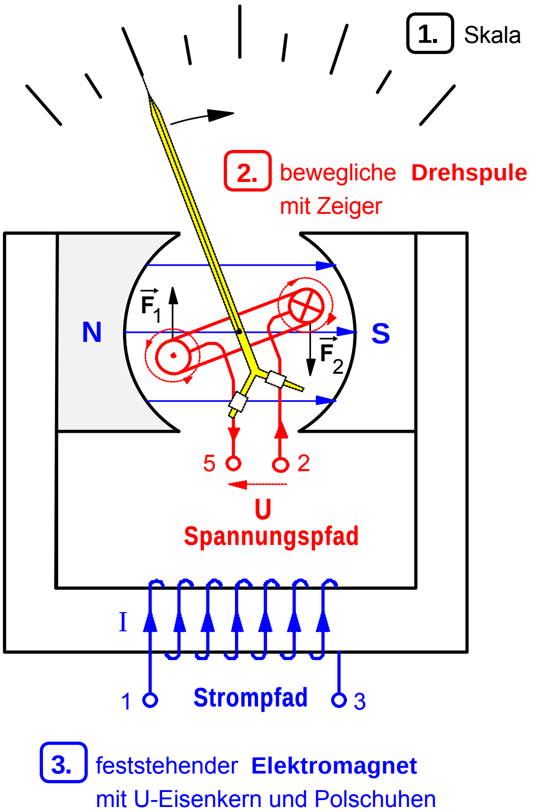


Bild 1 : **Modell** eines **elektrodynamischen Messwerks**

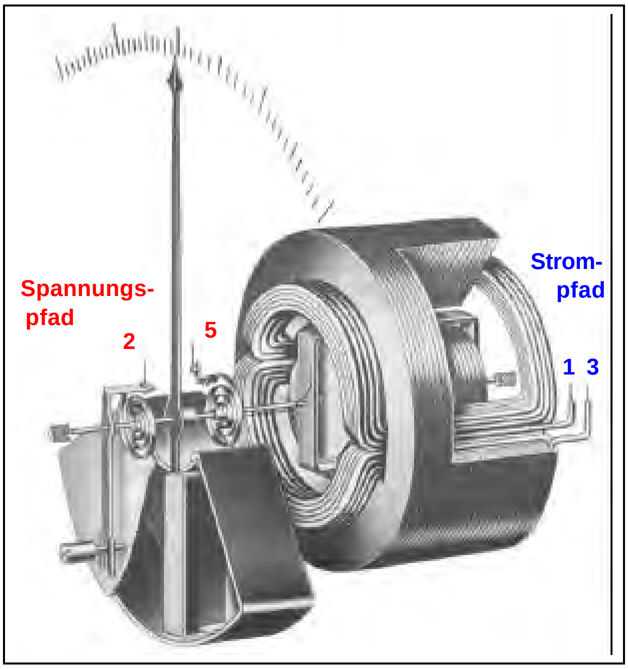


Bild 2: **Elektrodynamisches Messwerk**
(eisengeschlossene Bauform)

2. **Wirkungsweise** des elektrodynamischen Messwerks

Wird das elektrodynamische Messwerk als Leistungsmesser verwendet, dient der **feststehende Elektromagnet** aus Spule und U-Eisenkern als **Strompfad**. Sobald ein Messstrom I durch die Strompfadspule fließt, entsteht ein Magnetfeld im Eisenkern und in dem Luftraum zwischen den Polschuhen. In diesem Magnetfeld ist die **Drehspule** beweglich gelagert. Die Drehspule dient hier als **Spannungspfad** des Leistungsmessers. Sie wird durch zwei Spiralfedern elastisch in ihrer Ruhelage gehalten (siehe Bild 2). Über die Federn wird der Drehspule zugleich auch die Messspannung U zugeführt. Sobald ein Spannung an die **Drehspule** angeschlossen wird, fließt in ihr ein Strom, der seinerseits in der Umgebung der Drehspule ein zweites Magnetfeld erzeugt. Beide Magnetfelder überlagern sich und bilden ein resultierendes **Gesamtfeld**. Die dadurch auf die Drehspule ausgeübten **magnetischen Kräfte** $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ erzeugen ein Drehmoment, das die Drehspule und den daran befestigten Zeiger solange dreht, bis sich das magnetische Drehmoment und das mechanische Gegendrehmoment der verformten Spiralfedern im **Gleichgewicht** befinden. Der **Zeigerausschlag** (Drehwinkel und Drehrichtung) ist abhängig von Betrag und Richtung sowohl des Stromes I in dem Strompfad als auch von dem durch die Spannung **U** bewirkten Strom im Spannungspfad und damit zugleich auch von dem Produkt aus **U** und I, d.h. also von der elektrischen Leistung **P**. Bei den in Bild 1 angegebenen Stromrichtungen schlägt der Zeiger nach **rechts** aus. Würde man beide Stromrichtungen umkehren, schlüge der Zeiger weiterhin nach rechts aus. Deshalb kann das elektrodynamische Messwerk auch mit Wechselstrom betrieben werden.

3. **Messschaltung zur direkten Leistungsmessung** mit dem elektrodynamischen Messwerks