GRAVITATION

Das Gravitationsgesetz von Isaac Newton

Versuch einer systematischen Rekonstruktion

Jochen Sicars

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Isaac Newton (1686)

Das Gravitationsgesetz ist »die bedeutendste Verallgemeinerung, die dem menschlichen Geist je geglückt ist. ... Die Gravitation ist einfach und darum schön.«

Richard P. Feynman (1965)

»Was Einer im Reiche der Wahrheit erwirbt, hat er Allen erworben.«

Friedrich Schiller (1789)

GRAVITATION • CAVENDISH-EXPERIMENT
Unterrichtsmaterial
designed by sic Ars didactica

www.sicars-didactica.de • © jochensicars@gmail.com der • Trautheim bei Darmstadt 2020

Inhaltsverzeichnis

„Die Philosophie ist in dem großen Buch niederschrieben, das immer offen vor unseren Augen liegt, dem Universum. Aber wir können es erst lesen, wenn wir die Sprache erlernt und uns die Zeichen vertraut gemacht haben, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, deren Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren; ohne diese Mittel ist es dem Menschen unmöglich, auch nur ein einziges Wort zu verstehen; ohne diese ist es ein unnützes sich im Kreise drehen in einem dunklen Labyrinth.“

Galileo Galilei (1623)

Galilei, G.: IL Saggiatore, Florenz 1933, S. 232 (Übersetzung: Porz 1994, S. 88)

Vorwort

Um zu »erkennen, was die Welt im Innersten zusammenhält« (Goethe), gehört zunächst einmal die Anschauung, derzufolge nicht nur Himmelskörper wie Erde und Mond sich gegenseitig anziehen, sondern auch jene, die wir aus unserer alltäglichen Erfahrung als irdische Körper kennen, die wir tagtäglich benutzen, bearbeiten oder wie auch immer verwenden. Zur Förderung dieser Anschauung soll unser, über das Internet live nachvollzieh- und browsersteuerbare Cavendish-Experiment beitragen. Es ist in der Sprache der Naturwissenschaft und Technik geschrieben: in Form von Webcam-Live-Bildern, Zeichnungen, Graphiken, Versuchsdaten, Diagrammen, usw. Die andere Seite der Erkenntnis-Medaille ist das Denken, das uns kritische Reflexionen ermöglicht und die Theorien und Gesetze über die wahrnehmbaren Gegenstände formulieren lässt. Sie sind unserem Geist entsprungen – Geisteswissenschaften wie Linguistik und Mathematik liefern dazu die Instrumente. Das Gravitationsgesetz ist in der »Sprache der Mathematik« (Galilei) geschrieben. Sie ermöglicht uns, selbst komplexe Sachverhalte in symbolischer Form kurz und knapp und mit großer Präzision darzustellen. Damit trägt sie auch zum Verstehen der beschriebenen Zusammenhänge bei. So haben ich versucht, auch das Newtonsche Gravitationsgesetz aus heutiger Sicht in der Sprache der Mathematik aus seinen historischen und logischen Entstehungszusamenhängen heraus möglichst präzise zu rekonstruieren. Ob ich dabei den gedanklichen Konstruktionen *Newtons* hinreichend genau gerecht geworden sind, sei dahingestellt. Ich war mir bewusst, dass wir damit auch eine Reihe offener Fragen hinterlassen. Widerspruch, Korrekturen und sonstige sachdienliche Beiträge sind ausdrücklich erwünscht. Einige selbstkritische Hinweise finden Sie in unseren »Kritischen Anmerkungen zur Herleitung des Gravitationsgesetzes« im Kapitel 2.1.

Erstellt wurde diese Ausarbeitung im Zusammenhang meiner Mitarbeit in dem Projekt »Webgesteuerte Gravitationsdrehwaage« der Heinrich-Emanuel-Merck-Schule in Darmstadt. Dazu mehr auf der Webseite www.gravitation.hems.de.

Jochen Sicars 3. April 2020

1. Herleitung des Gravitationsgesetzes

1.1 Newtons Problemreduktion

»Die Schwere kommt allen Körpern zu, und ist der in jedem enthaltene Menge der Materie proportional.«, so beschreibt *Isaac Newton* (1643-1727) in seinen Principia die universelle Anziehung aller Massen.[1] Ein kurzer Blick auf den klaren Nachthimmel (Bild 2) macht deutlich: Selbst wenn nur die Körper, die man dort sieht, sich alle gegenseitig anziehen (Bild 1), wie soll dann bei dieser schier unendlich erscheinenden Zahl von Massen die Größe jener resultierenden Kraft bestimmt werden, mit der ein einzelner Körper von allen anderen Massen des Universums angezogen wird? Dies »übersteigt, wenn ich nicht irre, die Möglichkeiten des menschlichen Geistes insgesamt.« (*Newton*)[2]

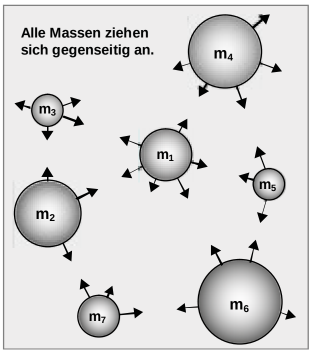


Bild 1: »Alle Massen ziehen sich gegenseitig an.« (Newton)

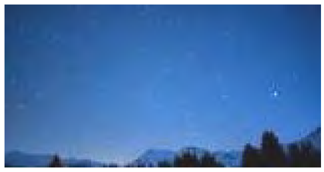


Bild 2: Sternenhimmel über Arosa

Newton hat dieses Mehrkörper-Problem auf ein Zweikörper-Problem reduziert, indem er aus dem universellen Naturzusammenhang zwei Körper isolierte, nämlich Erde und Mond, und sich auf die Wechselwirkung zwischen diesen beiden Körpern konzentrierte.[3]

Zugleich hat er in einem weiteren Schritt von der wahrnehmbaren Wirklichkeit abgesehen: Er nahm vereinfachend an, dass die räumliche Ausdehung des Mondes (Durchmesser: 3 476 km) aufgrund seiner großen Entfernung zur Erde (ca. 384 000 km) vernachlässigbar klein sei, d.h. für *Newton* war der Mond eine punktförmige Masse (*Massepunkt-Modell*), die sich auf einer nahezu kreisförmigen Bahn um die Erde bewegt (siehe Bild 3).

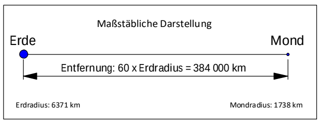


Bild 3: Der Mond als Massepunkt – Maßstäbliche Darstellung der Erde–Mond–Entfernung

Kleine Bilder zur Vergößerung anklicken.

Fazit: Jeder, der den Mond in einer klaren Vollmondnacht einmal genauer in Augenschein genommen hat, dürfte es schwer fallen, sich den Mond als Punkt vorzustellen. Gleichwohl: Nur unter der Voraussetzung, die Wirklichkeit so zu beschreiben, wie wir sie nicht wahrnehmen, war es *Newton* möglich geworden, ein Gesetz über die die Größe der Gravitationswirkung zwischen Körpern zu formulieren.

Bei der nachfolgenden Herleitung des Gravitationsgesetzes betrachten wir Erde und Sonne ebenfalls als von anderen Himmelskörpern isolierte und unbeeinflusste Elemente eines Zweikörper-Modells. Auch diese beiden Körper können wir uns aufgrund der Größenverhältnisse jeweils auf einen Massepunkt komprimiert denken, denn der Durchmesser der Sonne ist mit 13,927 Millionen km über 100 mal kleiner als die Entfernung zwischen Sonne und Erde (149,6 Millionen km) und die Erde ist noch einmal über 100 mal kleiner als die Sonne.

1.2 Newtons Gravitationsgesetz von 1686

In seinem 1686 erschienen Hauptwerk »Mathematische Prinzipien der Naturlehre« schreibt *Newton* (Bild 4) über die Bestimmung der Größe der Anziehungskraft zwischen zwei kugelförmigen Körpern und (Bild 5):

> »Die bewegende Kraft, durch welche jede beliebige Kugel gegen eine andere hingezogen wird und welche man bei Körpern auf der Erde gewöhnlich das Gewicht nennt, verhält sich wie das Produkt der in jeder der beiden Kugeln enthaltenen Materie, dividirt durch das Quadrat des Abstandes zwischen beiden Mittelpunkten ... . Die beschleunigende Kraft, durch welche jede Kugel nach Verhältniss ihrer Materie gegen die andere hingezogen wird, verhält sich wie die Menge der Materie in dieser anderen Kugel, dividirt durch das Quadrat des Abstandes beider Mittelpunkte ... . Hat man dies gehörig eingesehen, so wird man leicht die Bewegungen der Himmelskörper unter sich bestimmen können.« (Principia, Über das Weltsystem, § 26)

Bild 4: Isaac Newton (1643-1727)

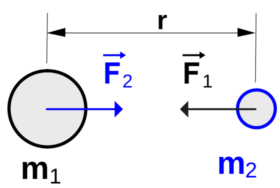


Bild 5: Newtons Zweikörper-Modell

Demnach ist die Größe der Anziehungskraft F proportional zu den Massen m_1 und m_2 der sich gegenseitig anziehenden Körpern und umgekehrt proportional zum Quadrat des

---

1 Newton, Isaac: Mathematische Prinzipien der Naturlehre, London 1726 (3. Ausgabe), hrsg. von Jakob Philipp Wolfers in deutscher Übersetzung, Berlin 1872 (Verlag von Robert Oppenheim), Nachdruck: Darmstadt 1963 (Wissenschaftliche Buchgesellschaft). Druck der lateinischen Erstausgabe: London 1687, S. 392 (III. Buch, § 9).

2 Newton, Isaac: De Motu (1684): zit. nach: Cohen, I. Bernard: Revolutionen in der Naturwissenschaft, Frankfurt a. M. 1994, S. 252.

3 Vgl. Bulthaup, Peter: Zur gesellschaftlichen Funktion der Naturwissenschaften, Frankfurt am Main 1973, S. 39 f. sowie S. 97 und 103 sowie Cohen (1994), a.a.O., S. 248 (Massepunkt-Modell) u. 252 f. (Mehr-Körper-Problem).

Abstands r ihrer Mittelpunkte (Bild 5). Die Darstellung dieses Gesetzes als Formel mit den heute üblichen Formelzeichen ist in Gleich. [1] angegeben.

Wie sich diese Formel aus den im nächsten Abschnitt näher beschriebenen Voraussetzungen herleiten lässt, wird Gegenstand der nachfolgenden Abschnitte sein.[4]

$$\boxed{F \sim \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

Gleich. [1]: Newtonsches Gravitationsgesetz

1.3 Historische Voraussetzungen des Gravitationsgesetzes

Newton konnte bei seiner Begründung des Gravitationsgesetzes auf folgende theoretische Voraussetzungen zurückgreifen:

1. Die erstmals von *Galileo Galilei* getroffene Unterscheidung von gleichförmiger und beschleunigter Bewegung und die von ihm auf dieser Grundlage entwickelten Kinematik-Gesetze der geradlinigen Bewegung (1638).
2. Die von *Johannes Kepler* entdeckten kinematischen Gesetze der Planetenbewegung (Keplersche Gesetze von 1609).
3. Die von *Newton* selbst unter Bezugnahme auf Arbeiten von *Christian Huygens* und *Robert Hooke* erarbeiteten kinematischen Gesetze der Kreisbewegung zur Bestimmung der Bahngeschwindigkeit v und Zentripetalbeschleunigung a_z (um 1673).
4. Die ebenfalls von *Newton* in seinem Hauptwerk dargelegten Axiome (Grundsätze) seiner Theorie der Bewegungen und ihrer Ursachen (1686).

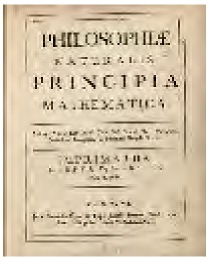


Bild 6: Titelblatt der »Principia« von 1686

Im Einzelnen ging es dabei insbesondere um folgende physikalische Bestimmungen:

- Die Newtonschen Axiome der Mechanik (Grundsätze)

  1. Axiom (Trägheitsprinzip): Ein Körper beharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird seinen Zustand zu ändern.

  2. Axiom: Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

  Aus F ~ a folgt mit m = const. das Dynamische Grundgesetz (Gleich. [2]) zur Berechnung der Größe einer Kraft F, die einem Körper mit der Masse m die Beschleunigung a verleiht.

  3. Axiom (Wechselwirkungsprinzip): Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper auf einander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

$$\boxed{F = m \cdot a}$$

Gleich. [2]: Grundgesetz der Dynamik

$$\boxed{v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}}$$

Gleich. [3]: Bahngeschwindigkeit

$$a_Z = \frac{v^2}{r}$$

Gleich. [4]: Zentripetalbeschleunigung. Setzt man für die Bahngeschwindigkeit v die Gleich. [3] ein, so ergibt sich:

$$\boxed{a_Z = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}}$$

Gleich. [5]: Zentripetalschleunigung

- Kinematik der Kreisbewegung eines Massepunktes

  Bei einem vollständigen Umlauf legt der auf einer Kreisbahn rotierende Köper während der Dauer T eines Umlaufs einen Weg von $s = 2 \cdot \pi \cdot r$ (Kreisumfang) zurück. Damit ergibt sich für die Berechnung der Bahngeschwindigkeit v eines Massepunktes auf einer Kreisbahn mit dem Radius r und der konstanten Umlaufdauer T die in Gleich. [3] angegebene Formel.

  Jeder auf einer Kreisbahn sich bewegender Körper muss in jedem Moment zum Zentrum der Kreisbahn hin beschleunigt werden, um auf der Kreisbahn zu bleiben. Für diese Zentripetalbeschleunigung a_z gilt nach *Newton* (Principia, § 18, Zusatz 1) die in Gleich. [4] angegebene Formel. Setzt man in Gleich. [4] für die Bahngeschwindigkeit v die Gleich. [3] ein, so ergibt sich für die Zentripetalbeschleunigung a_z die Formel in Gleich. [5].[5]

[4] Newton (1963), a.a.O., S. 530. Vgl. Leifi-Physik: NEWTONs Herleitung des Gravitationsgesetzes. Anmerkung: So hat Newton sein Gesetz nicht hergeleitet. Gleichwohl stimmt diese Darstellung mit der unseren in einigen Teilen überein. Weiteres dazu im Kapitel 2.

[5] Diese Beziehung wurde 1673 von Christian Huygens erstmals publiziert. Unabhängig davon hatte Newton sie bereits einige Jahre zuvor auch aufgestellt, allerdings seinerzeit (wie auch Huygens) noch als Wirkung einer Zenrifugalkraft interpretiert. Vgl. Cohen, I. Bernhard: Newtons Gravitationsgesetz – aus Formeln wird eine Idee, in: Spektrum der Wissenschaft, Mai 1981, S. 111.

- Kepler-Konstante der Planetenbewegung

  Nach dem 3. Gesetz von Johannes Kepler (1571-1630) verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten T_1 und T_2 zweier um einen gemeinsamen Zentralkörper sich bewegender Himmelskörper wie die Kuben der großen Halbachsen a_1 und a_2 ihrer Ellipsenbahnen (Gleich. [6]).

$$\boxed{\frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}} = \frac{a_1^{\,3}}{a_2^{\,3}}}$$

Gleich. [6]: 3. Kepler-Gesetz

  Aus diesem 3. Kepler-Gesetz folgt, dass für ein und denselben Zentralkörper (z.B. die Sonne) der Quotient $T_1^2 / a_1^3 = T_2^2 / a_2^3 = \ldots$ für alle ihn umkreisenden Umlaufkörper (Planeten) den gleichen Betrag hat und von daher konstant ist. Daher wird dieser in der Gleich. [7] angegebene Quotient auch als Kepler-Konstante C bezeichnet:

$$\boxed{C = \frac{T^2}{a^3}}$$

Gleich. [7]: Kepler-Konstante

Bild 7: Johannes Kepler (1571-1630)

1.4 Weitere vereinfachende Annahmen

Wir gehen bei der Herleitung des Gravitationsgesetzes von folgenden vereinfachenden Annahmen aus:

- Die räumliche Ausdehnung der Körper mit den Massen m_1 und m_2 sei im Verhältnis zum Abstand r vernachlässigbar klein, d.h. wir betrachten die Körper als Massepunkte (Massepunkt-Modell).
- Die Bahnen der Umlaufkörper (Planeten oder Trabanten) seien kreisförmig. Damit können wir die Halbachse a im dritten Kepler-Gesetz durch den Kreis-Radius r ersetzen, d.h. es wird $a = r$.
- Bewegt sich ein Körper um einen Zentralkörper wie z. B. die Erde um die Sonne, so führt der Umlaufkörper in jedem Moment gleichzeitig zwei Bewegungen aus: Eine beschleunigte Bewegung (Zentripetalbeschleunigung) in Richtung zum Mittelpunkt des Zentralkörpers und eine gleichförmige geradlinige Bewegung tangential zur Umlaufbahn (siehe Bild 8).[6] Als Ursache der Zentripetalbeschleunigung ist eine in Richtung Kreiszentrum wirkende Kraft, die sog. Zentripetalkraft, erforderlich, die Ursache der gleichförmigen geradlinigen Tangentialbewegung ist die Trägheit des Umlaufkörpers.

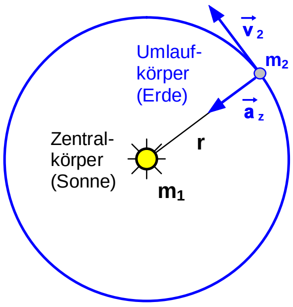


Bild 8: Zentralkörpersystem mit einem Umlaufkörper

1.5 Formale Herleitung des Gravitationsgesetzes

Vorbemerkung zur Vorgehensweise

Bei dem von *Newton* entwickelten Gravitationsgesetz geht es um die Bestimmung der Kraft, mit der sich zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 gegenseitig anziehen. Diese Kraft wird als Gravitationskraft bezeichnet – oder: Die »Kraft der Schwere« [lat. *grave*] eines Körpers, wie es bei *Newton* heißt.

Wir gehen bei den folgenden Überlegungen davon aus, dass jeweils einer der beiden Körper als ruhender Zentralkörper diene, während der jeweils andere als Umlaufkörper den Zentralkörper umkreise, wie z. B. der Mond die Erde oder die Erde die Sonne.

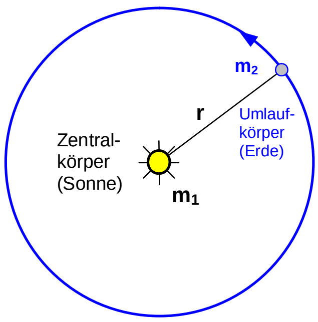


Bild 9: *Heliozentrisches Modell*: Körper 1 mit der Masse m_1 als Zentralkörper

Annahme 1 (Bild 9): Im ersten Fall sei der Körper mit der Masse m_1 der Zentralkörper, wie beispielsweise die Sonne in unserem Sonnensystem, und der Körper mit der Masse m_2 sei der Umlaufkörper. Er umkreist wie die Erde und die anderen Planeten die im Zentrum unseres Sonnensystems ruhende Sonne (gr. *helios*). Deshalb bezeichnen wir diese Annahme als »*Heliozentrisches Modell*« (Bild 9).

6 Diese Erklärung der Planetenbewegung, die 1679 erstmals von *Robert Hooke* formuliert wurde, hat *Newton* später übernommen und auf alle Umlaufbewegungen angewendet. »Am 28. November 1679 schrieb Newton an Hooke, er habe – soweit er sich erinnere – erstmals in dessen Brief vom 24. November etwas von der Hypothese erfahren, daß sich die Bewegungen der Planeten aus einer direkten Bewegung in Richtung der Tangente zur Kurve und einer anziehenden Bewegung in Richtung Sonne zusammensetze.« Cohen (1981), a.a.O., S. 102.

Annahme 2 (Bild 10): Danach tauschen wir die Funktionen der beiden Körper, indem wir den Körper mit der Masse m_2 als ruhenden Zentralkörper betrachten und den Körper mit m_1 als Umlaufkörper. Weil wir uns in diesem Fall die Freiheit erlauben, die Sonne mit der Masse m_1 gleichsam um die im Zentrum ruhende Erde (gr. *geos*) mit der Masse m_2 rotieren zu lassen, handelt es sich bei dieser Annahme gewissermaßen um ein *»Geozentrisches Modell«* (Bild 10).

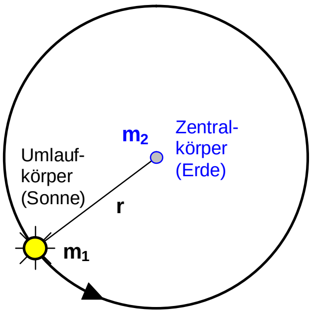


Bild 10: *Geozentrisches Modell*: Körper 2 mit der Masse m_2 als Zentralkörper

Um Missverständnisse zu vermeiden: Dies ist kein Rückfall in vorkopernikanische Zeiten, sondern eine modellhafte Veranschaulichung in eher provokativer Absicht. Es ist auch nicht intendiert, durch den stringenten mathematischen Formalismus in der hier gewählten Form der Darstellung den Eindruck zu erwecken, als sei die newtonsche Begründung des Gravitationsgesetzes frei von logischen Brüchen oder spekulativen Elementen und Modellen (vgl. dazu das Kapitel 1.1 über *Newtons Problemreduktion* sowie die auch selbstkritisch verstandenen Hinweise im Kapitel 2.1 mit einigen *Kritischen Anmerkungen* zur Herleitung des Gravitationsgesetzes) [7].

> »Es ist ebenso vernünftig, eine Art Gefangenschaft durch eine andere darzustellen, wie irgendetwas, was wirklich existiert, durch etwas, was nicht existiert.«
>
> Daniel Defoe (1719)[8]

1.6 Heliozentrisches Modell

Annahme 1: Wir wollen zunächst annehmen, der Körper mit der Masse m_1 sei der ruhende Zentralkörper (*Sonne*) und der mit der Masse m_2 der Umlaufkörper (Erde), der sich periodisch mit der Umlaufdauer T_2 um den Zentralkörper mit der Bahngeschwindigkeit v_2 auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegt (siehe dazu die Bilder 9 und 11).

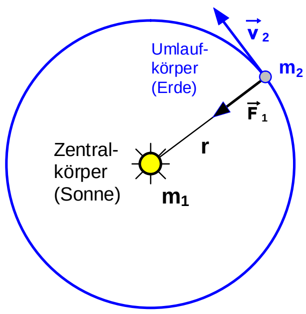


Bild 11: Zentripetalkraft F_1 auf den Umlaufkörper m_2

Der Körper mit der Masse m_1 übt auf den Umlaufkörper m_2 eine Gravitationskraft F_1 aus, die als Zentripetalkraft wirkt und den Umlaufkörper in Richtung zum Mittelpunkt des Zentralkörpers beschleunigt und ihn damit auf der Kreisbahn hält und zugleich verhindert, dass er sich tangential von der Kreisbahn entfernt.

Für den Betrag dieser Kraft auf den Umlaufkörper m_2 gilt gemäß dem 2. Axiom von *Newton* das Dynamische Grundgesetz:

- $F_1 = m_2 \cdot a_z$ mit $a_z = v_2^2/r$ für die Zentripetalbeschleunigung und für die Bahngeschwindigkeit $v_2 = (2 \cdot \pi \cdot r)/T_2$ eingesetzt, ergibt sich für die Zentriptalkraft F_1, mit der der Zentralkörper m_1 den Umlaufkörper m_2 anzieht, die Gleichung [8].

$$F_1 = m_2 \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_2^{\,2}} \cdot r$$

Gleich. [8]: Zentripetalkraft F_1 auf den Umlaufkörper m_2

- Nach dem 3. Keplerschen Gesetz gilt gemäß Gleich. [7] für alle um ein und denselben Zentralkörper sich bewegenden Umlaufkörper (Planeten) die durch den jeweiligen Zentralkörper (hier m_1) bestimmte Kepler-Konstante: $T_2^2/a^3 = C_1$.
- Wegen der angenommenen Kreisform setzen wir auch hier für $a = r$ und es ergibt sich für die Kepler-Konstante des Zentralkörpers (m_1): $C_1 = T_2^2/r^3$.
- Daraus folgt für das Quadrat der Umlaufdauer T_2 des Umlaufkörpers m_2 die Gleich. [9].

$$\boxed{T_2^{\,2} = C_1 \cdot r^3}$$

Gleich. [9]: Umlaufdauer T_2 des Körpers m_2

- Wir setzen die Gleichung [9] in Gleichung [8] ein und erhalten für die Kraft auf den Körper mit der Masse m_2: $F_1 = m_2 \cdot [(4 \cdot \pi^2)/(C_1 \cdot r^3)] \cdot r$.
- Nach dem Kürzen von r ergibt sich Gleichung [10].

  Hier ist C_1 die durch den Zentralkörper m_1 bestimmte Kepler-Konstante (siehe Gleich. [7]).

$$\boxed{F_1 = \frac{4 \cdot \pi^2}{C_1} \cdot \frac{m_2}{r^2}}$$

Gleich. [10]: Kraft F_1, die m_1 auf m_2 ausübt

7 Eine vergleichbare *Voraus-Setzung* finden wir auch bei Newton. So ging er bei der Berechnung der auf den Mond wirkenden Kraft von der »Hypothese aus, dass die Erde ruhe.« Principia, a.a.O., S. 387. Vgl. Kuhn, Wilfried: Physik, Band III A: Mechanik, Braunschweig 1979, S. 163 ff.

8 Defoe, Daniel: Das Leben und die seltsamen Abenteuer des Robinson Crusoe (1719), zit. nach: Camus, Albert: Die Pest, Reinbek bei Hamburg 1998 (Rowohlt), S. 5.

1.7 Geozentrisches Modell

Annahme 2: Nach dem 3. Newton-Axiom erzeugt jede Kraft stets eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Gegenkraft. Diese Kraft ist ebenfalls eine Gravitationskraft und wirkt auf den Körper mit der Masse m_1. Aufgrund dieser Wechselwirkung erscheint es zulässig, die Anordnung einfach umzukehren und von der umgekehrten Annahme auszugehen, dass der Körper mit der Masse m_2 als »Erde« der ruhende Zentralkörper sei, währenddessen sei der Körper mit der Masse m_1 jetzt als »Sonne« der Umlaufkörper, der sich periodisch mit der Umlaufdauer T_1 um den Zentralkörper mit der Bahngeschwindigkeit v_1 auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewege (siehe dazu die Bilder 10 und 12).

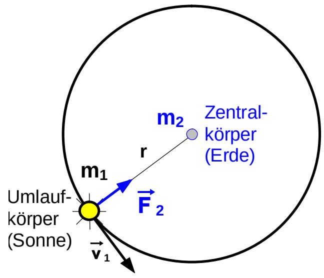


Bild 12: Zentripetalkraft F_2 auf den Umlaufkörper m_1

Jetzt erfüllt der Körper mit der Masse m_2 die Funktion des Zentralkörpers und übt auf den Umlaufkörper m_1 eine Gravitationskraft F_2 aus, die als Zentripetalkraft F_2 den jetzigen Umlaufkörper m_1 in Richtung Mittelpunkt des Zentralkörpers beschleunigt, ihn damit auf der Kreisbahn hält und zugleich verhindert, dass sich der Umlaufkörper tangential von der Kreisbahn entfernt.

$$F_2 = m_1 \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_1^2} \cdot r$$

Gleich. [11]: Zentripetalkraft F_2 auf den Umlaufkörper m_1

Für den Betrag dieser Kraft auf den Umlaufkörper m_1 gilt auch hier gemäß dem 2. Axiom von *Newton* das Dynamische Grundgesetz:

- $F_2 = m_1 \cdot a_z$ mit $a_z = v_1^2/r$ für die Zentripetalbeschleunigung und für die Bahngeschwindigkeit $v_1 = (2 \cdot \pi \cdot r)/T_1$ eingesetzt, ergibt sich für die Zentriptalkraft F_2, mit der der Zentralkörper m_2 den Umlaufkörper m_1 anzieht, die Gleichung [11].
- Nach dem 3. Keplerschen Gesetz gilt gemäß Gleich. [7] für alle um ein und denselben Zentralkörper sich bewegenden Umlaufkörper (Planeten) die durch den jeweiligen Zentralkörper (hier jetzt m_2) bestimmte Kepler-Konstante: $T_1^2/a^3 = C_2$.

$$\boxed{T_1^2 = C_2 \cdot r^3}$$

Gleich. [12]: Umlaufdauer T_1 des Körpers m_1

- Wegen der angenommenen Kreisform setzen wir auch hier für $a = r$ und es ergibt sich für die Kepler-Konstante des Zentralkörpers (m_2): $C_2 = T_1^2/r^3$.
- Daraus folgt für das Quadrat der Umlaufdauer T_1 des Umlaufkörpers m_1 die Gleich. [12].
- Wir setzen die Gleichung [12] in Gleichung [11] ein und erhalten für die Kraft auf den Körper mit der Masse m_1: $F_2 = m_1 \cdot [(4 \cdot \pi^2)/(C_2 \cdot r^3)] \cdot r$.
- Nach dem Kürzen von r ergibt sich Gleichung [13].

$$\boxed{F_2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{C_2} \cdot \frac{m_1}{r^2}}$$

Gleich. [13]: Kraft F_2, die m_2 auf m_1 ausübt

Hier ist C_2 die durch den Zentralkörper m_2 bestimmte Kepler-Konstante (siehe Gleich. [7])

1.8 Gleichsetzung der Wechselwirkungskräfte

Gemäß dem 3. Newton-Axiom müssen die oben näher bestimmten Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ dem Betrage nach gleich sein, d.h. wir können die [9]

Gleich. [10]: $F_1 = (4 \cdot \pi^2/C_1) \cdot (m_2/r^2)$ und die

Gleich. [13]: $F_2 = (4 \cdot \pi^2/C_2) \cdot (m_1/r^2)$ gleichsetzen und erhalten

mit $F_1 = F_2$ bzw. $(4 \cdot \pi^2/C_1) \cdot (m_2/r^2) = (4 \cdot \pi^2/C_2) \cdot (m_1/r^2)$.

Der Ausdruck $(4 \cdot \pi^2)/r^2$ lässt sich kürzen und es bleibt: $m_2/C_1 = m_1/C_2$.

Daraus folgt nach entsprechender Umformung die Gleichung [14]. Sie führt uns zu der für den nächsten Schritt sehr bedeutsamen Schlussfolgerung:

$$\boxed{m_2 \cdot C_2 = m_1 \cdot C_1 = \text{const.}}$$

Gleich. [14]: Das Produkt aus Masse und jeweiliger Kepler-Konstante ist ebenfalls konstant.

Das Produkt aus Masse m und Kepler-Konstante C ist ebenfalls eine Konstante.

[9] Auf die besondere Bedeutung des 3. Newton-Axioms insbesondere für den »symmetrischen Aufbau« des Gravitationsgesetzes weist Max Planck hin. Planck, Max: Einführung in die Allgemeine Mechanik, Leipzig 1920 (S. Hirzel), S. 36 und Cohen, I. Bernard: Revolutionen in der Naturwissenschaft, Frankfurt a. M. 1994 (Suhrkamp), S. 249 f.

1.9 Das Newtonsche Gravitationsgesetz

Um an dieser Stelle das Zwei-Körper-Modell wieder in den Blick zu nehmen, stellen wir bei der Berechnung der Gravitationskraft F_2 eine Beziehung zu dem anderen Körper her, indem wir die Gleichung [13] erweitern mit der dort nicht enthaltenen Masse m_2 eben dieses zweiten Körpers. Damit erhalten wir die in Gleichung [15] dargestellte Form zur Bestimmung der Kraft F_2.

$$F_2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{C_2} \cdot \frac{m_1}{r^2} \cdot \frac{m_2}{m_2}$$

Gleich. [15]: Erweiterung der Gleichung [13] mit der Masse m_2 – Durch Umformung ergibt sich:

$$F_2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{C_2 \cdot m_2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Gleich. [16]: Der 1. Bruchterm ist die Gravitationskonstante G :

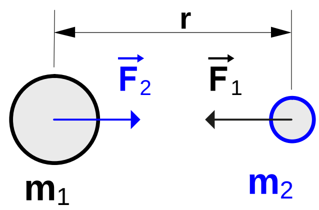
$$\frac{4 \cdot \pi^2}{C_2 \cdot m_2} = G$$

Gl. [17]: Gravitationskonstante G

Da in Gleichung [16] das Produkt $C_2 \cdot m_2$ im Nenner des ersten Bruches gemäß Gleichung [14] eine Konstante ist, muss wegen der ebenfalls konstanten Faktoren 4 und π auch der gesamte erste Bruchterm $(4 \cdot \pi^2)/(C_2 \cdot m_2)$ eine *Konstante* sein. Wir definieren diese Konstante als Gravitationskonstante G (Gleichung [17]) und können damit schreiben: $F_2 = G \cdot (m_1 \cdot m_2)/r^2$.

Durch die Definition des ersten Bruchterms aus der Gleichung [16] als Gravitationskonstante G wurden aus der Formel zur Berechnung der Anziehungskraft zugleich auch alle *astronomischen Bestimmungen* entfernt. Damit gilt dieses Gesetz allgemein und daher auch für solche Körper, die nicht Bestandteile eines Systems aus Zentralkörper und ihn umkreisenden Umlaufkörper sind. Die Größe r ist jetzt auch nicht mehr als Radius zu deuten, sondern als Abstand zwischen den Mittelpunkten der beiden sich gegenseitig anziehenden Körper.

Da die Beträge der Gravitationskräfte gleich sind, kann die indizierte Unterscheidung formal aufgehoben werden und mit $F_1 = F_2 = F$ ergibt sich die in Gleichung [18] angegebene übliche Form des Newtonschen Gravitationsgesetzes.



$$\boxed{F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

Gleich. [18]: Gravitationsgesetz

Zu dessen Inhalt schreibt Max Planck: Das Gesetz »gibt nicht nur die Kraft an, mit welcher der Massepunkt m_2 von dem Massepunkt m_1 angezogen wird, sondern es stellt auch die Kraft dar, mit welcher der Massepunkt m_1 von dem Massepunkt m_2 angezogen wird. ... Dies ist ein spezieller Fall des dritten Newtonschen Axioms: des Prinzips der Gleichheit von Aktion und Reaktion (oder von Wirkung und Gegenwirkung) welches ganz allgemein besagt, daß jeder Kraft, welche ein materieller Punkt auf einen zweiten ausübt, eine gleich große und entgegengesetzt gerichtete entspricht, welche der zweite Punkt auf den ersten ausübt. Ein zur Erde fallender fallender Stein vom Gewicht G zieht die Erde mit der nämlichen Kraft G an wie die Erde den Stein. Daß die Erde sich nicht merklich gegen den Stein hin bewegt, liegt nur an ihrer gegenüber dem Stein ungeheuren trägen Masse, welche nach [dem zweiten Newtonschen Axiom: $F = m \cdot a$] durch die Kraft G nur verschwindend wenig beschleunigt wird.«[10]

2. Nachbetrachtung

2.1 Kritische Anmerkungen zur Herleitung des Gravitationsgesetzes

Auch wenn bei dieser formalen Herleitung der Eindruck entstanden sein mag, die Konstante G im Gravitationsgesetz ließe sich mathematisch bestimmen, muss hier in aller Deutlichkeit betont werden: Die Gravitationskonstante G ist eine Naturkonstante und muss daher experimentell bestimmt werden.[11] Die Kenntnis der Gravitationskonstanten G ist für die praktische Anwendung des Gravitationsgesetzes unabdingbar. Wie sich deren Wert durch geeignete Messungen realisieren lässt, wird grundlegend in dem Abschnitt über das *Cavendish-Experiment* erläutert. Die messtechnische Ermittlung der Gravitationskonstanten G mit modernen Mitteln im Rahmen des Physikunterrichtes ist eines der zentralen experimentellen Anliegen dieses Projekts. Sie wird auf der Seite *Auswerten der Messdaten* ausführlich beschrieben.

Die mathematisch akzentuierte Form der obigen Herleitung legt möglicherweise die Vermutung nahe, dass sich das Gravitationsgesetz ohne Brüche und Widersprüche stringent aus den Newtonschen Axiomen und den Keplerschen Gesetzen deduzieren ließe. Mit seinen Gesetzen hat Johannes *Kepler* den auf der Grundlage astronomischer Beobachtungen gewonnenen empirischen Befunden eine mathematische Form gegeben. Sie sind insoweit empirisch, aber in der Sprache der Mathematik geschrieben und damit gleichsam idealisiert. So bedeutsam die Keplerschen Gesetze für die Entwicklung der Gravitationstheorie auch gewesen sein mögen, *Kepler* selbst gelang es nicht, eine zufriedenstellende physikalische Erklärung etwa für die Elllipsenbahnen oder die Umlaufzeiten der Planeten zu entwickeln. Zugleich haben Johannes *Kepler* und andere Astronomen wie Tycho *Brahe* und Giovanni Domenico *Cassini* durch ihre akribischen Himmelsbeobachtungen wertvolle empirische Hinweise geliefert, auf die sich *Newton* an zahlreichen Stellen seiner theoretischen Darstellung der Himmelsmechanik und der Gravitation immer wieder bezogen hat. Während *Kepler* seine

[10] Planck, a.a.O., S. 36. Vgl. auch Cohen (1994), a.a.O., S. 249 f.

[11] Die Gravitationskonstante G ist neben der Lichtgeschwindigkeit c und dem Planckschen Wirkungsquantum h eine der drei »fundamentalen und universellen Naturkonstanten« der Physik. Vgl. Gell-Mann (1994), S.289 f.

theoretischen Erörterungen im wesentlichen mit empirischen Befunden und eher zahlenmystischen Deutungen zu begründen suchte, beruhen die Erklärungen von *Newton* auf seinen allein durch theoretische Reflexionen gewonnenen Axiomen, insbesondere auf der physikalisch nicht weiter begründbaren, von Galilei bereits einige Jahrzehnte zuvor dargelegten Spekulation einer kräftefreien Bewegung, nämlich die der gleichförmigen und geradlinigen Trägheitsbewegung. In einem Universum, dessen Zusammenhalt durch Gravitationskräfte bewerkstelligt wird, gibt es keinen Körper, auf den keinerlei Kräfte wirken. Gleichwohl war diese Spekulation zwingend notwendig, um die Widersprüche in der aristotelischen Mechanik zu überwinden (siehe dazu die historischen Hinweise in der Einführung zu unserer Theorie-Seite). Diese ebenso geniale wie kreative, aber auch mutige Abstraktionsleistung und die daraus erwachsene Erarbeitung einer ersten, in sich schlüssigen physikalischen Theorie im Sinne der modernen Naturwissenschaft sowie deren erfolgreiche Anwendung auf empirische Gegenstände wie die Massenanziehung in der mathematischen Form des Gravitationsgesetzes, waren die herausragenden historischen Leistungen Newtons.

Für *Newton* war es nicht einfach, sich mit seinen Prinzipien der Mechanik in der damaligen Wissenschaftlergemeinschaft durchzusetzen. Die nur sporadischen Hinweise auf den »praktischen Nutzen« und die spärlichen Bezüge auf »experimentelle Beweise« in den »Principia« widersprachen den Wissenschaftsidealen der Royal Society, die seinerzeit in England die entscheidende Instanz für die Anerkennung und Herausgabe naturwissenschaftlicher Publikationen war.[12] Der Unterstützung und dem unermüdlichen Einsatz Edmond *Halleys* (1656–1742), der 1682 den nach ihm benannten Kometen entdeckte, war es zu verdanken, dass *Newton* sein Werk 1687 unter der Herausgeberschaft der Royal Society 1687 in Druck geben konnte. Allgemeine Anerkennung gefunden hat die Newtonsche Theorie allerdings erst, als sie sich auch in praktischen Anwendungszusammenhängen als leistungsfähig und effektiv erwies. Einige bedeutsame Anwendungen sind in dem Kapitel *3. Anwendungsbeispiele zum Gravitationsgesetz* zusammengestellt.

2.2 Bedeutung und Funktion des Gravitationsgesetzes

In einem lesenswerten Aufsatz hat *Richard Feynman* das Gravitationsgesetz als »Schulbeispiel für ein physikalisches Gesetz« bezeichnet. Es sei ein »großes Gesetz« und »die bedeutendste Verallgemeinerung ..., die dem menschlichen Geist je geglückt ist.«[13] Beeindruckend sei vor allem seine Einfachheit: »Die Gravitation ist einfach und darum schön.«[14] In einem anderen Essay heißt es bei Feynman: »Vergleichen Sie nur einmal die Verwirrung, den Mangel an Selbstvertrauen, das unvollständige Wissen vergangener Epochen und ihre endlosen Debatten und unauflöslichen Paradoxien mit der Klarheit und Einfachheit dieses Gesetzes – der Tatsache, daß alle Monde, Planeten und Sterne einer derart einfachen Regel unterliegen und daß darüber hinaus der Mensch dies verstehen und daraus folgern konnte, wie die Planeten sich bewegen müßten! Daß erklärt den Erfolg der Naturwissenschaften in den darauffolgenden Jahren, denn es ließ hoffen, andere Phänomene unserer Welt gehorchten möglicherweise ebenfalls so wunderbar einfachen Gesetzen.«[15]

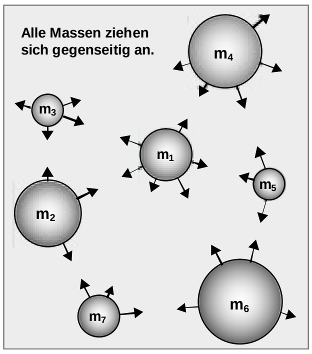
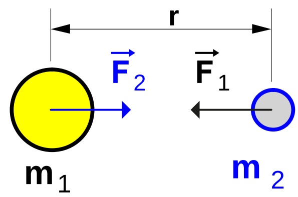


Bild 13: Newton: »Alle Massen ziehen sich gegenseitig an.«



$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Gleich. [19]: Gravitationsgesetz von Isaac Newton (1686)

Das Newtonsche Gravitationsgesetz „erzwingt [...] für jede gebundene Bewegung eines schweren Körpers um ein Zentrum eine in sich geschlossene Bahn und eine periodische Bewegung auf dieser Bahn. [...] Damit gehört das Newtonsche Attraktionsgesetz zu den Bedingungen der Möglichkeit eigentlicher Wissenschaft, denn wäre auch ein anderes als dieses Attraktionsgesetz denkbar, so wäre mit ihm doch ein durchgängiges System der Relationen von Zeitnormen nicht zu konstruieren, mithin ein einheitliches Maßsystem der Physik nicht möglich, die je partikularen Gesetzmäßigkeiten könnten nicht als notwendig in einer Wissenschaft zusammenhängend gedacht werden. [...] Es bedurfte der Idee, daß der Regularität der Erscheinungen am Himmel die gleichen Naturgesetze zugrunde liegen, die auf der Erde gelten, um über die bloße Phoronomie [reine Bewegungslehre, sic] hinauszukommen und von der Interpretation von Beobachtungsdaten zu deren theoretischer Konstitution, endlich zur experimentellen Erzeugung von Meßwerten zu gelangen.“[16]

Auf diese historische Bedeutung der Newtonschen Theorie als erste vollständige Theorie der modernen Naturwissenschaft und des daraus gewonnenen Gravitationsgesetzes als

12 Vgl. Guicciardini, Niccolò: Isaac Newton – Ein Naturphilosoph und das System der Welten, Bellone, Enrico (Hrsg.): Die Großen der Wissenschaft, in: Spektrum der Wissenschaft Biographien, Heft 1/1999, S. 53 f. sowie Duhem, Pierre: Ziel und Struktur physikalischer Theorien (Erstausgabe 1908), Hamburg 1998, S. 298 und ff. Vgl. auch: Cohen (1994), a.a.O., S. 239 f.

13 Feynman, Richard P.: Vom Wesen physikalischer Gesetze (Erstausgabe 1965), München Zürich 1993 (Piper Verlag), S. 20.

14 ebenda, S. 47. Vgl. dazu auch Bulthaup, Peter: Zur gesellschaftlichen Funktion der Naturwissenschaften, Frankfurt a. M. 1973, S.102 ff.

15 Feynman (2002), a.aO., S. 166 f. Vgl. auch Feynman (1993), a.a.O., S. 41.

16 Bulthaup, Peter: Zur gesellschaftlichen Funktion der Naturwissenschaften, Frankfurt am Main 1973 (Suhrkamp). 102 f.

dem in der damaligen Zeit wohl bedeutsamstem empirischen Naturgesetz, wurde bereits im vorangegangenen Abschnitt hingewiesen. Bleibt zu fragen, was man mit dem Wissen über die Gravitation und der Kenntnis des Gravitationsgesetzes anfangen kann. Naheliegend ist die Möglichkeit, mit Hilfe des Gravitationsgesetzes die Anziehungskraft zwischen zwei Massen oder andere Größen, die in dem Gesetz enthalten sind, zu berechnen. Darüber hinaus lassen sich Erscheinungen wie beispielsweise die folgenden erklären und physikalisch begründen:

- Warum die Kraft, die den Mond auf seiner Umlaufbahn hält, ihrem physikalischen Wesen nach von gleicher Natur ist wie die, die die Gegenstände zur Erde anzieht.
- Wie man die Geschwindigkeit berechnen kann, auf die man einen Körper beschleunigen muss, dass er nicht mehr zur Erde zurückfällt, sondern sie umläuft, oder gar deren Anziehungsbereich verlässt.
- Warum die Bahnen der Planeten Ellipsen sein müssen (Keplersche Gesetze).
- Gezeiten: Warum sich die Wassermassen bei den Übergängen von Ebbe und Flut in Bewegung setzen.
- Dass die Erde rund ist, weil alle Massen zu einem inneren Zentrum, dem Erdmittelpunkt, hin angezogen werden und warum sie an den Polen abgeplattet ist.
- Wie man Himmelskörper in Planetensystemen voraussagen kann, obwohl sie noch nicht sichtbar sind.
- Was Atome und Galaxien zusammenhält, weil die Schwerkraft grenzenlos wirkt.
- Wie neue Sterne entstehen und alte unsichtbar (schwarze Löcher) werden.
- Warum Körper mit unterschiedlichen Massen im freien Fall gleich schnell zur Erde fallen
- Wie man die Masse und die Dichte der Erde oder anderer Planeten bestimmen kann.

Zwei in der Öffentlichkeit viel beachtete Ereignisse aus der jüngsten Zeit verweisen auf die Aktualität des Themas »Gravitation«:

1. Im Januar 2016 sagen zwei Astrophysiker aus Pasadena (USA) die Entdeckung eines weiteren Planeten in unserem Sonnensystem auf Basis der Newtonschen Gravitationstheorie voraus. Mehr dazu im folgenden Abschnitt.
2. Der Nachweis der von Einstein vorausgesagten Gravitationswellen. In einer internationalen Pressekonferenz der beteiligten Institute verkündeten Wissenschaftler im Februar 2016 einen vorläufigen Höhepunkt in der Geschichte der Gravitation: Was sich Einstein selbst nicht vorstellen konnte, nämlich den direkten experimentellen Nachweis von Gravitationswellen, weil sie nach seiner Einschätzung für eine Messung viel zu schwach seien, gelang Wissenschaftlern der LIGO-Kooperation (Laser Interferometer Gravitation Wave Obsevatory) in den Observatorien von *Hanford* (Washington) und *Livingston* (Louisiana) unter maßgeblicher Beteiligung des Max-Planck-Instituts für Gravitationsphysik in Hannover. Am 14. September 2015 wurden in den beiden US-Observatorien die durch den Zusammenstoß von zwei Schwarzen Löchern ausgelösten Gravitationswellen direkt mit einem Laser-Interferometer gemessen. Die kollidierten Schwarzen Löcher hatten eine 29- und 36-mal so große Masse wie unsere Sonne. Sie verschmolzen während der Kollision zu einem neuen Schwarzen Loch, das jedoch nur noch 62 Sonnenmassen schwer war. Die Differenz von 3 Sonnenmassen wurde gemäß Einsteins Prinzip der Äquivalenz von Masse und Energie in Energie umgeformt und als Gravitationswelle abgestrahlt. In den US-amerikanischen LIGO-Instituten wurden dadurch ausgelöste Signale zweifelsfrei als Gravitationswelle identifiziert und registriert. Die erfolgreiche Messung einer weiteren Gravitationswelle folgt kurze Zeit später am 26.12.2016.[17]

   Empfehlung: Recht anschaulich werden Gravitationswellen in dem Video »Gravitationswellen - Wellen in der Raumzeit« des Max-Planck-Instituts für Gravitationsphysik dargestellt: MPI-Video »Gravitationswellen«.

Exemplarisch sollen im Folgenden einige dieser Anwendungen des Gravitationsgesetzes genauer dargestellt werden.

[17] Vgl. Darmstädter Echo vom 11.2.2016 sowie Hornung, Helmut: Der Kosmos bebt, sowie ders.: Die Suche nach dem zarten Zittern und Mokler, Felicitas: Interview Gravitationswellen, in: MaxPlanckForschung (MPF) Heft 1/2016, S. 79-81, S. 82-85 und S. 86-87. Erneute Messung von Gravitationswellen (26.12.2016): Gravitationswellen, die Zweite, in: MaxPlanckForschung MPF Heft 2/2016, S. 47. Vgl. auch die Wikipedia-Artikel »Gravitationswelle«, »LIGO« und »Gravitationswellendetektor«. Über Einsteins »neue Theorie der Gravitation, der er den Namen „Allgemeine Relativitätstheorie gibt,“ vgl. Rovelli, Carlo: Sieben kurze Lektionen über Physik, Reinbek 2015 (Rowohlt), S.9 ff.

3. Anwendungsbeispiele zum Newtonschen Gravitationsgesetz

3.1 Entdeckung des Planeten Neptun (1846)

Ein erster spektakulärer Beweis für die Leistungsfähigkeit der Newtonschen Gravitationstheorie war deren Anwendung im Vorfeld der Entdeckung des Planeten Neptun. Der 1781 von Wilhelm Herschel entdeckte Planet Uranus zeigte bei genaueren Beobachtungen seiner Umlaufbahn zum Teil erhebliche Abweichungen von der berechneten Bahn. Der französische Astronom Urbain *Leverrier* (1811 – 1877) folgerte aus der Kenntnis dieser astronomischen Befunde und aus eigenen Berechnungen, die er auf der Grundlage der Newtonschen Gravitationstheorie durchführte, dass es noch einen weiteren Planeten geben müsse, der diese Bahnstörungen des Planeten Uranus verursachte. [18] Er gewann den deutschen Astronomen Johann Gottfried *Galle* (1812-1910) für seine Idee. Galle war an der Sternwarte Berlin tätig und fand tatsächlich am 23.9.1846 einen neuen Planeten in unmittelbarer Nähe der von Leverrier vorausberechneten Postion. Diese Entdeckung des Planeten Neptun war »ein überragender Erfolg der Gravitationstheorie Newtons!«[19]

Bild 14: Urbain Leverrier (1811–1877)

Auf die Methode, von beobachteten Bahnabweichungen eines Planeten auf die Existenz eines weiteren, bis dahin noch nicht entdeckten Himmelskörpers zu schließen, hat *Newton* in seinen »Principia« selbst hingewiesen. Er schätzte zwar »die gegenseitigen Einwirkungen der Planeten« im Vergleich zum Einfluss der Sonne auf die Planeten als »unbedeutend« ein, machte aber gleichwohl für Bahnabweichungen wie etwa die des Saturn andere Himmelskörper verantwortlich. So vermutete *Newton* in der Umgebung des Saturn den Einfluss von Kometen auf dessen Bahn.[20]

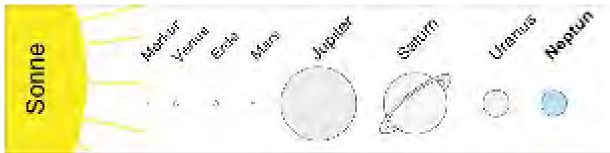


Bild 15: Neptun im Größenvergleich zu den anderen Planeten (Abstände nicht maßstäblich)

Richard Feynman sieht in der Entdeckung des Neptun auf der Basis des Gravitationsgesetzes ein Indiz dafür, dass ein solches »Gesetz, wenn es richtig ist, zum Aufspüren eines anderen benutzt werden kann.« Diese Aussage ist als prinzipielle Entwicklungsmöglichkeit sicherlich zutreffend. Spekulativ hingegen ist seine Verknüpfung des Gravitationsgesetzes mit der Entdeckung der Lichtgeschwindigkeit: »Hätten wir das Gesetz von der Schwerkraft nicht erkannt und mithin nicht gewußt, was wir von den Jupitermonden zu erwarten haben, hätten wir viel länger gebraucht, um die Lichtgeschwindigkeit zu berechnen.« Kritikwürdig ist insbesondere die als Konkretisierung gedachte Behauptung über die astronomischen Forschungen des dänischen Astronomen *Ole Rømer* (1644-1710). *Rømer* hatte 1676 auf der Grundlage von Beobachtungsdaten über die Jupitermonde nachweisen können, dass die Lichtgeschwindigkeit endlich sei.[21] Dazu bemerkt *Feynman*:

> »Rømer vertraute dem Gravitationsgesetz ... und kam zu dem interessanten Schluß, daß das Licht eine gewisse Zeit braucht, um von den Jupitermonden zur Erde zu gelangen, daß wir im Teleskop also nicht die Monde sehen, wie sie jetzt sind, sondern wie sie vor der Zeit waren, während der das Licht zu uns unterwegs war.« [22]

Offenkundig hat der von uns ansonsten überaus geschätzte Physiker *Feynman* bei seiner Kommentierung der Arbeiten von *Rømer* die historische Tatsache übersehen, dass *Newton* sein Gravitationsgesetz erst etwa ein Jahrzehnt nach der Entdeckung von *Rømer* veröffentlicht hat. Bleibt noch der Vollständigkeit halber zu erwähnen, dass zwei Jahre später der niederländische Physiker *Christiaan Huygens* (1629–1695) u.a. mit den Beobachtungsdaten von *Rømer* für die Lichtgeschwindigkeit einen Wert von 212 222 km/s berechnet hat.[23]

Zurück zur Entdeckung des Planeten Neptun im Jahre 1846. Dieser historische Hinweis hat in jüngster Zeit einen hochaktuellen Bezug erhalten: Mit ähnlichen Methoden, wie sie Leverrier unter Bezugnahme auf die Newtonsche Gravitationstheorie angewendet hat, wurden deutliche Anzeichen dafür gefunden, die die Existenz eines weiteren Planeten in unserem

---

[18] Vgl. Wolfers, J.Ph.: Vorwort und Erläuterungen, in: Newton, Isaac: Mathematische Prinzipien der Naturlehre (Principia), London 1713 (2. Aufl.), S. VIII (Vorwort), S. 657 und 659 sowie Wikipedia: Urbain Le Verrier, Neptun und Johann Galle. Zu ähnlichen Ergebnissen kam unabhängig von Leverrier auch der englische Astronom John Couch Adams (1819-1892). Vgl.: auch Feynman, a.a.O., S. 31 und Zekl, Hans: Die unerzählte Geschichte der Neptun-Entdeckung, astronews.com vom 23. Mai 2003.

[19] Kornelius, Martin: Einstein light, München 2005 (DTV), S. 57.

[20] Newton: Principia, a.a.O, S. 533 und 534. Vgl. auch: Laue, Max von: Geschichte der Physik, Frankfurt am Main 1958 (Ullstein), S.37.

[21] Rømer, Olaf: Die Entdeckung und die Berechnung der Lichtgeschwindigkeit 1676, mit einer deutschen Übersetzung des Beitrages von Römer im Journal des Sçavans von 1676 von Renate Loosen, Stuttgart 1983 (Belser Verlag). Online-Version in: Ole Rømer & die Lichtgeschwindigkeit

[22] Sämtliche Feynman-Zitate: Feynman, Richard: P., a.a.O., S. 30 f.

[23] Huyghens, Christiaan: Abhandlung über das Licht (Erstausgabe: 1678), Nachdruck in deutscher Übersetzung herausgegeben von Eugen v. Lommel und übersetzt von Rudolf Mewes, Leipzig 1890.

Sonnensystem als sehr wahrscheinlich erscheinen lassen. Im Wissenschaftsmagazin »Science« vom 20.1.2016 wird in einem Artikel über die Forschungen der beiden Astro-Physiker Mike Brown und Konstantin Batygin vom California Institute of Technology (Caltech) in Pasadena (USA) berichtet.

> »Jetzt hat er (Mike Brown) sich der Jahrhunderte alte Suche nach neuen Planeten angeschlossen. Seine Methode –folgern der Existenz von Planet X aufgrund der Wirkung seiner geisterhaften Schwerkraft– hat eine respektable Bilanz. Im Jahr 1846 hat beispielsweise der französische Mathematiker Urbain Le Verrier die Existenz eines riesigen Planeten aufgrund von Unregelmäßigkeiten in der Umlaufbahn des Uranus vorhergesagt. Astronomen an der Berliner Sternwarte fanden den neuen Planeten, Neptun, wo er sein sollte, eine funkensprühende Mediensensation.«[24]

Weitere Beispiele zur Anwendung des Gravitationsgesetzes sind im Folgenden dargestellt.

3.2 Bestimmung der Masse der Erde

Sind die experimentell zu bestimmenden Werte der Gravitationskonstanten G und der Erdbeschleunigung g an einem gegebenen Ort bekannt, so lässt sich mit Hilfe des Gravitationsgesetzes und dem zweiten Newton-Axiom die Masse der Erde berechnen. Dazu betrachten wir einen im Vergleich zur Erde kleinen Probekörper mit der Masse m, der an einem bestimmten Ort auf der Erdoberfläche liegt (Bild 16). Vereinfachend stellen wir uns vor, dass sowohl die Erdmasse M als auch die Masse m des kleinen Körpers jeweils in ihrem Mittelpunkt verdichtet seien, so dass beide Körper als Massepunkte betrachtet werden können. Da der Radius der Masse m des kleinen Körpers gegenüber dem Erdradius R vernachlässigbar klein ist, ist der Mittelpunktabstand der beiden Massepunkte etwa so groß wie der Radius R der Erde.

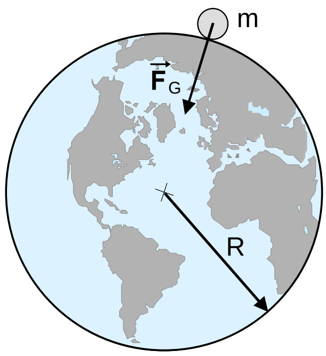


Bild 16: Körper mit der Masse m liegt auf der Oberfläche der Erde mit der Masse M

Die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ eines Körpers mit der Masse m auf der Erdoberfläche ist gemäß dem 2. Newton-Axiom gleich der Anziehungskraft gemäß dem Gravitationsgesetz zwischen ihm und der Erde (Masse M). Demnach gilt:

$$F_G = m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \qquad \text{Gleich. [20]}$$

gegeben sind:

- $g = 9{,}81\ m/s^2$ (mittlerer Wert der Fallbeschleunigung)
- $R = 6371\ km = 6{,}371 \cdot 10^6\ m$ (mittlerer Erdradius)
- $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ m^3/(kg \cdot s^2)$ (Gravitationskonstante)

Lösung:

Die Masse m des Körpers wird aus der Gleichung [20] herausgekürzt und die Gleichung anschließend nach der Masse M der Erde umgestellt:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} \qquad \text{Gleich. [21]}$$

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot (6{,}371 \cdot 10^6\ m)^2}{6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}}$$

$$\underline{\underline{M = 5{,}967 \cdot 10^{24}\ kg}}$$

24 Hand, Eric: Number 9: A new giant planet, still unseen, appears to be shaping the orbits of objects beyond Neptune. in: Science, 22. Januar 2016, Band 351 , Ausgabe 6271, S. 330 – 333, https://doi.org/10.1126/science.351.6271.330 .

3.3 Dichte und Fallbeschleunigung der Erde

Nachdem die Masse der Erde bestimmt werden konnte, war es auch möglich geworden, deren mittlere Dichte zu bestimmen. Denn dazu musste die Masse der Erde lediglich durch deren Volumen dividiert werden. Die Volumenberechnung setzt allerdings voraus, dass die Erde wieder vereinfacht als Kugel mit einem mittleren Radius R angenommen wird.

gegeben sind: $R = 6371 \text{ km} = 6{,}371 \cdot 10^6 \text{ m}$ (mittlerer Erdradius)

$M = 5{,}967 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ (Masse der Erde)

Mit diesen Werten lassen sich Volumen V und Dichte ρ der Erde wie folgt berechnen:

Dichte der Erde:

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \text{mit} \quad V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \qquad \text{Gleich. [22]}$$

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{5{,}967 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (6{,}371 \cdot 10^6 \text{ m})^3}$$

$$\underline{\underline{\rho = 5{,}5 \cdot 10^3 \text{ kg}\,\text{m}^{-3}}}$$

Fallbeschleunigung g:

Zur Bestimmung der Fallbeschleunigung g gehen wir wiederum von den bereits unter 2. gewählten Voraussetzungen aus und legen auch hier wieder das Bild 16 sowie die mit Gleich. [20] identische Gleich. [23] als Ansatz zugrunde:

$$F_G = m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \qquad \text{Gleich. [23]}$$

Hier wollen wir allerdings annehmen, dass unser Probekörper mit der Masse m frei zur Erde fällt. Frei bedeutet hier, dass er sich unbehindert durch irgendwelche Hindernisse frei auf die Erde zubewegen kann. Völlig unbehindert kann er nur fallen, wenn sich ihm keine Materieteilchen in welcher Art auch immer entgegenstellen, und dies wäre uneingeschränkt nur im Vakuum möglich. Unter dieser Voraussetzung können wir die räumlichen Randbedingungen der Fallbewegung außer Betracht lassen und zur Berechnung der Fallbeschleunigung die Gleichung [23] nach g umstellen. Dazu kürzen wir auch hier die Masse des fallenden Probekörpers m heraus und erhalten für die Fallbeschleunigung die Formel:

$$\boxed{g = G \cdot \frac{M}{R^2}} \qquad \text{Gleich. [24]}$$

Damit lässt sich nicht nur die im erdnahen Bereich (d.h. Fallhöhe h << Erdradius R) wirksame Fallbeschleunigung g berechnen. Zudem erfährt die etwa 50 Jahre vor der Entdeckung des Gravitationsgesetzes von Galilei mit anderen Argumenten behauptete Unabhängigkeit der Fallbeschleunigung von der Masse der fallenden Körper eine physikalische Begründung. »Im Vakuum fallen alle Körper gleich schnell!«, hieß es bei Galilei. Und in der Tat, wenn sich die Masse des frei fallenden Körpers herauskürzen lässt, gilt die Gleichung [24] prinzipiell für jeden frei fallenden Körper, egal welche Masse er besitzt. Damit war zugleich geklärt, dass die Beschleunigung frei fallender Körper nicht von deren Merkmaleigenschaften bestimmt wird, sondern allein von denen des Zentralkörpers, der sie anzieht, d.h. von dessen Masse M und Radius R.

Bleibt noch zu erwähnen, dass die Fallbeschleunigung g zwar mit der Fallhöhe h variiert, weil die Anziehungskraft nach dem Gravitationsgesetz von dem Abstand r = R + h zwischen den Massen m und M abhängig ist. Sie kann jedoch im erdnahen Bereich als konstant angenommen werden, solange die Fallhöhe h deutlich kleiner als der Erdradius R ist (d.h. h << R). Denn damit gilt die in Gleichung [24] vorausgesetzte Annahme, dass r = R, weil h vernachlässigbar klein ist. Die Formel für die Fallbeschleunigung gilt freilich nicht nur für die Erde, sondern prinzipiell für alle anderen Himmelskörper. So können damit beispielweise auch die Fallbeschleunigungen auf den übrigen Planeten unseres Sonnensystems berechnet werden.

3.4 Bestimmung der kosmischen Geschwindigkeit

Newton hat mit seinem Satelliten-Modell (siehe Bild 7 in der Einführung) gezeigt, dass ein waagerecht von einem hohen Berg aus geworfener Körper umso weiter entfernt auf der Erde auftrifft, je höher seine Abwurfgeschwindigkeit v_0 ist (siehe Bild 17). Wird die Abwurfgeschwindigkeit so weit erhöht, dass der Körper gar nicht mehr auf der Erde auftrifft, sondern die Erde umläuft, bezeichnet man diese Geschwindigkeit als 1. kosmische Geschwindigkeit. Es handelt sich demnach um jene Geschwindigkeit, auf die ein Satellit mit der Masse m von der Oberfläche eines Zentralkörpers wie z. B. von der Erde aus mindestens beschleunigt werden muss, damit er den Zentralkörper mit der Masse M gerade umkreist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Radius r der Umlaufbahn des Satelliten nur geringfügig größer sei als der des Zentralkörpers und rechnen mit r = R.

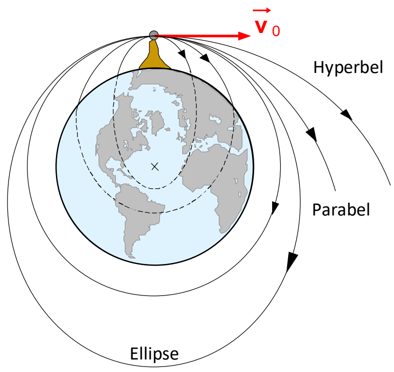


Bild 17: Wurfbahnen eines Körpers, der von einem hohen Berg aus waagerecht geworfen wird.

Um den Satellit auf eine Kreisbahn zu zwingen (siehe Bild 18), bedarf es einer zum Mittelpunkt gerichteten Zentripetalkraft F_z deren Betrag sich wie folgt berechnen lässt:

$$F_Z = m \cdot a_Z \quad \text{mit } a_Z = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \text{gilt: } F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r} \qquad \text{Gleich. [25]}$$

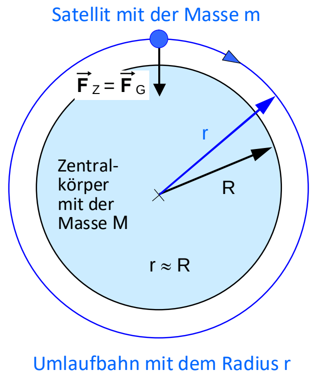


Bild 18: Satellit mit der Masse m umkreist einen Zentralkörper mit der Masse M und dem Radius R auf einer Umlaufbahn mit dem Radius r (r ≈ R)

Erzeugt wird diese Kraft durch die Gravitationswirkung, die der Zentralkörper auf den Umlaufkörper ausübt. Ihr Betrag berechnet sich nach dem Gravitationsgesetz. Demnach gilt für die von dem Zentralkörper auf den Satelliten ausgeübte Gravitationskraft:

$$F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \qquad \text{Gleich. [26]}$$

Setzen wir $F_G = F_Z$, so ergibt sich:

$F_G = F_Z$, ergibt:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \qquad \text{Gleich. [27]}$$

Kürzen wir m und einmal R aus der Gleichung [27], und stellen die Formel nach v um, so ergibt sich für die Berechnung der 1. kosmische Geschwindigkeit v_k folgende Formel:

$$\boxed{v_K = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}}} \qquad \text{Gleich. [28]}$$

Setzen wir in die Gleichung [28] die Masse und den Radius der Erde ein (Werte siehe Kapitel 3.2 oben), so ergibt sich für die Erde folgende 1. kosmische Geschwindigkeit:

$$v_K = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}} = \sqrt{6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{5{,}967 \cdot 10^{24}\,kg}{6{,}371 \cdot 10^6\,m}} \qquad \text{Gleich. [29]}$$

$$\underline{\underline{v_K = 7905{,}6\,m/s = 7{,}9056\,km/s = 28460\,km/h}}$$

Wird die Abwurfgeschwindigkeit weiter erhöht, kann er sich von dem Zentralkörper entfernen. Je nach Geschwindigkeit entsteht zunächst eine elliptische Umlaufbahn, bei weiterer Erhöhung der Geschwindigkeit verlässt er das Gravitationsfeld auf einer parabel- oder hyperbelförmigen Bahn (siehe Bild 17).

Als 2. kosmische Geschwindigkeit bezeichnet man jene Geschwindigkeit, auf die ein Körper beschleunigt werden muss, um das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zu verlassen. Sie wird auch Fluchtgeschwindigkeit v_F genannt und kann nach folgender Formel berechnet werden.

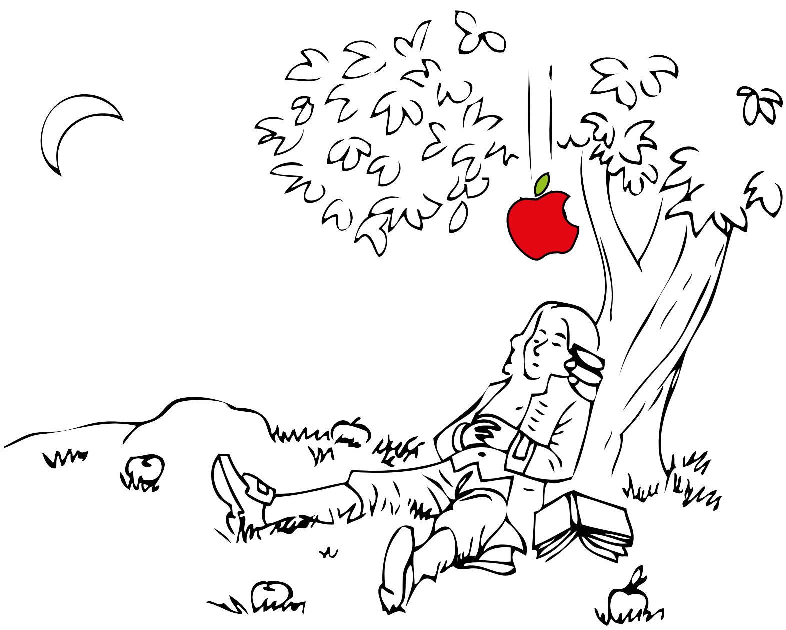
$$\boxed{v_F = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{M}{R}}} \qquad \text{Gleich. [30]}$$

Auf die relativ komplexe Herleitung der Formel für die 2. kosmische Geschwindigkeit und auf Hinweise zur 3. kosmischen Geschwindigkeit (Fluchtgeschwindigkeit aus dem Sonnensystem) soll hier aus Platzgründen verzichtet werden.[25] In der folgenden Tabelle sind die verschiedenen kosmischen Geschwindigkeiten und die daraus resultierenden Bahnformen (siehe Bild 17) von Bewegungen im Gravitationsfeld der Erde zusammengestellt:

Startgeschwindigkeit	Bahnform	Beispiel
$v < v_K = 7{,}9$ km/s	Körper fällt zur Erde zurück	Rakete bei Ausfall einer Antriebsstufe
$v = v_K = 7{,}9$ km/s	Kreisbahn	Satelliten auf niedriger Umlaufbahn
$v_K < v < v_F = 11{,}2$ km/s	Ellipse	viele Forschungssatelliten
$v = v_F = 11{,}2$ km/s	Parabel	Pioneer-Raumsonden
$v > v_F = 11{,}2$ km/s	Hyperbel	

Quelle: Hoche, Detlef u.a.: Physik Abitur – Duden Basiswissen Schule, Mannheim 2010 (Duden Verlag), S. 125.

Legende: Ein Apfel als Ursprung des Gravitationsgesetzes



Der Apfel fällt ...

Es muss ein schöner Sommertag gewesen im Jahr 1665. Da legte sich Isaac Newton ins grüne Gras, das um sein Elternhaus in Woolsthorpe nahe Cambridge wuchs, und schaute in den Himmel, genauer: in die Krone eines Apfelbaums. Als ein Apfel zu Boden fiel, dachte der junge Mann: „Warum müssen Äpfel immer senkrecht zu Boden fallen, warum nicht seitwärts oder aufwärts, warum immer Richtung Erdmittelpunkt?“ So sagt es die Legende. Was sicher ist: Newton erfand bald darauf das Gravitationsgesetz.

Süddeutsche Zeitung vom 31.12.2020 (Bild: in Anlehnung an Orear, S. 79)

[25] Vgl. Wikipedia: Fluchtgeschwindigkeit (Raumfahrt) sowie Bindungsenergie. Siehe auch LEIFI-Physik: Kosmische Geschwindigkeiten sowie Feynman, Richard P. u.a.: Tipps zur Physik, Berlin/Boston 2015 (de Gruyter), S. 70-72.

Literaturverzeichnis

Boer, Klaas de/Fürst, Dietmar/Herrmann, Dieter u.a.: Astronomie – Gymnasiale Oberstufe – Grundstudium, Berlin Frankfurt a.M. 2019 (Duden Paetec Schulbuchverlag).

Bulthaup, Peter: Zur gesellschaftlichen Funktion der Naturwissenschaften, Frankfurt am Main 1973 (Suhrkamp).

Bulthaup, Peter: Didaktik der Naturwissenschaften, Studentische Mitschrift (Tonbandprotokolle) der Vorlesung im Sommersemester 1975 an der Technischen Hochschule Darmstadt, Unveröffentlichtes Typoskript, Darmstadt 1975.

Bulthaup, Peter: Genesis und Funktion des Trägheitsbegriffs, in: ders.: Das Gesetz der Befreiung, Lüneburg 1998 (zu Klampen Verlag), S. 167 – 178.

Bialas, Volker: Johannes Kepler, München 2004 (Verlag C.H. Beck).

Cohen, Isaac Bernhard: Newtons Gravitationsgesetz – aus Formeln wird eine Idee, in: Spektrum der Wissenschaft, Mai 1981 (aus: Scientific American März 1981), S. 101 – 111.

Cohen, Isaac Bernard: Revolutionen in der Naturwissenschaft, Frankfurt am Main 1994 (Suhrkamp).

Camus, Albert: Die Pest, Reinbek bei Hamburg 1998 (Rowohlt).

Engfer, Roland: Physik für Naturwissenschaftler – Teil 1 – Mechanik, S. 19, Physik-Institut der Universität Zürich, September 2004 - Online: Engfer, Roland: Physik für Naturwissenschaftler

Gell-Mann, Murray: Das Quark und der Jaguar, Vom Einfachen zum Komplexen – Die Suche nach einer neuen Erklärung der Welt, München Zürich 1994 (Piper).

Guicciardini, Niccoló: Isaac Newton – Ein Naturphilosoph und das System der Welten, Bellone, Enrico (Hrsg.): Die Großen der Wissenschaft, in: Spektrum der Wissenschaft Biographien, Heft 1/1999.

Feynman, Richard P.: Das Gravitationsgesetz – Schulbeispiel für ein physikalisches Gesetz, in: ders., Vom Wesen physikalischer Gesetze (Erstausgabe 1965, M.I.T. Press), München Zürich 1993 (Piper Verlag).

Feynman, Richard P.: Sechs physikalische Fingerübungen (Erstausgabe 1995), München 2002 (Piper).

Feynman, Richard P., Gottlieb, Michael A., Leighton, Ralph: Vorlesungen über Physik 1, Mechanik, Berlin Boston 2015a (de Gruyter).

Feynman, Richard P., Gottlieb, Michael A., Leighton, Ralph: Tipps zur Physik, Eine Ergänzung, Berlin Boston 2015b (de Gruyter).

Galilei, Galileo (1623): IL Saggiatore (Der Prüfer mit der Goldwaage), in: Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale, hrsg. von Antonio Favaro, Volume VI (1896), S. 197-372. Online (pdf-Download): https://archive.org/details/agh6462.0006.001.umich.edu/page/n1/mode/2up

Hand, Eric: Number 9 – A new giant planet, still unseen, appears to be shaping the orbits of objects beyond Neptune. in: Science, 22. Januar 2016, Band 351 , Ausgabe 6271, S. 330 – 333, https://doi.org/10.1126/science.351.6271.330 .

Hawking, Stephen W.: Eine kurze Geschichte der Zeit, Die Suche nach der Urkraft des Universums, Reinbek bei Hamburg 1991 (Rowohlt).

Hering, Ekbert/Martin, Rolf/Stohrer, Martin: Physik für Ingenieure, Berlin Heidelberg 2012.

Hoche, Detlef u.a.: Physik Abitur – Duden Basiswissen Schule, Mannheim 2010 (Duden Verlag).

Holton, Gerald J./Brush, Stephen G.: Derivation of the Law of Universal Gravitation, in: ders. : Physics, the Human Adventure: From Copernicus to Einstein and Beyond, S. 131-136, New Brunswick 2004 (Rutgers University Press). Online: Holton/Brush: Physics, the Human Adventure

Huyghens, Christiaan: Abhandlung über das Licht (Erstausgabe: 1678), Nachdruck in deutscher Übersetzung herausgegeben von Eugen v. Lommel und übersetzt von Rudolf Mewes, Leipzig 1890.

Kepler, Johannes: Astronomia Nova – Neue, ursächlich begründete Astronomie, übersetzt von Max Capar mit einer Einleitung von Fritz Krafft, Wiesbaden 2005 (Marix Verlag).

Kuhn, Wilfried: Physik, Band III A: Mechanik, Braunschweig 1979 (Westermann).

Laue, Max von: Geschichte der Physik, Frankfurt am Main 1958 (Ullstein).

Newton, Isaac: Mathematische Prinzipien der Naturlehre, London 1726 (3. Ausgabe), hrsg. von Jakob Philipp Wolfers in deutscher Übersetzung, Berlin 1872 (Verlag von Robert Oppenheim), Nachdruck: Darmstadt 1963 (Wissenschaftliche Buchgesellschaft). Druck der lateinische Erstausgabe: London 1687. Online-Versionen:

Deutsche Version von 1872: http://de.wikisource.org/wiki/Mathematische_Principien_der_Naturlehre

Lateinische Version von 1687: http://la.wikisource.org/wiki/Philosophiae_Naturalis_Principia_Mathematica

Orear, Jay: Physik, München Wien 1982 (Carl Hanser).

Planck, Max: Einführung in die Allgemeine Mechanik, Leipzig 1920 (S. Hirzel).

Portz, Helga: Galilei und der heutige Mathematikunterricht, Mannheim 1994 (BI Wissenschaftsverlag).

Rømer, Olaf: Die Entdeckung und die Berechnung der Lichtgeschwindigkeit 1676, mit einer deutschen Übersetzung des Beitrages von Römer im Journal des Sçavans von 1676 von Renate Loosen, Stuttgart 1983 (Belser Verlag). Onlinversion des französischen Berichts im Journal des Sçavans vom 07.12.1676, S. 233-236. Online-Version der deutschen Übersetzung in: Ole Rømer & die Lichtgeschwindigkeit

Rovelli, Carlo: Sieben kurze Lektionen über Physik, aus dem Italienischen von Sigrid Vagt, Reinbek bei Hamburg 2015 (Rowohlt Verlag).

Schiller, Friedrich: Was heißt und zu welchem Ende studiert man Universalgeschichte?, Reprint des Erstdrucks der Jenaer akademischen Antrittsrede aus dem Jahre 1789, Jena 1996.

Szpiro, George: Alles rechnet sich, in: NZZ Folio, Dezember 2004. Online-Version: http://folio.nzz.ch/2004/dezember/alles-rechnet-sich

Zekl, Hans: Die unerzählte Geschichte der Neptun-Entdeckung, astronews.com vom 23. Mai 2003.

Vergrößerte Darstellung stark verkleinerter Abbildungen

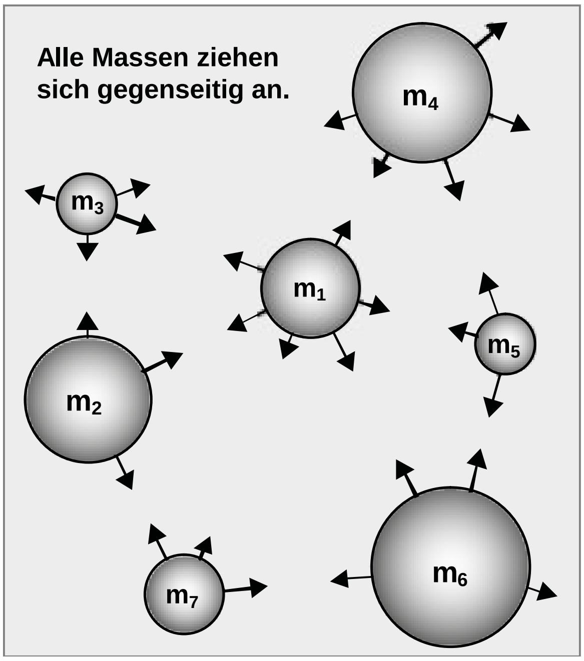


Bild 1: »Alle Massen ziehen sich gegenseitig an.« (Newton) – zurück zum Text: Bild anklicken!

Bild 2: Sternenhimmel über Arosa (CH) – zurück zum Text: Bild anklicken!

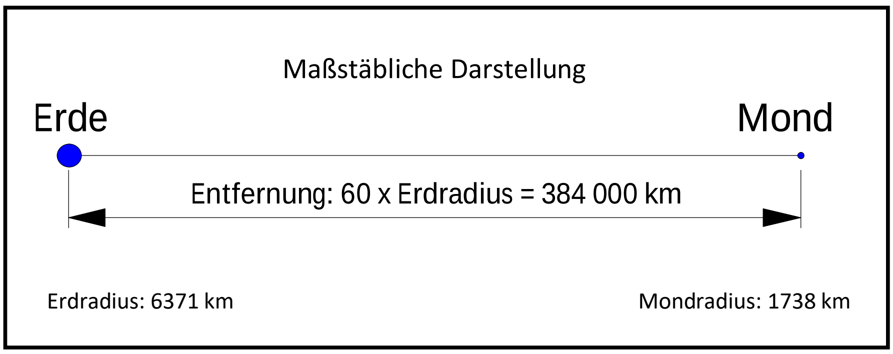


Bild 3: Maßstäbliche Darstellung der Erde–Mond–Entfernung – zurück zum Text: Bild anklicken!